局所体の分岐群について

2007年10月19日 16:00〜17:00
九州大学理学部一号館 1434号室

概 要

局所体の絶対ガロワ群に、剰余体が完全という仮定なしでも、上付き分岐群によるフィルトレイションが定義できる。その次数商はアーベル群であり、剰余体の標数 p が正ならば、p 倍すると 0 である。

分岐群の定義を復習し、次数商の構造を解説する。

目次

1 分岐群の定義

離散付値に関して完備な体を，局所体とよぶ．L を局所体 K の有限次分離拡大とし，M を L を含む K の有限次ガロワ拡大とする．$G = \mathrm{Gal}(M/K)$ をガロワ群，$H = \mathrm{Gal}(M/L) \subset G$ を対応する部分群とすると，有限 G 集合 $X = \mathrm{Hom}_K(L, \overline{K})$ は，G/H と同一視される．K の分離閉包 $\overline{K}$ の剰余体 $\overline{F}$ は，K の剰余体 F の代数閉包である．剰余体 F は任意である．

G に正規部分群による減少フィルトレイション $G^r \lhd G,\ r \in \mathbb{Q}, r > 0$ を定義する．これは，各 L に対し，X の商集合 $X^{(r)} = G^r \backslash X$ で，ある条件をみたすものを定めることと同じことである．$X^{(r)}$ を次のように定義する．

L の整数環 $\mathcal{O}_L$ の表示 $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[T_1, \ldots, T_n]/(f_1, \ldots, f_n)$ をとる．

$$X = \{t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^n | f_1(t) = \cdots = f_n(t) = 0\}$$

となる．K 上のアフィノイド多様体 $\mathcal{Q}^{(r)}$ を

$$\mathcal{Q}^{(r)}(\overline{K}) = \{t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^n | \mathrm{ord} f_1(t) \geq r, \ldots, \mathrm{ord} f_n(t) \geq r\}$$

で定める．$\mathcal{Q}^{(r)}$ の幾何的ファイバーの連結成分のなす集合を $\pi_0(\mathcal{Q}^{(r)}_{\overline{K}})$ で表わすと，有限集合の全射 $X \to \pi_0(\mathcal{Q}^{(r)}_{\overline{K}})$ が得られる．この全射によって，$\pi_0(\mathcal{Q}^{(r)}_{\overline{K}})$ を X の商集合 $X^{(r)}$ と考える．これは $\mathcal{O}_L$ の表示によらず，G のフィルトレイション G^r を定める．

上の $X^{(r)}$ の定義を，スキームのことばでいいかえる．$S = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K, T = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_L$ とおく．P, Q を S 上のスムーズなアファイン・スキームとし，カルテシアン図式

$$\begin{array}{ccc} T = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_L & \longrightarrow & Q = \mathrm{Spec}\ B \\ \downarrow & & \downarrow \\ S = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K & \longrightarrow & P = \mathrm{Spec}\ A \end{array} \tag{1.1}$$

を考える．$S \to P$ と $T \to Q$ は閉埋め込みであり，$Q \to P$ は準有限かつ平坦とする．

例:$A = \mathcal{O}_K[X_1, \ldots, X_n], B = \mathcal{O}_K[T_1, \ldots, T_n]$ とし，$Q \to P$ を $X_i \mapsto f_i$ で定める．$S \to P$ を $X_i \mapsto 0$ で定めると，図式 (1.1) はカルテシアンである．$Q \to P$ は T の近傍で準有限かつ平坦である．

π を K の素元とし，$I = \mathrm{Ker}(B \to \mathcal{O}_L)$ とおく．$r = n/m > 0$ を有理数とし，$B^{(n/m)} = B[I^m/\pi^n]$ とおく．$\widehat{B^{(n/m)}}$ を $B^{(n/m)}$ の π 進完備化とすると，$\mathcal{Q}^{(r)}$ はアフィノイド環 $\widehat{B^{(n/m)}}[1/\pi]$ によって定義されるアフィノイド多様体である．

$\overline{B}^{(r)}_{\mathcal{O}_{\overline{K}}}$ で $B^{(n/m)} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\overline{K}}$ の正規化を表わす．Epp の定理より，$\overline{B}^{(r)}_{\mathcal{O}_{\overline{K}}}$ は $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ 上有限表示であり，幾何的閉ファイバー $\overline{Q}^{(r)}_{\overline{F}} = \mathrm{Spec}\ \overline{B}^{(r)}_{\mathcal{O}_{\overline{K}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{K}}} \overline{F}$ は被約である．さらに，標準写像

$$X^{(r)} = \pi_0(\mathcal{Q}^{(r)}_{\overline{K}}) \to \pi_0(\mathrm{Spec}\ \overline{B}^{(r)}_{\mathcal{O}_{\overline{K}}}) \leftarrow \pi_0(\overline{Q}^{(r)}_{\overline{F}})$$

は双射であり，絶対ガロワ群 $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の作用と両立する．

以下では，log 構造を加味して定義を修正したものを考えるが，その説明は省略する．

2　分岐群の性質 I

$L \supset K$ を上のとおりとすると，次の性質をみたす有理数 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_l$ が一意的に定まる．

・各 $i = 1, \ldots, l$ に対し，$X^{(r)}$ は $r \in (r_{i-1}, r_i]$ で一定かつ，$r_i < r$ なら $X^{(r_i)} \neq X^{(r)}$ である．

・$r \in (r_l, \infty)$ ならば，$X^{(r)}$ は一点からなる．

以下，$l > 0, r_l > 0$ とし，$X^{(r_l)}$ を調べる．

命題 [1]　有理数 $r > 0$ に対し，次の条件は同値である．

1．$r = r_l$ である．

2．$\overline{Q}^{(r)}_{\overline{F}} \to \overline{P}^{(r)}_{\overline{F}}$ は有限エタールであり，自明な被覆ではない．

以下，$r = r_l$ とおく．$\overline{P}^{(r)}_{\overline{F}}$ は $\overline{F}$ 上の有限次元線形空間である．命題と分岐群の定義より，代数的基本群からの標準全射

$$\pi_1(\overline{P}^{(r)}_{\overline{F}}) \to G^{(r)}$$

が定まる．

以下，話を簡単にするため次の仮定をおく．$r = r_l > 0$ は自然数であるとする．k を標数 $p > 0$ の完全体とし，$X = \mathrm{Spec}\ A$ を k 上のスムーズなアファイン・スキーム，$D = (\pi) \subset X$ をスムーズな既約因子，ξ を D の生成点とする．局所環 $\mathcal{O}_{X,\xi}$ は離散付値環であり，π はその素元である．K を完備化 $\mathcal{O}_K = \widehat{\mathcal{O}_{X,\xi}}$ の分数体とする．$Y = \mathrm{Spec}\ B$ を k 上のスムーズなアファイン・スキームとし，$Y \to X$ を有限平坦射とする．$Y \to X$ は D の外でエタール

とし，$D_Y = (Y \times_X D)_{\mathrm{red}}$ はスムーズな既約因子であるとする．η を D_Y の生成点とし，L を完備化 $\mathcal{O}_L = \widehat{\mathcal{O}_{Y,\eta}}$ の分数体とする．K の剰余体 F は D の関数体であり，L の剰余体は D_Y の関数体である．

図式

$$
\begin{array}{ccc}
T = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_L & \longrightarrow & Q = \mathrm{Spec}\ B \otimes_k \mathcal{O}_K \left[\left(\dfrac{1\otimes\pi}{\pi\otimes 1}\right)^{\pm 1}\right] \\
\downarrow & & \downarrow \\
S = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K & \longrightarrow & P = \mathrm{Spec}\ A \otimes_k \mathcal{O}_K \left[\left(\dfrac{1\otimes\pi}{\pi\otimes 1}\right)^{\pm 1}\right]
\end{array}
\tag{2.1}
$$

を考える．F 線形空間 $\Omega^1_{X/k}(\log D)(rD)_\xi \otimes_{\mathcal{O}_{X,\xi}} F$ の双対空間が定める F 上のスキームを $\Theta^{(r)}$ とおく．$\overline{P^{(r)}_{\overline{F}}}$ は $\Theta^{(r)}_{\overline{F}} = \Theta^{(r)} \times_{\mathrm{Spec}\ F} \mathrm{Spec}\ \overline{F}$ と同一視される．命題より，$\overline{Q^{(r)}_{\overline{F}}} \to \overline{P^{(r)}_{\overline{F}}}$ は，$\Theta^{(r)}_{\overline{F}}$ の非自明な有限エタール被覆を定める．

さらに，L は K のガロワ拡大であるとし，$G = \mathrm{Gal}(L/K)$ は Y に作用するとする．$Y \setminus D_Y$ は $U = X \setminus D$ 上の G 捻子である．上の構成を使って，次の定理が示せる

定理１ [2]　G^r は可換群である．

[証明の概略] G の Y への作用は，$\overline{Q^{(r)}_{\overline{F}}}$ への作用を定める．これを幾何的作用とよぶ．絶対ガロワ群 $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ は，$\overline{Q^{(r)}_{\overline{F}}}$ に自然に作用する．これは数論的作用とよぶ．G の作用と G_K の作用は可換である．$\overline{Q^{(r)}_{\overline{F}}}$ の連結成分 $\overline{Q^{(r)}_{\overline{F},0}}$ をとる．分岐群 G^r と G^r_K は，どちらも $\overline{Q^{(r)}_{\overline{F},0}}$ を $\overline{Q^{(r)}_{\overline{F},0}}$ にうつす．よって，群の準同形 $G^r \to \mathrm{Aut}_{\overline{P^{(r)}_{\overline{F}}}}(\overline{Q^{(r)}_{\overline{F},0}})$ と $G^r_K \to \mathrm{Aut}_{\overline{P^{(r)}_{\overline{F}}}}(\overline{Q^{(r)}_{\overline{F},0}})$ が定まる．１つめは同形であり，２つめは全射である．よって，G^r は可換である．■

G^r は可換だから，標準全射 $\pi_1(\Theta^{(r)}_{\overline{F}}) \to G^r$ は $\pi_1(\Theta^{(r)}_{\overline{F}})^{\mathrm{ab}} \to G^r$ をひきおこす．

3　分岐群の性質 II

$\pi_1(\Theta^{(r)}_{\overline{F}})^{\mathrm{ab}}$ の商 $\pi_1(\Theta^{(r)}_{\overline{F}})^{\mathrm{alg}}$ を，次の性質をみたすように定義する：$\Theta^{(r)}_{\overline{F}}$ の連結アーベル・エタール被覆 $V \to \Theta^{(r)}_{\overline{F}}$ が $\pi_1(\Theta^{(r)}_{\overline{F}})^{\mathrm{alg}}$ の作用する有限集合と対応するための条件は，V が $\overline{F}$ 上の可換代数群の構造をもち，しかも $V \to \Theta^{(r)}_{\overline{F}}$ が代数群の準同形となることである．$\pi_1(\Theta^{(r)}_{\overline{F}})^{\mathrm{alg}}$ は p 倍すると 0 になる射影有限アーベル群であり，その指標群 $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Theta^{(r)}_{\overline{F}})^{\mathrm{alg}}, \mathbb{F}_p)$ は，双対空間 $\mathrm{Hom}(\Theta^{(r)}_{\overline{F}}, \overline{F}) = \Omega^1_{X/k}(\log D)(rD)_\xi \otimes_{\mathcal{O}_{X,\xi}} F$ と同一視される．標準同形は，アルティン・シュライアー被覆 $\mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^1 : x \mapsto x^p - x$ を引き戻すことで得られる．

定理２ [4]　標準全射 $\pi_1(\Theta^{(r)}_{\overline{F}})^{\mathrm{ab}} \to G^r$ は，$\pi_1(\Theta^{(r)}_{\overline{F}})^{\mathrm{alg}} \to G^r$ をひきおこす．

系　G^r は p 倍すると 0 である．

指標群 $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Theta^{(r)}_{\overline{F}})^{\mathrm{alg}}, \mathbb{F}_p)$ の記述より，標準単射

$$\mathrm{Hom}(G^r, \mathbb{F}_p) \to \Omega^1_{X/k}(\log D)(rD)_\xi \otimes_{\mathcal{O}_{X,\xi}} F$$

が得られる．

[証明の概略] ρ を有限群 G の線形表現とし，ρ の G^r への制限は指標 χ であると仮定する．標準全射 $\pi_1(\Theta^{(r)}_F)^{\rm ab} \to G^r$ により，χ は $\Theta^{(r)}_F$ 上の階数 1 の局所定数層 $\mathcal{L}_\chi$ を定める．$\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, + : \Theta^{(r)}_F \times \Theta^{(r)}_F \to \Theta^{(r)}_F$ を，第 1 射影，第 2 射影と和とする．$+^*\mathcal{L}_\chi$ が $\mathrm{pr}_1^*\mathcal{L}_\chi \otimes \mathrm{pr}_2^*\mathcal{L}_\chi$ と同形であることを示せばよい．

$\mathcal{F}$ を ρ が定める U 上の局所定数層とする．$U \times U$ 上の局所定数層 $\mathcal{H}$ を，$\mathcal{H} = \mathcal{H}om(\mathrm{pr}_2^*\mathcal{F}, \mathrm{pr}_1^*\mathcal{F})$ で定める．

$$(X \times X)^{(r)} = \mathrm{Spec}\ A \times_k A \left[\left(\frac{1 \otimes \pi}{\pi \otimes 1}\right)^{\pm 1}_{,} \frac{1}{\pi^r \otimes 1}\left(\frac{1 \otimes \pi}{\pi \otimes 1} - 1\right)\right]$$

とおき，$j^{(r)} : U \times U \to (X \times X)^{(r)}$ を開埋め込みとする．射影との合成 $(X \times X)^{(r)} \to X \times X \to X$ による $\xi \in D \subset X$ のファイバーは $\Theta^{(r)}$ である．$j^{(r)}_*\mathcal{H}$ の $\Theta^{(r)}_F$ への制限は $\mathcal{L}_\chi$ の直和である．

第 2 射影と第 1 射影に関するファイバー積 $(U \times U) \times_U (U \times U)$ は，$U \times U \times U$ と同一視される．$1 \le i < j \le 3$ に対し，第 i, j 成分への射影 $\mathrm{pr}_{ij} : U \times U \times U \to U \times U$ は，$\mathrm{pr}_{ij} : (U \times U) \times_U (U \times U) \to U \times U$ を定める．$\mathrm{pr}_{12}^*\mathcal{H} \otimes \mathrm{pr}_{23}^*\mathcal{H} = \mathcal{H}om(\mathrm{pr}_2^*\mathcal{F}, \mathrm{pr}_1^*\mathcal{F}) \otimes \mathcal{H}om(\mathrm{pr}_3^*\mathcal{F}, \mathrm{pr}_2^*\mathcal{F})$ だから，射の合成は

$$\mathrm{pr}_{12}^*\mathcal{H} \otimes \mathrm{pr}_{23}^*\mathcal{H} \to \mathcal{H}om(\mathrm{pr}_3^*\mathcal{F}, \mathrm{pr}_1^*\mathcal{F}) = \mathrm{pr}_{13}^*\mathcal{H} \tag{3.1}$$

を定める．

スキームの射 $\mathrm{pr}_{23} : (U \times U) \times_U (U \times U) \to U \times U$ は，スムーズ射 $\mu : (X \times X)^{(r)} \times_X (X \times X)^{(r)} \to (X \times X)^{(r)}$ に一意的に延長される．さらに $\mu : (X \times X)^{(r)} \times_X (X \times X)^{(r)} \to (X \times X)^{(r)}$ の $\xi \in D \subset X$ 上のファイバーへの制限は和 $+ : \Theta^{(r)} \times \Theta^{(r)} \to \Theta^{(r)}$ と一致する．よって，射 (3.1) は，射

$$\mathrm{pr}_1^*(j^{(r)}_*\mathcal{H}|_{\Theta^{(r)}}) \otimes \mathrm{pr}_2^*(j^{(r)}_*\mathcal{H}|_{\Theta^{(r)}}) \to +^*(j^{(r)}_*\mathcal{H}|_{\Theta^{(r)}}) \tag{3.2}$$

をひきおこす．これは同形 $\mathrm{pr}_1^*\mathcal{L}_\chi \otimes \mathrm{pr}_2^*\mathcal{L}_\chi \to +^*\mathcal{L}_\chi$ を与え，定理が示される．

混標数の場合はもっと難しく，離散付値環の長さ有限な商を考えることが必要になるが，基本的には同様な方法により定理が証明される．[3]

参考文献

[1] A. Abbes and T. Saito, *Ramification of local fields with imperfect residue fields*, American Journal of Mathematics, 124.5 (2002), 879-920

[2] ——, *ibid. II*, Documenta Mathematica, Extra Volume Kato (2003), 3-70

[3] T. Saito, *ibid. III*, 準備中

[4] ——, *Wild ramification and the characteristic cycle of an ℓ-adic sheaf*, arXiv:0705.2799