曲面上のℓ進層の特性サイクルとオイラー数

大阪大学集中講義 2014.5.12–16

エタール・コホモロジーは，Weil 予想の解決を動機として Grothendieck によって導入されたが，正標数の多様体上のℓ進層の暴分岐と複素多様体上の$\mathcal{D}$加群の不確定特異点のあいだには強い類似が観察されている．$\mathcal{D}$加群の超局所解析では余接束上に特性サイクルが定義されることから，ℓ進層にも余接束上に特性サイクルが定義されることが期待される．

kを標数$p>0$の代数閉体とし，Xをk上スムーズなd次元の代数多様体とする．ℓをpと異なる素数とする．特性サイクルの加法性より，Xの開部分スキームU上のスムーズなℓ進層$\mathcal{F}$の零延長$j_!\mathcal{F}$の場合が基本的である．

特性サイクル $\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}$は，余接束$T^*X$の$d$次元錐的サイクルとして定義され，次の性質 1. と 2. をみたすことが期待される．

1. オイラー数:Xが固有的なら，**オイラー数** $\chi_c(U,\mathcal{F})=\sum_{q=0}^{2d}(-1)^q\dim H^q_c(U,\mathcal{F})$は特性サイクルと零切断の交点数

$$\chi_c(U,\mathcal{F})=(\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F},T^*_XX)_{T^*X} \tag{0.1}$$

と等しい．

2. 消失輪体：uをXの閉点とし，スムーズな代数曲線への射$f\colon X\to C$による像を$v=f(u)$とおく．vで0でないC上の微分形式のひきもどしが定める余接束の切断$df\colon X\to T^*X$と特性サイクル$\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}$の共通部分が$u$のファイバー$T^*_uX\subset T^*X$の近傍で孤立点であるとき，$u$は$j_!\mathcal{F}$に関して$f\colon X\to C$の**孤立特性点**であるという．

uが$j_!\mathcal{F}$に関して$f\colon X\to C$の孤立特性点ならば，消失輪体の全次元の交代和も特性サイクルとの交点数

$$-\mathrm{dimtot}_v\phi_u(j_!\mathcal{F},f)=(\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F},df)_{T^*X,u} \tag{0.2}$$

として表せる． □

孤立特性点しかもたないような$f\colon X\to C$はたくさんあるので，(0.2) は特性サイクル$\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}$を特徴づける条件である．

特性サイクルについては次のことが既知である．

例 0.1 1. 馴分岐の場合：U が X の単純正規交叉因子 D の補開部分スキームで，$\mathcal{F}$ は D にそって馴分岐であるとする．D の既約成分を $D_1,\dots,D_m$ とし，添字 $1,\dots,m$ の集合 I に対し $X_I=\bigcap_{i\in I}D_i$ とおき $T^*_{X_I}X$ を余法束とすると，

$$\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}=(-1)^d\mathrm{rank}\ \mathcal{F}\sum_{I\subset\{1,\dots,m\}}[T^*_{X_I}X] \tag{0.3}$$

である．この場合 (0.1) は以前から知られていたことであり，(0.2) は Enlin Yang 氏が確認中である．

2. 曲線の場合：$\dim X=1$ なら，

$$\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}=-\Big(\mathrm{rank}\ \mathcal{F}\cdot[T^*_XX]+\sum_{x\in D}\mathrm{dimtot}_x\mathcal{F}\cdot[T^*_xX]\Big) \tag{0.4}$$

である．この場合 (0.1) は Grothendieck-Ogg-Shararevich の公式であり，(0.2) はスワン導手の誘導公式である． □

X が曲面のときに次のことが示せる．

定理 0.2 X を k 上のスムーズな曲面とすると，特性サイクル $\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}$ が余接束上のサイクルとして定義され，(0.1) と (0.2) がなりたつ． □

特性サイクルの定義と定理 0.2 の証明の方針を簡単に紹介する．$\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}$ をその台の X への像の余次元が $0,1,2$ の成分の和にわけて考える．

余次元が 0 の成分は零切断 T^*_XX の rank $\mathcal{F}$ 倍である．

余次元 1 の成分は境界 $D=X-U$ の余次元 1 の既約成分 D_i の有限被覆 $D(\chi)$ 上への余接束のひきもどし $T^*X\times_X D(\chi)$ の部分直線束 $L(\chi)$ の像の線形結合である．ここに現れる直線束やその係数は 1 節で解説する分岐理論による分岐群の次数商と微分形式の結びつきを使って 2.1 節で定義する．

余次元 2 の成分は残った有限個の閉点 $x\in X$ のファイバー T^*_xX の線形結合である．この係数は $j_!\mathcal{F}$ のラドン変換の x の双対超平面にそった分岐をこれも 1 節で解説する分岐理論で定義される不変量を使って 2.4 節で定義する．

特性サイクルが (0.2) をみたすことは，隣接輪体の全次元が曲線への射を少し変形しても変わらないという安定性の帰結である．この安定性は Deligne-Laumon の Swan 導手の半連続性からみちびく．

(0.1) をみたすことは，分岐理論によって定義される余次元 1 の成分の係数がラドン変換を使って定義されるものと等しいことを (0.2) と Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式を 2 回使って示し，さらにそれを使って証明する．

以下 1 節で分岐理論を概説し，2 節で特性サイクルの定義を解説する．定理 0.2 の証明は省略する．

目次

1 分岐群と微分形式

剰余体が完全とは限らない局所体のガロワ群に上つき分岐群のフィルトレイションを定義し，その次数商を微分形式と結びつける．

1.1 局所体の分岐群

局所体のガロワ拡大の分岐群を幾何的な方法で定義する．

ここでは，完備離散付値体を局所体とよぶ．離散付値 $\mathrm{ord}_K\colon K \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ が定義されている体 K を**離散付値体**といい，その離散付値に関して完備なときに完備離散付値体という．離散付値体 K の付値環 $\{x \in K \mid \mathrm{ord}_K x \geqq 0\}$ を $\mathcal{O}_K$ で表し，剰余体 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K$ を F で表す．F の標数を $p \geqq 0$ とする．極大イデアル $\mathfrak{m}_K = \{x \in K \mid \mathrm{ord}_K x > 0\}$ の生成元を素元とよぶ．

例 1.1 局所体の例：$\mathbf{Q}_p, k((T))$.

K が局所体で π が素元のとき，$\mathcal{O}_K[T_1, \ldots, T_n]$ の (π) での局所化の完備化の分数体 $\mathrm{Frac}\ \mathcal{O}_K[T_1, \ldots, T_n]^{\wedge}_{(\pi)}$. $K = k((T))$ のとき，これは $K(T_1, \ldots, T_n)((T))$. □

L を K の有限次分離拡大とすると，$\mathcal{O}_K$ の整閉包 $\mathcal{O}_L$ は完備離散付値環．$\mathcal{O}_L$ の剰余体 E の F 上の拡大次数を剰余次数とよび f で表す．$\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} F$ の長さを分岐指数とよび e で表す．$[L : K] = ef$ である．E が F の分離拡大で $e = 1$ のとき L は K の**不分岐拡大**であるといい，E が F の分離拡大で F の標数 p が e をわりきらないとき L は K の**馴分岐拡大**であるという．

L を K の有限次ガロワ拡大とし $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ をガロワ群とする．G の分岐群のフィルトレイションを定義する．まず，重要ではないが定義の簡単な**下つき分岐群**を定義する．自然数 $i \geqq 0$ に対し

$$G_i = \mathrm{Ker}(G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_L^i))$$

とおく．$G = G_0$ である．

$$G_1 = I = \mathrm{Ker}(G \to \mathrm{Aut}(E))$$

を**惰性群**という．E_{sep} を E 内での F の分離閉包とすると標準同形 $G_0/G_1 \to \mathrm{Gal}(E_{sep}/F)$ が定まる．

$$P = \mathrm{Ker}(G_1 \to \mathrm{Aut}_E(\mathfrak{m}_L/\mathfrak{m}_L^2) = E^\times) \supset G_2$$

を**暴分岐群**という．G_1/P は位数が p でわれない巡回群である．$p > 0$ なら P は p 群であり，$p = 0$ なら $P = 1$ である．部分群 $G \supset I \supset P \supset 1$ に対応する中間体 $K \subset L_{ur} \subset L_{tr} \subset L$ がそれぞれ最大不分岐拡大と最大馴分岐拡大である．

上つき分岐群を定義するため，下つき分岐群の定義を幾何的にいいかえる．$\mathcal{O}_L$ の生成系と関係式の生成系をとり $\mathcal{O}_K$ 上の環の同形

$$\mathcal{O}_K[X]/(f) = \mathcal{O}_K[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_n) \to \mathcal{O}_L \tag{1.1}$$

を定める．ここで生成系の元の個数と関係式の個数を等しくとれることが重要である．多項式系 $f = (f_1, \ldots, f_n)$ は n 次元多重円板の射

$$f\colon D^n \to D^n; x \mapsto f(x)$$

を定める．ガロワ群 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_K[X]/(f), \mathcal{O}_{\bar{K}}) = G$ を原点の逆像 $f^{-1}(0) = \{x \in \mathcal{O}_{\bar{K}}^n \mid f(x) = 0\}$ と同一視する．このとき，下つき分岐群 G_i は定義域の原点 $1 \in G = f^{-1}(0) \subset D^n$ の近傍 $D^n(|\pi_L|^i, 1)$ と G の共通部分である：$G_i = G \cap D^n(|\pi_L|^i, 1)$．

有理数 $r > 0$ に対し，**上つき分岐群** $G^r \subset G$ を行き先の原点 $0 \in D^n$ の近傍 $D^n(|\pi_K|^r, 0)$ の逆像の 1 を含む連結成分 $(f^{-1}D^n(|\pi_K|^r, 0))^\circ$ と G の共通部分として定義する：$G^r = G \cap (f^{-1}D^n(|\pi_K|^r, 0))^\circ$．

例 1.2 Newton polygon と Herbrand 関数．$\mathcal{O}_L$ が $\mathcal{O}_K$ 上 1 つの元で生成されるとし，$\mathcal{O}_K$ 上の同形 $\mathcal{O}_K[X]/(f) \to \mathcal{O}_L$ をとる．$f = \prod_{j=1}^n (X - \alpha_j)$ とし，$1 \in G$ を $\alpha_n \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ と同一視すれば，$G_i = \{\alpha_j \mid \mathrm{ord}_L(\alpha_j - \alpha_n) \geqq i\}$ である．

$f(Y + \alpha_n) = g(Y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k Y^{n-k}$ とおく．$[0, n-1]$ で定義された凸関数でグラフが

$$(0,0) = (0, \mathrm{ord}_K a_0),\ \ldots,\ (n-1, \mathrm{ord}_K a_{n-1}) = (n-1, \sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{ord}_K(\alpha_j - \alpha_n))$$

より下にあるもののうちで最大のもののグラフを**Newton polygon**とよぶ．Newton polygonの頂点(k,t_k)の座標t_kは$\mathrm{ord}_L(\alpha_i-\alpha_n)$のうち小さい方から$k$個の和であり，$[k-1,k]$での傾き$s_k$は$\mathrm{ord}_L(\alpha_i-\alpha_n)$のうち小さい方から$k$番めである．

$$\mathrm{ord}_K g(y) \geqq \min_k \left(\mathrm{ord}_K a_k + \frac{n-k}{e}\mathrm{ord}_L y\right)$$

であり，うちけしあいがおこらなければ等号である．よって，$s_k < s < s_{k+1}$での傾きが$\frac{n-k}{e}$で$\varphi(0)=0$である上に凸な折れ線連続関数として**Herbrand関数**$r=\varphi(s)$を定めると，$G^r = G_s$である． □

例1.2の場合をのぞき，一般には下つき分岐群と上つき分岐群の間に関係はない．

有理数$r \geqq 0$に対し$G^{r+} = \bigcup_{s>r} G^s \subset G^r$とおく．$G^r = 1$のとき拡大$L/K$の分岐は$r$**以下**であるといい，$G^{r+}=1$のとき拡大$L/K$の分岐は$r+$**以下**であるという．$G^1 = I \supset G^{1+} = P$だから，$L/K$の分岐が1以下とは$L$が不分岐ということであり，$L/K$の分岐は1+以下とは$L$が馴分岐ということである．

1.2　分岐群とブローアップ

半径を縮める操作をブローアップと解釈し，スキームのことばで分岐群の定義を書きなおす．

$S = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$とおき，$P = \mathbf{A}^n_S = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K[X_1,\ldots,X_n], Q = \mathbf{A}^n_S$とする．$S$上の射$f\colon Q \to P$を多項式系$f=(f_1,\ldots,f_n)$で定める．$T = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_L$とおき$S \to P$を零切断とすれば，$S$上のスキームのカルテシアン図式

$$\begin{array}{ccc} Q & \longleftarrow & T \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ P & \longleftarrow & S \end{array} \tag{1.2}$$

が得られる．$D^n = P(\mathcal{O}_{\bar{K}})$である．

話を簡単にするため，$r \geqq 1$は自然数であるとする．$S \subset P$の閉部分スキーム$S_r = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K^r$での$P$のブローアップ$P' \to P$から閉ファイバーのプロパー・トランスフォームをのぞいたもの$\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K\left[\frac{X_1}{\pi^r},\ldots,\frac{X_n}{\pi^r}\right]$を$P^{(r)}$で表す．$D^n(|\pi_K|^r,0) \subset D^n$は$P^{(r)}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \subset P(\mathcal{O}_{\bar{K}})$である．

図式(1.2)でPを$P^{(r)}$でおきかえ，$\bar{S} = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{\bar{K}}$にベース・チェンジしさらに整閉包をとって可換図式

$$\begin{array}{ccc} Q^{(r)}_{\bar{S}} & \longleftarrow & \bar{T} \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ P^{(r)}_{\bar{S}} & \longleftarrow & \bar{S} \end{array} \tag{1.3}$$

を構成する．reduced fiber theorem（Grauert-Remmertの有限性定理）より，幾何的閉ファイバー $Q^{(r)}_{\bar S} \times_{\bar S} \mathrm{Spec}\ \bar F$ は被約である．

$\bar T$ を無縁和 $\coprod_G \bar S$ と同一視しその幾何的閉ファイバーも G と同一視すると，$\bar T$ は写像 $G \to Q^{(r)}_{\bar S} \times_{\bar S} \mathrm{Spec}\ \bar F$ を定める．分岐群 $G^r \subset G$ は幾何的閉ファイバー $Q^{(r)}_{\bar S} \times_{\bar S} \mathrm{Spec}\ \bar F$ での像が1の像と同じ連結成分に含まれるもの全体のなす部分群である．

命題 1.3 L を局所体 K の有限次拡大とし，$r > 0$ を自然数とする．

$$Q^{(r)}_{\bar S} \times_{\bar S} \mathrm{Spec}\ \bar F \to P^{(r)}_{\bar S} \times_{\bar S} \mathrm{Spec}\ \bar F \tag{1.4}$$

を (1.3) がひきおこす有限射とする．

1. 次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) L/K の分岐は r 以下である．

(2) 有限射 (1.4) は自明な被覆の無縁和である．

2. 次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) L/K の分岐は $r+$ 以下である．

(2) 有限射 (1.4) はエタールである． □

［証明］1. は定義より明らかである．2. はザリスキ・永田の純性定理からしたがう． ■

1.3 余接束

整数環の生成元と関係式による表示から得られた図式 (1.2) の構成を積の中の対角を使った構成でおきかえて，分岐群の定義と余接束をむすびつける．

k を標数 $p > 0$ の代数閉体とし，X を k 上スムーズなスキームとする．D を k 上スムーズな X の既約因子とし，ξ を D の生成点とする．K を ξ での局所体 $\mathrm{Frac}\ \hat{\mathcal O}_{X,\xi}$ とする．$U = X - D$ とし，$V \to U$ を有限エタールなガロワ被覆とし，G をそのガロワ群とする．

Y を V での X の整閉包とし，Y も k 上スムーズで V が Y の k 上スムーズな既約因子 E の補開部分スキームであるとし，L を E の生成点での局所体とする．このとき図式 (1.2) を

$$\begin{array}{ccc} Y \times_k S & \longleftarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times_k S & \longleftarrow & S \end{array} \tag{1.5}$$

でおきかえても，同じ分岐群のフィルトレイション $(G^r)_{r>0}$ が定義される．図式

(1.5) はカルテシアン図式

$$\begin{array}{ccccc} V\times_k U & \subset & Y\times_k X & \longleftarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U\times_k U & \subset & X\times_k X & \longleftarrow & X \end{array} \tag{1.6}$$

の右の四角を第 2 射影に関して $S\to X$ でベース・チェンジして得られる．

以下 $r>0$ は自然数であるとし，$R=rD$ を X のカルティエ因子と考え，積 $X\times X$ を対角内の $R\subset X$ でブローアップから $X\times D\cup D\times X$ のプロパー・トランスフォームをのぞいたものを $P^{(R)}$ とする．$P^{(R)}$ を第 2 射影に関して $S\to X$ でベース・チェンジすると $P^{(r)}$ が得られる．

余接束 $T^*X=\mathbf{V}(\Omega^1_{X/k})$ は対角 $X\subset X\times X$ の余法束 $T^*_X(X\times X)$ として定義されるから，余法束 $T^*_XP^{(R)}$ はそれを R にともなう直線束でひねったもの $T^*X(R)=\mathbf{V}(\Omega^1_{X/k}(R))$ である．$P^{(R)}$ は $U\times U$ を開部分スキームとして含み，その補集合は D 上のベクトル束 $TX(-R)\times_X D$ である．

1.4　ガロワ被覆の分岐と亜群

$X\times X$ の対称性を使うため，図式 (1.6) の右上の $V\times U$ を $(V\times V)/\Delta G$ でおきかえると亜群の構造が現れる．

$r>1$ を自然数とし，$U\times U$ の有限エタール被覆 $(V\times V)/\Delta G\to U\times U$ での $P^{(R)}\supset U\times U$ の整閉包を $Q^{(R)}$ とする．対角射 $U\to U\times U$ とそのもちあげ $U=V/G\to(V\times V)/\Delta G$ はそれぞれ整閉包 $X\to P^{(R)}$ と $X\to Q^{(R)}$ に延長され，可換図式

$$\begin{tikzcd} & Q^{(R)} \arrow[r] \arrow[d] & (V\times V)/\Delta G \arrow[d] \\ X \arrow[ur] \arrow[r] & P^{(R)} \arrow[r] & U\times U \end{tikzcd} \tag{1.7}$$

が得られる．

命題 1.4 次の条件 (1) と (2) は同値である．

(1) L/K の分岐は $r+$ 以下である．

(2) (1.7) の射 $Q^{(R)}\to P^{(R)}$ は $D\subset X$ の生成点 ξ の $Q^{(R)}$ での像の近傍でエタールである． □

［証明］$V\times U$ も $(V\times V)/\Delta G$ も第 2 射影に関して $V\to U$ でベース・チェンジすると $V\times V$ になるので，命題 1.3.2 と次の補題からしたがう． ■

補題 1.5 正規ネータースキームの可換図式

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[d] & V \arrow[l] \arrow[d] \\ X \arrow[ur] \arrow[r] & P & U, \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Q' \arrow[d] & V' \arrow[l] \arrow[d] \\ X' \arrow[ur] \arrow[r] & P' & U' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

とその間の**準有限**な射を考える．四角はカルテシアンであり，射 $\to$ は閉うめこみであり，射 $\leftarrow$ は開うめこみであり，$P' \leftarrow U' \leftarrow V'$ は $P \leftarrow U \leftarrow V$ のベース・チェンジであるとする．$V \to U$ は有限エタール射であり，Q は V での P の整閉包，Q' は V' での P' の整閉包であるとする

$Q \to P$ が $X \to Q$ の像でエタールならば $Q' \to P'$ も $X' \to Q'$ の像でエタールである．逆に $Q' \to P'$ が $X' \to Q'$ の像でエタールで下の 3 条件がみたされれば，$Q \to P$ も $X \to Q$ の像でエタールである．

(1) $X' \to X$ は全射である．

(2) 次の図式はカルテシアンである：

$$\begin{array}{ccc} X' \cap U' & \longrightarrow & U' \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X \cap U & \longrightarrow & U \end{array}$$

(3) $X \cap U$ は X で密である． $\square$

$U \times U$ は射影 $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 \colon U \times U \to U$ と $\mu = \mathrm{pr}_{13} \colon (U \times U) \times_U (U \times U) = U \times U \times U \to U \times U$ および対角射 $\delta_U \colon U \to U \times U$ といれかえ $\iota_U \colon U \times U \to U \times U$ により亜群スキームの構造をもつ．これは，$P^{(R)} \supset U \times U$ の**亜群**スキームの構造に一意的に延長される．同様に $(V \times V)/\Delta G$ も亜群スキームの構造をもち，$(V \times V)/\Delta G \to U \times U$ は亜群スキームの射である．

必要なら X を ξ の近傍でおきかえることにより，命題 1.4 の同値な条件を強めて (1.7) の射 $Q^{(R)} \to P^{(R)}$ は $D \subset X$ の $Q^{(R)}$ での像の近傍でエタールであると仮定する．このとき，エタール被覆 $V \to U$ の D に沿った分岐は重複度 R で非退化であるという．$W^{(R)} \subset Q^{(R)}$ を開部分スキームで $Q^{(R)} \to P^{(R)}$ の制限 $W^{(R)} \to P^{(R)}$ がエタールとなる最大のものとする．このとき，$(V \times V)/\Delta G$ の亜群スキームの構造は，$W^{(R)} \supset (V \times V)/\Delta G$ の亜群スキームの構造に一意的に延長され，

$$\begin{array}{ccc} W^{(R)} & \longleftarrow & (V \times V)/\Delta G \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ P^{(R)} & \longleftarrow & U \times U \end{array} \tag{1.8}$$

は亜群スキームの可換図式である．

補閉集合 $T^{(R)} = P^{(R)} - (U \times U)$ を D 上のベクトル束 $TX(-R) \times_X D$ と同一視すると，$P^{(R)}$ の亜群スキームの構造がひきおこす $T^{(R)}$ の群スキームの構造はベクトル束 $TX(-R) \times_X D$ の加法である．補閉集合 $E^{(R)} = W^{(R)} - (V \times V)/\Delta G$ は群スキーム $W^{(R)} \times_{P^{(R)}} T^{(R)}$ としての構造をもち，$E^{(R)} \to T^{(R)}$ は D 上の群スキームのエタール射である．可換図式 (1.8) の右のたての亜群スキームのエタール射 $(V \times V)/\Delta G \to U \times U$ が群スキームのエタール射 $E^{(R)} \to T^{(R)}$ に退化している．

D の生成点 ξ での $E^{(R)}$ のファイバーの単位元を含む連結成分を $E_\xi^{(R)\circ} \subset E_\xi^{(R)}$ で表わす．

命題 1.6 完全系列

$$1 \to G^r (= G^r/G^{r+}) \to E_\xi^{(R)\circ} \to T_\xi^{(R)} \to 1 \tag{1.9}$$

がある． □

系 1.7 次の条件 (1) と (2) は同値である．
(1) L/K の分岐は r 以下である．
(2) 群スキームの標準射 $E^{(R)} \to T^{(R)}$ の ξ でのファイバーは自明な被覆である．
□

例 1.8 $X = \mathbf{A}^2 = \mathrm{Spec}\, k[x,y] \supset D = (x=0)$ とし，$U = X - D = \mathrm{Spec}\, k[x^{\pm 1}, y]$ とする．K を D の生成点での局所体 $k(y)((x))$ とする．$r > 1$ を自然数とする．$x' = x + ux^r, y' = y + vx^r$ とおくと

$$\begin{aligned} P^{(R)} &= \mathrm{Spec}\ k[x,y,u,v,(1+ux^{r-1})^{-1}] \\ &\supset U \times U = \mathrm{Spec}\ k[x^{\pm 1},y,u,v,(1+ux^{r-1})^{-1}] \end{aligned}$$

である．

1. $p \nmid n$ とし，$V \to U$ を $t^p - t = \dfrac{1}{x^n}$ で定まるアルティン・シュライアー被覆とする．$(V \times V)/\Delta G \to U \times U$ は $t^p - t = \dfrac{1}{x'^n} - \dfrac{1}{x^n}$ で定まるアルティン・シュライアー被覆である．$r = n+1$ とおくと

$$\frac{1}{x'^n} - \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^n}((1+ux^n)^{-n} - 1)$$

は $P^{(R)}$ 上正則関数だから $Q^{(R)} = W^{(R)}$ である．右辺は $\equiv -nu \bmod x$ だから，$E^{(R)} \to T^{(R)}$ は $t^p - t = -nu$ で定まるアルティン・シュライアー被覆である．

$t^p - t = \dfrac{1}{x^n}$ で定まる K のアルティン・シュライアー拡大 L のガロワ群を G とすると，$G = G^{n+1}, G^{(n+1)+} = 1$ である．

2. $p \mid n$ とし，$V \to U$ を $t^p - t = \dfrac{y}{x^n}$ で定まるアルティン・シュライアー被覆とする．$(V \times V)/\Delta G \to U \times U$ は $t^p - t = \dfrac{y'}{x'^n} - \dfrac{y}{x^n}$ で定まるアルティン・シュライアー被覆である．$r = n$ とおくと

$$\frac{y'}{x'^n} - \frac{y}{x^n} = \frac{1}{x^n} y'((1+ux^{n-1})^{-n} - 1) + v$$

は $P^{(R)}$ 上正則関数だから $Q^{(R)} = W^{(R)}$ である．右辺は

$$\equiv \begin{cases} v \bmod x & (p = n = 2 \text{ 以外のとき}) \\ yu^2 + v \bmod x & (p = n = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

だから，$E^{(R)} \to T^{(R)}$ はそれぞれ $t^p - t = v$ あるいは $t^2 - t = yu^2 + v$ で定まるアルティン・シュライアー被覆である．

$t^p - t = \dfrac{y}{x^n}$ で定まる K のアルティン・シュライアー拡大 L のガロワ群を G とすると，$G = G^n, G^{n+} = 1$ である． □

1.5　分岐群の次数商と微分形式

完全系列 (1.9) をつかって，分岐群と微分形式を結びつける．結びつきの根拠となるのは次の標準同形である．

補題 1.9 k を標数 $p>0$ の代数閉体とし，E を有限次元 k 線形空間，G を有限群とする．

1. F を k 上のスムーズな連結アファイン群スキームとし，$1\to G\to F\to E\to 1$ を拡大とすると，F は可換群スキームであり p 倍すると 0 である．したがって G も可換群であり p 倍すると 0 である．

2. G は可換であり p 倍すると 0 であるとする．$E^\vee = Hom_k(E,\mathbf{G}_a), G^\vee = Hom(G,\mathbf{F}_p)$ をそれぞれの双対とすると標準単射

$$G^\vee \to \mathrm{Ext}(E,\mathbf{F}_p)\simeq E^\vee(k) \tag{1.10}$$

がある．□

(1.10) の右辺で $\mathrm{Ext}(E,-)$ は k 上のスムーズなアファイン可換群スキームとしての拡大の群を表わす．(1.10) の同形はベクトル空間の射について関手的である．

E が加法群 $\mathbf{G}_a$ で G が $\mathbf{F}_p$ のときが基本的である．この場合には，アルティン・シュライアー系列 $0\to\mathbf{F}_p\to\mathbf{G}_a\overset{F-1}{\to}\mathbf{G}_a\to 0$ が，$\mathbf{G}_a$ の $\mathbf{F}_p$ による拡大 $AS\in\mathrm{Ext}(\mathbf{G}_a,\mathbf{F}_p)$ を定める．さらに標準単射 $k\to\mathrm{End}(\mathbf{G}_a)$ によって $\mathrm{Ext}(\mathbf{G}_a,\mathbf{F}_p)$ を k 加群と考えて，(1.10) の同形が得られる．

分岐群の次数商と微分形式を結びつける．

定理 1.10 $r>1$ を自然数とする．次数商 G^r/G^{r+} は p 倍すると 0 になるアーベル群である．$\bar F$ を D の関数体 $F=\kappa(\xi)$ の代数閉包とすると，標準単射

$$ch\colon \mathrm{Hom}(G^r/G^{r+},\mathbf{F}_p)\to \Omega^1_{X/k}(R)_\xi\otimes_{\mathcal{O}_{X,\xi}}\bar F \tag{1.11}$$

が定まる．□

［証明］命題 1.6 の完全系列 (1.9) は $\bar F$ 上のスムーズなアファイン群スキームの拡大

$$1\to G^r/G^{r+}\to E^{(R)\circ}_{\bar F}\to T^{(R)}_{\bar F}\to 1 \tag{1.12}$$

を定める．(1.12) は $\mathrm{Ext}(T^{(R)},G^r/G^{r+})$ の元を定める．補題 1.9 より G^r/G^{r+} は有限次元 $\mathbf{F}_p$ 線形空間であり，標準単射

$$\mathrm{Hom}(G^r/G^{r+},\mathbf{F}_p)\to \mathrm{Hom}_{\bar F}(T^{(R)}_{\bar F},\bar F) \tag{1.13}$$

が定まる．$T^{(R)}=TX(-R)\times_X D$ だから，(1.13) の右辺 $\mathrm{Hom}_{\bar F}(T^{(R)}_{\bar F},\bar F)$ は $\Omega^1_{X/k}(R)_\xi\otimes_{\mathcal{O}_{X,\xi}}\bar F$ である．■

例 1.11 記号は例 1.8 のとおりとする．1. のときは，標準単射 ch による生成元の像は $\dfrac{-ndx}{x^{n+1}} = d\dfrac{1}{x^n}$ である．2. のときは，$p = n = 2$ でなければ ch による生成元の像は $\dfrac{dy}{x^n} = d\dfrac{y}{x^n}$ である．$p = n = 2$ のときは $\dfrac{\sqrt{y}dx + dy}{x^2}$ である． □

$r > 1$ が整数でない有理数のときも標準同形 (1.11) は右辺を次のように修正して定義される．局所体 $K = \mathrm{Frac}\, \hat{\mathcal{O}}_{X,\xi}$ の分離閉包 K_{sep} に K の正規離散付値 ord_K を延長し，K_{sep} の単項分数イデアルを $\mathfrak{m}^{\geqq r}_{K_{\mathrm{sep}}} = \{x \in K_{\mathrm{sep}} \mid \mathrm{ord}_K x \geqq r\}$ で定める．K_{sep} の剰余体 $\bar{F}$ は D の関数体 F の代数閉包である．1 次元 $\bar{F}$ 線形空間を $L(-r) = \mathfrak{m}^{\geqq r}_{K_{\mathrm{sep}}} \otimes_{\mathcal{O}_{K_{\mathrm{sep}}}} \bar{F}$ で定めると，標準単射

$$ch\colon \mathrm{Hom}(G^r/G^{r+}, \mathbf{F}_p) \to \mathrm{Hom}_{\bar{F}}(L(-r), \Omega^1_{X/k,\xi} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\xi}} \bar{F}) \tag{1.14}$$

が定義される．

2 特性サイクルの構成

2.1 余次元 1 の成分

前節で構成した分岐群の次数商と微分形式の結びつきをつかって ℓ 進層の特性サイクルの余次元 1 の成分を定義する．

k を標数 $p > 0$ の代数閉体とし，X を k 上のスムーズな代数多様体，X のスムーズな因子 D の補開部分スキームを U とする．ℓ を p と異なる素数とし，$\mathcal{F}$ を U 上のスムーズな ℓ 進層または U 上の局所定数 $\bar{\mathbf{F}}_\ell$ 層とする．スムーズな ℓ 進層 $\mathcal{F}$ の特性サイクルは $\mathcal{F}$ を法 ℓ 還元して得られる局所定数 $\bar{\mathbf{F}}_\ell$ 層の特性サイクルとして定義するので，はじめから局所定数 $\bar{\mathbf{F}}_\ell$ 層を考えることにする．

1.4, 1.5 節の状況で X を D の生成点の近傍に縮めると，ガロワ被覆 $V \to U$ の分岐が D にそって非退化という条件がみたされる．このとき，定理 1.10 の標準単射 ch(1.11) とその一般化 (1.14) の右辺を D に広げることができることに注意する．

x を U の閉点とすると，x は U 上の有限エタール・スキームのなすガロワ圏 (FEt/U) のファイバー関手 $V \mapsto V(x)$ を定め，その自己同形群として基本群 $\pi_1(U, x)$ が定まり，(FEt/U) と射影有限群 $\pi_1(U, x)$ が連続に作用する有限集合のなす圏の間に圏の同値が定まる．U の連結なエタール・ガロワ被覆 V と $\pi_1(U, x)$ の開正規部分群 N の間には自然な 1 対 1 対応があり，同形 $\pi_1(U, x)/N \to \mathrm{Gal}(V/U)$ が定まる．

U 上のスムーズな ℓ 進層のなす圏は $\pi_1(U, x)$ の ℓ 進表現のなす圏と同値であり，U 上の局所定数 $\bar{\mathbf{F}}_\ell$ 層のなす圏は $\pi_1(U, x)$ の連続な $\bar{\mathbf{F}}_\ell$ 上の表現のなす圏と同値である．U 上の局所定数 $\bar{\mathbf{F}}_\ell$ 層 $\mathcal{F}$ と U の連結なエタール・ガロワ被覆 V に対し，$\mathcal{F}$ の V へのひきもどしが定数層であることは，$\mathcal{F}$ に対応する $\pi_1(U, x)$ の連続表現を

M とし V に対応する開部分群を N とすると，M へ N が自明に作用することと同値である．

ξ を D の生成点とし，K を局所体 $\mathrm{Frac}\,\hat{\mathcal{O}}_{X,\xi}$ とする．$\bar\eta\to U$ を K の分離閉包 K_{sep} が定める幾何的点とすると，局所定数 $\bar{\mathbf{F}}_\ell$ 層 $\mathcal{F}$ の $\bar\eta$ でのストーク $M=\mathcal{F}_{\bar\eta}$ は K の絶対ガロワ群 $G_K=\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{sep}}/K)$ の連続 $\bar{\mathbf{F}}_\ell$ 表現を定める．G_K の M への作用が K の有限次ガロワ拡大 L のガロワ群 $G=\mathrm{Gal}(L/K)$ の作用から定まるとする．

暴分岐群 G^{1+} の位数は p 巾で ℓ と素だから，G の作用で安定な M の直和分解

$$M=\bigoplus_{r\geqq 1}M^{(r)} \tag{2.1}$$

で任意の有理数 $r\geqq 1$ に対し G^{r+} 不変部分が $M^{G^{r+}}=\bigoplus_{s\leqq r}M^{(s)}$ をみたすものがただ 1 つ定まる．これを M の**傾き分解**という．

$$\mathrm{dimtot}_\xi M=\sum_{r\geqq 1}r\cdot\dim M^{(r)} \tag{2.2}$$

を M の**全次元**という．$r>1$ なら定理 1.10 より次数商 G^r/G^{r+} は位数が ℓ と素なアーベル群だから，指標による分解

$$M^{(r)}=\bigoplus_{\chi\colon G^r/G^{r+}\to\bar{\mathbf{F}}_\ell^\times,\neq 1}\chi^{\oplus n(\chi)} \tag{2.3}$$

が定まる．

$\bar{\mathbf{F}}_\ell^\times$ の 1 の原始 p 乗根をとり指標 $\chi\colon G^r/G^{r+}\to\bar{\mathbf{F}}_\ell^\times$ を $\mathrm{Hom}(G^r/G^{r+},\mathbf{F}_p)$ の元と考えると，χ が非自明ならその標準単射 (1.14) による像 $ch(\chi)$ が定める単射 $L(-r)\to\Omega^1_{X/k,\xi}\otimes_{\mathcal{O}_{X,\xi}}\bar F$ の像は $\Omega^1_{X/k,\xi}\otimes_{\mathcal{O}_{X,\xi}}\bar F$ の 1 次元部分空間 $L(\chi)$ を定める．X を ξ の近傍でおきかえれば，$L(\chi)$ は余接束 T^*X の D の有限次被覆 $D(\chi)$ 上へのひきもどし $T^*X\times_X D(\chi)$ の部分直線束を定める．以下，これも $L(\chi)$ で表わすことにする．

$j\colon U\to X$ で開うめこみを表わし，特性サイクル $\mathrm{Char}\,j_!\mathcal{F}$ の D 上に台をもつ成分を

$$\mathrm{Char}^{(D)}j_!\mathcal{F}=\dim M^{(1)}\cdot[T^*_DX]+\sum_{r>1}r\sum_{\chi}n(\chi)\cdot\frac{\pi_{\chi*}[L(\chi)]}{[D(\chi):D]} \tag{2.4}$$

で定める．ここで T^*_DX は $D\subset X$ の余法束であり，分母 $[D(\chi):D]$ は被覆 $\pi_\chi\colon D(\chi)\to D$ の次数である．

X の次元が d で $D_1,\dots,D_m$ が $X-U$ の $d-1$ 次元の既約成分のときは，$j_!\mathcal{F}$ の特性サイクルの台の X への像の余次元が 1 以下の部分を

$$\mathrm{Char}^{(\mathrm{codim}\leqq 1)}j_!\mathcal{F}=(-1)^d\Bigl(\mathrm{rank}\,\mathcal{F}\cdot[T^*_XX]+\sum_{i=1}^m\mathrm{Char}^{(D_i)}j_!\mathcal{F}\Bigr) \tag{2.5}$$

で定義する．ここで T^*_XX は余接束 T^*X の零切断を表わす．

例 2.1 記号は例 1.8, 1.11 のとおりとする．1. のときは，

$$\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F} = [T^*_X X] + (n+1)\cdot[T^*_D X]$$

である．このときは $\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}$ はラグランジアンである．2. のときは，

$$\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F} = [T^*_X X] + \begin{cases} n\cdot\langle dy\rangle_D & p=n=2\text{ でないとき} \\ 2\cdot\langle\sqrt{y}dx+dy\rangle_D & p=n=2\text{ のとき}\end{cases}$$

である．$p=n=2$ でないときは $\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}$ はラグランジアンではない．$p=n=2$ のときは $\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}$ はラグランジアンになる． □

2.2 曲線の場合

X をスムーズな代数曲線とし，$U=X-D$ を有限個の閉点からなる閉部分スキーム D の補開部分スキームとする．$x\in D$ とし，$M=\mathcal{F}_{\bar\eta}$ を U 上の局所定数 $\bar{\mathbf{F}}_\ell$ 層が定める局所体 K_x の $\bar{\mathbf{F}}_\ell$ 表現とし，$M=\bigoplus_{r\geqq 1}M^{(r)}$ を (2.1) で定めた傾き分解とする．このとき，

$$\mathrm{Sw}_x\mathcal{F} = \mathrm{dimtot}_x\mathcal{F} - \mathrm{rank}\ \mathcal{F} = \sum_{r\geqq 1}(r-1)\cdot\dim M^{(r)} \tag{2.6}$$

を $\mathcal{F}$ の x での**スワン導手**とよぶ．$\mathrm{Sw}_x\mathcal{F}\geqq 0$ であり，等号は暴分岐群 $P=G^{1+}$ が M に自明に作用することと同値である．ハセ・アルフの定理より，スワン導手 $\mathrm{Sw}_x\mathcal{F}$ したがって全次元 $\mathrm{dimtot}_x\mathcal{F}$ は整数である．

X が曲線の場合は直線 $L(\chi)$ はファイバー $T^*X\times_X x = T^*_x X$ と一致し，(2.4) で定めた余次元 1 の成分は $\mathrm{dimtot}_x\mathcal{F}\cdot[T^*_x X]$ である．よって，特性サイクルは

$$\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F} = -\Big(\mathrm{rank}\ \mathcal{F}\cdot[T^*_X X] + \sum_{x\in D}\mathrm{dimtot}_x\mathcal{F}\cdot[T^*_x X]\Big) \tag{2.7}$$

で定義される．

X が射影的なら，オイラー数について **Grothendieck-Ogg-Shafarevich の公式**

$$\chi_c(U,\mathcal{F}) = (\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}, T^*_X X)_{T^*X} \tag{2.8}$$

がなりたつ [1].

2.3 曲線への制限と局所非輪状性

非特性的な射に対しては，曲線へのひきもどしの特性サイクルや，曲線への射に関する消失輪体は，特性サイクルで統制される．

C を k 上スムーズな代数曲線とし，$i\colon C \to X$ を閉うめこみとする．像 $i(C)$ は D に含まれずしたがって逆像 $i^{-1}(D)$ は有限個の閉点からなるとする．$x \in C \cap D$ とし，特性サイクル $\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}$ の x でのファイバー $(\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}) \cap T^*_x X$ と標準全射の核 $\mathrm{Ker}(i_*\colon T^*_x X \to T^*_x C)$ との共通部分が 0 だけからなるとき，$i\colon C \to X$ は x で $j_!\mathcal{F}$ に関して**非特性的**であるという．$i^{-1}(D)$ のすべての点で非特性的であるとき，$i\colon C \to X$ は非特性的であるという．

$i\colon C \to X$ が非特性的であるとき，特性サイクルのひきもどし $i^*(\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F})$ を交点積 $(\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}, T^*X \times_X C)_{T^*X}$ の全射 $i_*\colon T^*X \times_X C \to T^*C$ による像として定義する．前節の構成の関手性より，非特性的なうめこみによるひきもどしと特性サイクルの構成の整合性がしたがう．

命題 2.2 閉うめこみ $i\colon C \to X$ が $j_!\mathcal{F}$ に関して非特性的であるとする．$\mathcal{F}_C$ を i の制限 $U \cap C \to U$ によるひきもどしとし，$j_C\colon U \cap C \to C$ を開うめこみとすると，

$$\mathrm{Char}\ j_{C!}\mathcal{F}_C = (-1)^{d-1} i^*(\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}) \tag{2.9}$$

がなりたつ． □

非特性的なうめこみはたくさんあるので，命題 2.2 によって特性サイクルの余次元 $\geqq 1$ の成分は特徴づけられる．

$f\colon X \to C$ を k 上スムーズな代数曲線への射とし，$v \in C$ を閉点とする．$C_v = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}^h_{C,v}$ を C の v での強局所化とし，$\bar{j}_v\colon \bar{\eta}_v \to C_v$ を $\mathcal{O}^h_{C,v}$ の分数体の分離閉包が定める幾何的点とする．$i_v\colon X_v = f^{-1}(v) \to X \times_C C_v$ を閉うめこみとし，記号を流用し $\bar{j}_v$ のベース・チェンジも $\bar{j}_v\colon X_{\bar{\eta}_v} \to X \times_C C_v$ で表わす．X 上のエタール層 $\mathcal{F}$ に対し，**隣接輪体**の複体 $\psi_v(\mathcal{F}, f)$ は $i_v^* R\bar{j}_v \mathcal{F}$ で定義される．C のすべての閉点 v に対して標準射 $\mathcal{F}|_{X_v} \to \psi_v(\mathcal{F}, f)$ が同形であるとき，$f\colon X \to C$ は $\mathcal{F}$ に関して**局所非輪状**であるという．

特性サイクル $\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}$ の $df\colon T^*C \times_C X \to T^*X$ による逆像が零切断に含まれるとき，$f\colon X \to C$ は $j_!\mathcal{F}$ に関して**非特性的**であるという．

命題 2.3 k 上のスムーズな曲線へのスムーズな射 $f\colon X \to C$ が $j_!\mathcal{F}$ に関して非特性的であるとする．このとき，$f\colon X \to C$ は $j_!\mathcal{F}$ に関して局所非輪状である． □

命題 2.3 は X が曲面の場合に帰着させて証明する．X が曲面の場合には，C のすべての閉点 $v \in C$ に対しファイバーの閉うめこみ $X_v \to X$ が $j_!\mathcal{F}$ に関して非特性的となるので，曲線への制限についての命題 2.2 と Deligne と Laumon による局所非輪状性 [2] よりしたがう．

2.4 Radon 変換

特性サイクルの閉点でのファイバーの係数を，ラドン変換の双対超平面にそった分岐の不変量として定義する．

X を射影的でスムーズな代数多様体とし，$\mathcal{L}$ を X 上の強アンプルな可逆層とする．$\mathbf{P} = \mathbf{P}(E^\vee) = \{E$ の超平面$\}$ を $E = \Gamma(X, \mathcal{L})$ の双対にともなう射影空間とし，$X \to \mathbf{P}$ を $\mathcal{L}$ が定める閉うめこみとする．$\mathbf{P}^\vee = \{\mathbf{P}$ の超平面$\}$ を $\mathbf{P}$ の双対射影空間とし，普遍超平面 $\mathbf{H} = \{(x, H) \in \mathbf{P} \times \mathbf{P}^\vee \mid x \in H\}$ を標準単射 $\Omega^1_{\mathbf{P}} \to E \otimes \mathcal{O}(-1)$ により，余接束 $T^*\mathbf{P}$ にともなう $\mathbf{P}$ 上の射影空間束 $\mathbf{P}(T^*\mathbf{P})$ と同一視する．

$X \subset \mathbf{P}$ の逆像 $X \times_{\mathbf{P}} \mathbf{H}$ は普遍超平面切断 $\{(x, H) \in X \times \mathbf{P}^\vee \mid x \in H\}$ であり，X 上の射影空間束 $\mathbf{P}(X \times_{\mathbf{P}} T^*\mathbf{P})$ である．X 上のエタール層 $\mathcal{F}$ に対しそのラドン変換は射影

$$\begin{array}{ccc} X \times_{\mathbf{P}} \mathbf{H} & \xrightarrow{p} & \mathbf{H} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

により，

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}}\mathcal{F} = Rq_*p^*\mathcal{F}$$

として定義される．

以下 X は射影的でスムーズな代数曲面とし，$j\colon U \to X, \mathcal{F}$ なども前節のとおりとする．D の閉点の有限集合 Σ を，$\mathcal{F}$ の D にそった分岐が Σ の外では非退化となるようにとる．$j_!\mathcal{F}$ の**特異台** $SS(j_!\mathcal{F}) \subset T^*X$ を，$\mathrm{Char}^{(\mathrm{codim} \leqq 1)} j_!\mathcal{F}$ の台の閉包と，$\bigcup_{x \in \Sigma} T^*_x X$ の合併とする．

$SS(j_!\mathcal{F})$ の既約成分は 2 次元で T^*X の錐的な部分多様体である．$SS(j_!\mathcal{F})$ の既約成分 T に対し，その標準全射 $X \times_{\mathbf{P}} T^*\mathbf{P} \to T^*X$ による逆像の射影化を $P(T) \subset \mathbf{H} = \mathbf{P}(X \times_{\mathbf{P}} T^*\mathbf{P})$ で表わす．$\dim P(T) = \dim \mathbf{P}^\vee - 1$ である．

補題 2.4 $\mathcal{L}$ を X 上の強アンプルな可逆層とする．

1. $\mathcal{L}$ が次の条件 (L) をみたすとする．

(L)：X の任意の相異なる 2 点 u, v に対し標準写像

$$E = \Gamma(X, \mathcal{L}) \to \mathcal{L}_u/\mathfrak{m}_u^2\mathcal{L}_u \oplus \mathcal{L}_v/\mathfrak{m}_v^2\mathcal{L}_v \tag{2.10}$$

は全射である．

このとき，$SS(j_!\mathcal{F})$ の既約成分 T に対し，$P(T)$ の像 $p(P(T))$ の余次元が 2 以上であるか $P(T) \to p(P(T))$ の関数体の拡大は純非分離である．さらに T と T' が相異なる既約成分で $P(T) \to p(P(T))$ と $P(T) \to p(P(T))$ の関数体の拡大が有限次ならば $p(P(T)) \neq p(P(T'))$ である．

2. $\mathcal{L}$ を十分大きい巾 $\mathcal{L}^{\otimes n}$ で置き換えれば，上の条件 (L) はみたされる． □

命題 2.5 X 上の強アンプルな可逆層 $\mathcal{L}$ が補題 2.4 の条件 (L) をみたすとする．このとき，ラドン変換 $\mathcal{R}_{\mathcal{L}} j_!\mathcal{F}$ の分岐因子 $\subset \mathbf{P}^\vee$ の既約成分は，$SS(j_!\mathcal{F})$ の既約成分 T の逆像の射影化の像 $p(P(T))$ に限る． □

証明は命題 2.3 と同様で Deligne-Laumon の局所非輪状性からしたがう．

$x \in \Sigma$ の双対超平面 $H_x = \{H \in \mathbf{P}^\vee \mid x \in H\} \subset \mathbf{P}^\vee$ の生成点を ξ_x とし，$a_{\xi_x}(\mathcal{R}_{\mathcal{L}} j_! \mathcal{F}) = \mathrm{dimtot}_{\xi_x}(\mathcal{R}_{\mathcal{L}} j_! \mathcal{F}) - \dim(\mathcal{R}_{\mathcal{L}} j_! \mathcal{F})_{\bar{\xi}_x}$ とおく．特性サイクル Char $j_!\mathcal{F}$ のファイバー $T^*_x X$ の係数を $-a_{\xi_x}(\mathcal{R}_{\mathcal{L}} j_! \mathcal{F})$ として定義する．

3 未解決問題

1. 関手性．固有射による順像．一般の射によるひきもどし．
2. 高次元化．3 次元以上での定義．
3. 特性類との関係．
4. Swan 類との関係．
5. 整数性，有界性．Hasse-Arf の定理の高次元化．純非分離次数の上限．
6. 具体例の計算．非アーベルな場合．
7. 混標数．

...

参考文献

[1] A. Grothendieck, rédigé par I. Bucur, *Formule d'Euler-Poincaré en cohomologie étale*, Cohomologie ℓ-adique et Fonction L, SGA 5, Springer Lecture Notes in Math. 589 (1977), 372-406.

[2] G. Laumon, *Semi-continuité du conducteur de Swan (d'après Deligne)*, Astérisque 82-83 (1981), Séminaire ENS (1978-1979) Exp. n° 9, 173-219.

[3] ——, *Caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux constructibles sur une surface*, Astérisque 101-102 (1983), 193-207.

[4] J.-P. Serre, Corps Locaux, Hermann, Paris.

[5] T. Saito, *Wild ramification and the cotangent bundle*, `arXiv:1301.4632`

[6] ——, *Characteristic cycle and the Euler number of a constructible sheaf on a surface*, `arXiv:1402.5720`