数学への距離感は縮められるか？

東京大学数理科学研究科　　斎藤　毅

2022 年 11 月 20 日

はじめに

2021 年 1 月に京都大学の望月拓郎先生が，朝日賞を受賞されました．その業績を紹介する記事の一部を読んでみましょう．

> 望月さんが駆使したのが、数学の各分野を横断する理論だ。数学には方程式を扱う「代数」、図形や空間を扱う「幾何」、微分・積分を扱う「解析」の 3 分野がある。幾何と解析が重なる側面から「調和バンドル」を、代数と解析が重なる側面から「ツイスター D 加群」をそれぞれ研究。二つの理論を組み合わせて予想を証明した。
> (朝日新聞 2021 年 1 月 1 日)

いかがですか？工夫をこらして書かれた文章と思いますが，それでもこの記事に限らず，現代の数学の先端のニュースをみると，それが何についての話なのか，うまく想像できないと感じることはありませんか？

数学者にとって，どんなものを研究しているのかと聞かれたときに，ひとに説明するのは難しいことです．これが，例えば物理学や生物学だったら，重力波や DNA といわれれば，何の話かなんとなくわかるような気がしませんか？この違いはどこからくるのでしょう？

小学校の算数から考えれば，高校までに数学についてたくさんのことを学びます．小学校では，$1+1=2$ からはじまって，九九などの四則演算や分数など，数とその演算を学びます．3 角形や円などの図形も教わります．中学校では，負の数や文字式，関数とそのグラフも学びます．高校になると，ベクトルや微積分もありました．数学について，これだけ多くのことを知っているのに，なぜ何の話をしているのかすら通じにくいのでしょう？

それは，現代の数学は抽象的に対象を創りだすことによって，独自の固有の世界を広げてきたからだと思います．数学はそもそものはじめから抽象的な学問ですが，20 世紀に入りさらに抽象的な方向へ大きく転換しました．抽象的な対象を厳密に扱うことばを手にいれたことにより，数学固有の研究対象を次々と発見し，固有の世界を広げてきました．

同じ時代に，物理学や生物学でも，量子力学や分子生物学が成立したことにより，同じように大きな変貌を遂げています．ただしこれらの自然科学では，扱う対象に物理的な実体があるために，それらを扱う方法がまったくわからなかったとしても，何の話をしているのか想像ができないということにはならないのだと思います．

大学で数学を学び始めると，まず「集合と位相」のような科目で，この抽象化された対象を扱う言語の役割をするものを学びます．それでさっきの記事に出てきた「代数」「幾何」「解析」などの分野の基礎を学ぶ準備ができて，何の話をしているのかがわかるようになってきます．

きょうはこれから，なぜ数学は 20 世紀に大きく転換したのか，どのように転換したのかを，高校までで学ぶ数学の中から題材を選びながら解説してみます．先端で何を研究しているのかの話はしないので，きょうの話を聞いた後でもニュースを読んで何の話をしているのか，残念ながらわかるようにはならないと思います．なぜ数学者はわからない話を考えるようになったのか，がわかってもらえればきょうのお話の目的は達したことになります．

具体的には，

$$(\text{数と図形}) \Rightarrow (\text{非ユークリッド幾何学}) \Rightarrow (\text{集合と構造}) \Rightarrow (\text{圏})$$

という図式に沿ってお話ししていきます．

『原論』から多様体まで

数学のはじまりを数のはじまりと考えると，数学の歴史は人類の歴史とともに始まるといえそうです．古代メソポタミアの楔形文字が書かれた粘土板にもピタゴラスの定理に関係したものがあるそうです．

ほかの自然科学とは異なる数学の特徴は，自然科学は実験や観察に基礎をおくのに対し，数学は証明に基礎をおくことにあります．自然科学の理論は実験や観察された事実と整合的かどうかで確かめられるのに対し，数学の理論は証明されることで確立されます．

このような特徴をもつ学問としての数学が成立したのが古代ギリシャでした．古代ギリシャでは，数の性質を扱う数論や，図形の性質を調べる幾何学が大きく発展しました．これを体系的に記述した文献がエウクレイデス（生没年不詳，紀元前 3 世紀）の『原論』です。

直角 3 角形のピタゴラスの定理を中学校で教わりますが，これも『原論』に書いてあります．これを使うと，正方形の辺の長さと対角線の長さの比は $\sqrt{2}$ であることがわかります．この $\sqrt{2}$ が有理数ではないことを高校で学びました．このことは古代ギリシャでも知られていました．そうすると，有理数ではない実数とは何かという疑問が浮かびます．この問題は，エウドクソス（生没年不詳，紀元前 4 世紀）という数学者によって解決されましたが，その理論は『原論』によって後世に伝わりました．

『原論』は，体系的な本の模範として数学に限らず後世の学問に計り知れない影響を与えました.『原論』の記述の特徴は，はじめに理論の前提となるいくつかの公理が設定され，それだけに基づいて定理が順々に証明されていくという論理的な構成にあります．

その幾何学の公理の 1 つに，平行線の公理とよばれるものがあります．これは，

「点 P が直線 l 上になければ，P をとおり l と平行な直線がただ 1 つある」

と言い換えられるものです．ほかの公理はたとえば

「2 点 P, Q をとおる直線がただ 1 つある」

というような見るからにあたりまえのものなのに対し，平行線の公理はだいぶ複雑なので，この公理はほんとうに必要なものなのか，ほかの公理から導くことはできないのか、ということが問題になりました．

この問題は 19 世紀に解決されました．この解決の歴史は込み入っていてそれ自体おもしろいのですが，きょうはそこには立ち入りません．問題そのものに戻ると，平行線の公理が成り立つ幾何学もあるし，それを

「点 P が直線 l 上にないとしても，P をとおり l と平行な直線は 1 つもない」

という公理で置き換えた幾何学もあり，また

「点 P が直線 l 上になければ，P をとおり l と平行な直線が無限個ある」

という公理で置き換えた幾何学もあるということがわかりました．このようにいろいろな幾何学があることがわかったので,『原論』に書かれた幾何学は著者エウクレイデスの名前の英語読みからユークリッド幾何学とよばれるようになり，それ以外のものは非ユークリッド幾何学とよばれることになりました．

非ユークリッド幾何学のうちで,「点 P が直線 l 上になければ，P をとおり l と平行な直線が無限個ある」がなりたつものは双曲型非ユークリッド幾何学とよばれます．この双曲型非ユークリッド幾何学では,『原論』の公理のうち平行線の公理以外はすべてなりたちます．このことから，平行線の公理を『原論』のほかの公理から導くことはできないということに決着しました．

非ユークリッド幾何学の発見により，それまでは 1 つしかないと思われていた幾何学が実はたくさんあることがわかりました．そうなると，幾何学の対象とは何か，という疑問が浮かびます．

現在では新しい発見があるとそれはすぐに世界中に広まりますが，19 世紀にはそうではありませんでした．なので，この非ユークリッド幾何学の発見をそのとき知っていたかどうかはよくわからないそうなのですが，1854 年にリーマン（1826–1866）は『幾何学の基礎をなす仮説について』(菅原正巳訳，ちくま学芸文庫）という講演で，幾何学の新しい世界の展望を示しました．

そこでリーマンは，ユークリッド幾何学の 3 次元空間は「三重に広がったもの」の特別な場合にしか過ぎない，と指摘しました．そしてさまざまな「n 重に広がったもの」が構成できることを示して，高次元の未知の対象がたくさんあることを明らかにし，それこそがこれからの幾何学の研究対象であると主張しました．

このリーマンの発見は数学史上第一級のものです．この発見は，幾何学の対象を現実の空間から解放し，新しい時代を開きました．現代の幾何学はその発展といえます．3 次元のユークリッド空間は，現実の物理的な空間を抽象的に理想化したものと考えられていましたが，リーマンが発見した幾何学の対象は，ほかの自然科学とは独立した存在理由をもつ，数学固有の研究対象です．これは現在は多様体とよばれています．

座標を考えることで，数の組を使って平面や空間の点を表すことができます．4 次元以上の空間を想像するのは難しいですが，数をいくつかならべるだけで何次元の空間の点でも表すことができます．多様体というのは，局所的に座標が定義された空間です．座標と局所的に考える方法とを組みあわせることで，簡単なものをよせあつめる構成により何次元でもいくらでも複雑な空間を作り出すことができて，そこに未知の世界が広がっている

こと，そしてその世界を探索するのがこれからの数学の課題であること，をリーマンは発見しました．

現実の物理的な空間をどうとらえるかは，数学ではなく物理学の問題であるということになります．そののち 20 世紀になってから，重力と電磁気力を統合するアインシュタインの一般相対性理論では，リーマンの発見した幾何学が使われました．

集合と構造

リーマンの時代には，彼が発見した幾何学の対象を数学的に厳密に記述することばがまだありませんでした．19 世紀後半から 20 世紀はじめにかけて集合と位相空間のことばが整備され，多様体を数学的に厳密に定義できるようになりました．

集合についての基本的な用語や記号は，今は高校 1 年で学ぶようですが，小学校 4 年生に教えられた時期がありました．ちょうど私はその最初の年にあたったようで，先生も戸惑いながら教えていたような記憶があります．あまり評判がよくなかったのか，数年で取りやめになったようです．

数学の基礎づけとしての集合の役割の最初の例が，デデキント（1831-1916）による実数の定義でした．数直線を考えることにより，実数は直線上の点と 1 対 1 に対応します．しかし，直線を現実の物理的な直線を理想化したものと考えることができなくなったので，実数を数学的に厳密に定義することが必要になります．

デデキントは自然数を既知のものとすれば，それと集合を組み合わせることで実数が得られることを示しました．自然数を出発点として，小学校で分数を，中学校で負の数を考えたように，有理数を構成することができます．そこで，実数 r とは，r 以下の有理数全体の集合のことである，と考えれば実数を集合のことばでとらえることができる，というのがデデキントの切断による実数の定義でした．これは,『原論』に書かれたエウドクソスの理論を，集合のことばで定式化したものです．

数学の対象は，1 つ 1 つの数や関数あるいは図形から，数の体系や空間全体へと焦点が移りました．これらは，ほかの自然科学とは独立した存在理由をもつ数学固有の研究対象です．19 世紀後半には，多様体のほかにも，数学固有の対象が次々と発見されました．これらも集合と位相のことばで数学的に厳密にとらえることができます．

このことによって，数学を基礎づける共通言語としての集合と位相の位置づけが確立しました．そしてこれが，数学の 20 世紀における抽象的な方向への転換ももたらしました．大学の数学科では，まずこの共通言語を習得するために集合と位相を学ぶことになります．

多様体は幾何的な対象ですが，他の数学固有の対象の例として，代数的な対象の例を紹介します．わり算では 0 でわることができないことを小学校で教わりますが，実数全体の集合 $\mathbf{R}$ を考えると，逆に 0 以外の数ならわり算ができます．一方整数全体の集合 $\mathbf{Z}$ では，わり算以外はいつもできますが，あまりを考えないとすると，わる数が 0 でなくてもわり算ができるとは限りません．このような演算の性質を代数的な性質といいますが，数の集合を考えると，どの集合を考えるかによって，その代数的な性質が違うことがわかります．

このように考えるとき，実数全体の集合 $\mathbf{R}$ や整数全体の集合 $\mathbf{Z}$ はただの集合と考えているのではなく，そこに加法 $+$ や乗法 $\cdot$ などの演算が定まっているものと考えています．こ

のように集合の上に定められているものを，その集合の構造とよびます．加法 $+$ や乗法 $\cdot$ は代数的な構造の例になります．多様体は，幾何的な構造とよばれる別の種類の構造が定まった集合です．

このように，構造が定められた集合という視点から，19 世紀以降に続々と発見された数学固有の研究対象をすべてとらえることができます．これが 20 世紀なかばに，現代数学の基礎全般を体系的に記述するという現代の『原論』を目指して，パリで結成された数学者の集団ブルバキ（1935–）の主張でした．この視点から『数学原論』（齋藤正彦，森毅ほか訳，東京図書）を書くことでブルバキは，数学の抽象的な方向への転換を主導する歴史的な役割を果たしました．

集合と構造という抽象的な世界の構築に適したことばを手にしたことで，数学者は数学固有の研究対象を次々と発見し，数学の世界を広げていきました．望月先生の記事にでてきた「調和バンドル」や「ツイスター D 加群」もそのような研究対象です．

数学と創造ということばは結びつきにくいかもしれませんが，20 世紀は数学が抽象的な方向へ新しい世界を創りだすことによって，爆発的ともいえる勢いで展開した時代でした．証明に基礎をおくことを数学の特徴としてあげましたが，集合と位相という抽象的な構成に適した厳密なことばを手にいれたことにより，現実の世界にしばられずに，数学の世界を自由に構築していったのです．フェルマーの最終定理は 3 世紀以上の時を経て，20 世紀末に解決されましたが，これもこのような抽象的な発展の上に得られた成果でした．

数学の内的な動機によって自律的に構成された抽象的な対象は，その定義を読んでも記号の羅列にしか見えないものです．しかし，その対象についてあれこれと考え続けていると，いつのまにか目の前のコーヒーカップや猫よりも確かな実体感が生まれてきます．コーヒーカップはいつかは割れてしまうかもしれないし，猫も気が変わればどこかへ行ってしまうかもしれません．しかし，慣れ親しんだ数学的対象なら，一度証明した性質はいつも変わらずそこにあります．

こういう感覚に慣れてくると，実体感という意味では，抽象的に構成された数学の対象も，宇宙の果ての銀河系や極微の世界の素粒子，DNA やアミノ酸といった，現代の物理学や生物学の対象と何も変わるところはないと思えるようになってきます．それどころか，特別な実験装置や観測機器を使わなくても，ちょっと考えるだけで再現できる数学の対象の方が，よほど確実な存在であるように思えてきます．

だいぶ話が怪しくなってきたので，集合と構造に戻ります．集合と構造は，数学的な対象の作り方に着目したものといえます．現代の数学の論理的な基礎は集合論に置かれています．そこで数学的な対象を構成するには，まずそれを集合として構成し，そこに構造を定義するという手続きをとります．

しかし，数学の対象を理解するには，その構成法を知るだけでは不十分です．できあがった対象がどのような働きをするかも知る必要があります．そこに着目するのがブルバキが『数学原論』を書いていたのとほぼ同時代に構築された圏の理論です．

圏

圏論では，数学の対象１つ１つに着目するのではなく，それと似た対象を全部一まとめにしてとらえ，１つの対象をほかの対象との関わりのなかで理解します．そのために写像というものを使います．写像は高校では教わりませんが，関数を集合のことばで一般化したもので，集合と集合をつなぐものです．

構造をもった集合どうしの関係は，集合から集合への写像として与えられます．写像ならなんでもよいわけではなく，構造と相性のよい写像だけを考えます．構造と相性のよい写像のことを，射（しゃ）とよびます．

圏とは，１つの種類の対象すべてに，それらの間の射もすべてあわせて考えたものです．このように，射を考えることで，圏論的視点では，構造つきの集合という１つ１つの対象から，それらの間の射へと注目する焦点が移動します．数学の対象の変化に着目すると，

（個々の数や図形）$\Rightarrow$（数の体系や空間）
$\Rightarrow$（構造つきの集合とその間の射をひとまとめにしたもの）

のような図式が描けます．１つめの矢印では個々の元や部分集合から全体の集合へ，２つめの矢印では集合から写像へと焦点が移動しています．

この圏論的な考え方の起源の一つをガロワ理論にさかのぼることができます．ガロワ理論は方程式の理論ということができます．２次方程式の解き方は中学で学びます．数学者はもっと難しい方程式の解き方を研究しているわけではありません．それは方程式を実際に解かなくてもその方程式の解の性質を調べられる理論があるからです．それがガロワ理論です．

ガロワ理論では，方程式を調べるために，その解を使ってできる集合に加減乗除の四則演算が定める代数的な構造を与えたものを考えます．これを体（たい）とよびます．ガロワ（1811-1832）が発見したことは，方程式の解の性質は，その方程式のガロワ群を調べればわかるというものでした．方程式のガロワ群とは，その方程式の解がさだめる体からそれ自身への射全体を集めたものです．

このように考えると，体という構造つきの集合は，その射全体という方程式の解を支配しているガロワ群という主役をとらえるための手段という補助的なものとして現れていることがわかります．これが，圏論的な考え方の起源の一つをガロワ理論にさかのぼることができるという理由です．

フェルマーの最終定理はガロワ理論も使って証明されました．フェルマーの方程式の解が存在しないことを証明したいのですが，それには背理法を使います．解が存在したと仮定して，矛盾を導くという方法です．解が存在したとすると，その解を係数とする方程式を考えることで，楕円曲線という幾何学的な対象が得られます．その楕円曲線を使うと別の方程式を作りだすことができて，ガロワが考えたような体が得られます．この体が実は存在しないことを保型形式とよばれる別の対象を使って証明するというのが，証明のあらすじです．このように，数学者が発見してきた，数学固有の研究対象がいくつも必要だったというのが，解決までに３世紀以上の時間が必要だった理由だと思います．

おわりに

1つのものを調べるには，それを単独で調べるよりも，それとよく似たものと比較して，類似点や相違点に着目する方法が有効です．圏論的な考え方の有効性は，この一般的な方法論にもとづいているといえるかもしれません．例えていえば，集合と構造の視点は，ヒトには，目があり口があり，手も足もあるというような見方です．それに対し，圏の視点は，その人を知るためには，その人のほかの人との関わりに着目するというところでしょうか．

望月先生の理論でも，「調和バンドル」や「ツイスターD加群」を1つ1つ考えるのではなく，それぞれを全部一まとめにした圏を考えます．そうすることで今度は，その圏のあいだの関係に着目することができるようになります．

おつかれさまでした．数学に対する距離感が縮められているとよいのですが．最後までお聞きいただき，ありがとうございました．

参考文献

[1] ことばを創り、世界を創る（数学を創る–数学者達の挑戦（2009年度　学術俯瞰講義）第3回 数の体系を創る．

https://ocw.u-tokyo.ac.jp/lecture_760/

[2] 斎藤　毅，抽象数学の手ざわり–ピタゴラスの定理から圏論まで岩波科学ライブラリー，岩波書店　2021.

[3] サイモン・シン，フェルマーの最終定理　新潮文庫　2006.