12/2

帰結 2 スムーズ閉部分スキームのうめこみ $j: V \to X$ によるひきもどしと交点積は両立。

$j^*[Z] = [j^!Z] \in H^{2c}_{j^{-1}Z}(V, \mathbb{Z}_\ell(c))$

法束への変形

$X = \mathrm{Spec} A$, V が I で定義されるとすると，$C = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n-1}$.

N を法束 $N_{V/X}$，$C = C_{V\cap Z/Z} \subset N_{V/X}$ を法錐とする。

$j^!Z = (V, Z) \in CH_{\dim V - c}(Z\cap V)$ は, $[C] \in Z_{\dim V}(N_{Z\cap V})$ の像 $CH_{\dim V}(N_{Z\cap V}) \leftarrow CH_{\dim V-c}(Z\cap V)$ として定義される.

$\tilde{X}$: $X \times \mathbb{A}^1$ の $V \times \{0\}$ での爆発。

$\tilde{Z}$: $Z \times \mathbb{A}^1$ の固有変換$=$ $Z\times \mathbb{A}^1$ の $(Z\cap V)\times\{0\}$ での爆発。

$X = \mathrm{Spec} A$, V が I で定義されるとすると，$\tilde{X}$ は $\mathrm{Proj}\ \bigoplus_n (I+(t))^n \supset \mathrm{Spec}\ \sum_n \frac{(I+(t))^n}{t^n}$.

$\tilde{A} = \sum_n \frac{(I+(t))^n}{t^n} = \bigoplus_{n>0} \frac{I^n}{t^n} \oplus \bigoplus_{n\geq 0} At^n$

$\tilde{A}[t^{-1}] = A[t, t^{-1}]$.

$\tilde{A}/t\tilde{A} = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n-1}$.

$[\tilde{Z}] \in H^{2c}_{\tilde{Z}}(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\ell(c))$

$\tilde{j}^*[\tilde{Z}] \in H^{2c}_{(Z\cap V)\times\mathbb{A}^1}(V\times\mathbb{A}^1, \mathbb{Z}_\ell(c))$

は $t=1$ では

$j^*[Z] \in H^{2c}_{Z\cap V}(V, \mathbb{Z}_\ell(c))$

$t = 0$ では

$j^*[C] \in H^{2c}_{Z\cap V}(V, \mathbb{Z}_\ell(c))$ は $[C] \in H^{2c}_{N_{Z\cap V}}(N, \mathbb{Z}_\ell(c))$ のこと.

ここで N は法束 $N_{V/X}$，$C = C_{V\cap Z/Z} \subset N_{V/X}$ は法錐。

系：交点積とサイクル類の両立性

$[Z\times Z'] \in H^{2(c+c')}_{Z\times Z'}(X\times X, \mathbb{Z}_\ell(c+c'))$

$\Delta: X \to X\times X$ によるひきもどし

$\Delta^*([Z\times Z']) = [Z\cdot Z'] \in H^{2(c+c')}_{Z\cap Z'}(X, \mathbb{Z}_\ell(c+c'))$

Lefschetz 跡公式

X F 上固有スムーズ、d 次元.

$\Gamma \subset X\times X$ d 次元の閉部分スキーム.

$[\Gamma] \in H^{2d}(X\times X, \mathbb{Z}_\ell(d))$ サイクル類.

$\Gamma^*\alpha = pr_{1*}\circ([\Gamma]\cup pr_2^*\alpha)$ $H^q(X, \mathbb{Q}_\ell)$ の自己準同型.

$\Gamma^* = p_{1*}\circ p_2^*$.

Lefschetz 跡公式

$$\mathrm{Tr}(\Gamma^*: H^*(X_{\bar{F}}, \mathbb{Z}_\ell)) = \deg(\Delta, \Gamma)_{X\times X}.$$

[証明] 抽象 Lefschetz 跡公式より，右辺は Tr $\Delta^*([\Gamma])$. 交点積とサイクル類の両立性より，$\Delta^*([\Gamma]) = \mathrm{cl}\ (\Delta, \Gamma)_{X\times X}$. したがって，主張は次数射とトレース射の両立性よりしたがう.

開多様体の Lefschetz 跡公式。

抽象跡公式.

U を F 上の d 次元スムーズスキームとする．X をコンパクト化とする．$\gamma \in H^{2d}(X \times X, j_{1!}Rj_{2*}\mathbb{Q}_\ell(d))$ に対し，自己準同型 $\gamma^*: H^q_c(U, \mathbb{Q}_\ell) \to H^q_c(U, \mathbb{Q}_\ell)$ を，合成

$$H^q_c(U, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{pr_2^*} H^{2d}(X \times X, j_{2!}\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\gamma\cup} H^{2d+q}(X \times X, (j \times j)_!\mathbb{Q}_\ell(d)) = H^{2d+q}_c(U \times U, \mathbb{Q}_\ell(d)) \xrightarrow{pr_{1*}} H^q_c(U, \mathbb{Q}_\ell)$$

と定義する．このとき

$$\sum_{q=0}^{2d}(-1)^q \mathrm{Tr}(\gamma^* : H^q_c(X, \mathbb{Q}_\ell)) = \mathrm{Tr}(\Delta_X^*(\gamma)).$$

$\Gamma \subset U \times U$　次元 d の閉部分多様体.

$[\Gamma] \in H^{2d}(X \times X, j_{1!}Rj_{2*}\mathbb{Z}_\ell(d))$ は無条件には定義されない.

仮定：$D \times X \cap \bar{\Gamma} \subset X \times D \cap \bar{\Gamma}$.

この条件は次のように言い換えられる.

$p_2 : \Gamma \to U$ が固有.

$\bar{\Gamma} \cap X \times U = \Gamma$.

このとき，$\Gamma \subset X \times U$ は閉部分多様体であり，

$$\begin{aligned} [\Gamma] &\in H^{2d}_\Gamma(X \times U, \mathbb{Z}_\ell(d)) = H^{2d}_\Gamma(X \times U, j_{1!}\mathbb{Z}_\ell(d)) \\ &\to H^{2d}(X \times U, j_{1!}\mathbb{Z}_\ell(d)) = H^{2d}(X \times X, j_{1!}Rj_{2*}\mathbb{Q}_\ell(d)) \end{aligned}$$

が定義される.