1/13

Can not replace $\tilde{\Gamma}' \cap D^{(1)\prime} \subset \tilde{\Gamma}' \cap D^{(2)\prime}$ by $\tilde{\Gamma} \cap D^{(1)} \subset \tilde{\Gamma} \cap D^{(2)}$.

Example 1. $X = \mathbb{P}^1$, $U = \mathbb{A}^1$, $F : U \to U$ Frobenius. $\Gamma = \Gamma_F$

Then, $\mathrm{Tr}(F^* : H_c^*(U, \mathbb{Q}_\ell)) = p$ and $(\Gamma, \Delta)_{(X \times X)'} = p$. On the other hand, $\mathrm{Tr}(F_* : H_c^*(U, \mathbb{Q}_\ell)) = 1$ and $(\Gamma^t, \Delta)_{(X \times X)'} = p$.

Example 2. $X = \mathbb{P}^1$, $U = \mathbb{A}^1$, $\sigma : U \to U$ defined by $x \mapsto x + 1$. $\Gamma = \Gamma_\sigma$.

Then, $\mathrm{Tr}(\sigma^* : H_c^*(U, \mathbb{Q}_\ell)) = 1$ and $(\Gamma, \Delta)_{(X \times X)'} = 1$. There is an intersection at ∞. $t = \frac{1}{x} \mapsto \frac{1}{\frac{1}{t}+1} = \frac{t}{1+t}$. $\frac{s}{1+s} - t = t \cdot \frac{u-(1+ut)}{1+ut}$.

Trace formula から dimension formula へ $\mathcal{F}$ が $G = \mathrm{Gal}(V/U)$ の表現 M に対応するとすると，$\mathcal{F} = f_* M^G = (f_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell \otimes M)^G$. したがって，$H_c^q(U, \mathcal{F}) = (H_c^q(V, \mathbb{Q}_\ell) \otimes M)^G$. よって，

$$\chi_c(U, \mathcal{F}) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \mathrm{Tr}(\sigma : H_c^*(V, \mathbb{Q}_\ell)) \cdot \mathrm{Tr}(\sigma : M).$$

$$\chi_c(U, \mathcal{F}) - \mathrm{rank}\mathcal{F} \cdot \chi_c(U) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \mathrm{Tr}(\sigma : H_c^*(V, \mathbb{Q}_\ell)) \cdot (\mathrm{Tr}(\sigma : M) - \mathrm{rank}\mathcal{F})$$

$$= \frac{1}{|G|} \left(\sum_{\sigma \neq 1} \mathrm{Tr}(\sigma : H_c^*(V, \mathbb{Q}_\ell)) \cdot \mathrm{Tr}(\sigma : M) - \sum_{\sigma \neq 1} \mathrm{Tr}(\sigma : H_c^*(V, \mathbb{Q}_\ell)) \cdot \mathrm{rank}\mathcal{F} \right).$$

$(\dim(V \otimes W)^G = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \mathrm{Tr}(\sigma : V) \cdot \mathrm{Tr}(\sigma : W).)$

Brauer trace. 一般の場合。$\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_0 \otimes \bar{\mathbb{F}}_\ell$ は $G = \mathrm{Gal}(V/U)$ の表現 $\bar{M}$ に対応するとする．$\bar{\mathcal{F}} = f_* \bar{M}^G = (f_* \bar{\mathbb{F}}_\ell \otimes \bar{M})^G$. したがって，$R\Gamma_c(U, \mathcal{F}) = R\Gamma(G, (R\Gamma_c(V, \mathbb{F}_\ell) \otimes M))$. よって，

$$\chi_c(U, \mathcal{F}) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G^\ell} \mathrm{Tr}(\sigma : H_c^*(V, \mathbb{Q}_\ell)) \cdot \mathrm{Tr}^{Br}(\sigma : M).$$

ここで，$G^\ell = \{\sigma \in G | \sigma$ の位数は ℓ と素 $\}$ $\mathrm{Tr}^{Br}(\sigma : M)$ は σ の固有値の Teichmuller リフトの和．($R\Gamma_c(V, \mathbb{F}_\ell)$ は $\mathbb{Z}_\ell[G]$ 加群の完全複体．$\dim(V \otimes W)^G = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \mathrm{Tr}(\sigma : V) \cdot \mathrm{Tr}^{Br}(\sigma : W)$.)

$$\chi_c(U, \mathcal{F}) - \mathrm{rank}\mathcal{F} \cdot \chi_c(U)$$
$$= \frac{1}{|G|} \left(\sum_{\sigma \neq 1, \in G^\ell} \mathrm{Tr}(\sigma : H_c^*(V, \mathbb{Q}_\ell)) \cdot \mathrm{Tr}^{Br}(\sigma : M) - \sum_{\sigma \neq 1, \in G^\ell} \mathrm{Tr}(\sigma : H_c^*(V, \mathbb{Q}_\ell)) \cdot \mathrm{rank}\mathcal{F} \right).$$

Swan 類。したがって、$s_{V/U}(\sigma)$ を $-\mathrm{deg} s_{U/V}(\sigma) = \mathrm{Tr}(\sigma : H_c^*(V, \mathbb{Q}_\ell))$ をみたすように定義してやれば，$s_{V/U}(1) = -\sum_{\sigma \neq 1, \in G^\ell} s_{V/U}(\sigma)$ とおき，

$$\mathrm{Sw}\mathcal{F} = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G^\ell} s_{V/U}(\sigma) \cdot \mathrm{Tr}^{Br}(\sigma : M)$$

と定義すればGOS公式

$$\chi_c(U,\mathcal{F}) - \mathrm{rank}\mathcal{F}\cdot\chi_c(U) = -\mathrm{degSw}\mathcal{F}$$

がえられる．

Swan 類 $s_{V/U}(\sigma)$ の定義．よいコンパクト化 $V\subset Y$ と，可換図式

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & Y \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ U & \longrightarrow & X \end{array}$$

があり，U が Cartier 因子の補集合であるとき．

$$s_{V/U}(\sigma) = -(\bar{\Gamma}_\sigma, \Delta_Y)_{(Y\times Y)^\sim}$$

とおけばよい．

Lefschetz 跡公式

$$\mathrm{Tr}(\sigma^* : H^*(V,\mathbb{Q}_\ell)) = (\bar{\Gamma}_\sigma, \Delta_Y)_{(Y\times Y)^\sim}$$

の仮定 $\bar{\Gamma}_\sigma\cap(D\times Y)'\subset\bar{\Gamma}_\sigma\cap(Y\times D)'$ がなりたっていることを確める．$W\cap(D\times Y)' = \sum_i D_{1,i}$, $W\cap(Y\times D)' = \sum_i D_{2,i}$. $f^{-1}B=\sum e_iD_i$ とすると，$\sum e_iD_{1,i} = \sum e_iD_{2,i}$.