2008 年度夏学期　数学 I（2 年他クラス聴講分）　追試験問題　斎藤　毅

10 月 28 日（火）2 限 10:55-12:25 (90 分)

・問題用紙　1 枚、解答用紙　両面 1 枚、計算用紙 1 枚

・計時機能のみの時計と筆記用具以外もちこめません。

最後の答だけを書くのではなく, 途中の計算なども**できるだけくわしく**書いて下さい. この点が不十分な答案は，最後の答えがあっていたとしても，大きく**減点**されることがありますので，注意してください.

問題 **1.** 理 I で数学 IA を履修した人は **1A.** を，それ以外の人は **1B.** を解答してください.

1A. 数列 $(a_n)_{n=0,1,\dots}$ を，$a_0 = 1, a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ で定める.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

を示せ.（ヒント：α を方程式 $x^2 = 1+x$ の解とし，$|a_{n+1}-\alpha|$ と $|a_n-\alpha|$ を比べる.）

1B. $-1 < x < 1$ をみたす実数 x に対し，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^n\end{aligned}$$

がなりたつ．これに，$x = \dfrac{1}{10}$ を代入して，

$$3.161 < \sqrt{10} < 3.163$$

を導け.

問題 **2.** $0 < x < 1$ をみたす実数 x に対し，不等式

$$\left| e^x - \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)\right| \le \frac{1}{8}x^4$$

がなりたつことを示せ.

問題 **3.** 2 変数関数 $f(x,y)$ を，

$$f(x,y) = x^2y + xy^2 - 3xy$$

で定める.

(1)　偏導関数 $f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ と $f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)$ を求めよ.

(2)　関数 $f(x,y)$ のグラフの，点 $(1,3,3)$ での接平面の方程式を求めよ.

(3)　関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ.

1A. $a_n, \alpha > 0$ である．

$$|a_{n+1}-\alpha| = |\sqrt{1+a_n}-\sqrt{1+\alpha}| = \frac{|(1+a_n)-(1+\alpha)|}{|\sqrt{1+a_n}+\sqrt{1+\alpha}|} \leq \frac{1}{2}|a_n-\alpha|$$

だから，$|a_n-\alpha| \leq \frac{1}{2^n}|1-\alpha| \to 0\ (n\to\infty)$.
1B. $x = \frac{1}{10}$ とおけば，

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{10}}} = \frac{\sqrt{10}}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\frac{1}{10^n}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}
& 3\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{10^2}\right) = 3(1+0.05+0.00375) = 3.16125 \\
< \;& \sqrt{10} \\
< \;& 3\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{10^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{10^3}\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) = 3.16125 + 3\cdot 0.000347222\cdots \\
= \;& 3.162291666\cdots.
\end{aligned}$$

2. テイラーの定理より，$e^x - \left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}\right) = \dfrac{e^t}{24}x^4$ をみたす実数 $0<t<x<1$ がある．$e^t < e^1 = e < 3$ だから，$\dfrac{e^t}{24}x^4 < \dfrac{3}{24}x^4$ である．
3. (1) $f_x = 2xy + y^2 - 3y, f_{xy} = 2x + 2y - 3$.
(2) $f_x(1,3) = 6+9-9 = 6, f_y(1,3) = 1+6-3 = 4$ だから，方程式は $z-3 = 6(x-1)+4(y-3)$．整理すれば $z = 6x+4y-15$.
(3) $f_x(x,y) = y(2x+y-3) = 0$ かつ $f_y(x,y) = x(2y+x-3) = 0$ ならば，$(x,y) = (0,0),(3,0),(0,3),(1,1)$．よって，極値をとりうる点はこの 4 つだけ.

$\det\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0\end{pmatrix} = -9 < 0$ だから，$(0,0)$ では極値をとらない．$\det\begin{pmatrix} f_{xx}(3,0) & f_{xy}(3,0) \\ f_{xy}(3,0) & f_{yy}(3,0)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 6\end{pmatrix} = -9 < 0$ だから，$(3,0)$ でも極値をとらない．同様に $(0,3)$ でも極値をとらない．

$\det\begin{pmatrix} f_{xx}(1,1) & f_{xy}(1,1) \\ f_{xy}(1,1) & f_{yy}(1,1)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\end{pmatrix} = 3 > 0$ だから，$(1,1)$ で極小値 -1 をとる．

2008 年度夏学期　数学 II（2 年他クラス聴講分）　追試験問題　斎藤　毅

10 月 30 日（木）2 限 10:55-12:25 (90 分)

・問題用紙　1 枚、解答用紙　両面 1 枚、計算用紙 1 枚

・計時機能のみの時計と筆記用具以外もちこめません。

最後の答だけを書くのではなく, 途中の計算なども**できるだけくわしく**書いて下さい. この点が不十分な答案は，最後の答えがあっていたとしても，大きく**減点**されることがありますので，注意してください.

問題 **1.** 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の原点を O とし，A を点 $(1,0,1)$，B を点 $(0,1,1)$ とする．3 点 O, A, B をとおる平面を P とする.

(1) 平面 P の方程式を求めよ.

(2) 原点をとおり平面 P と直交する直線 ℓ の，パラメータ表示を与えよ.

(3) 点 $(1,0,0)$ を $(0,1,0)$ にうつし，平面 P 上の点は動かさない，$\mathbb{R}^3$ の線形変換をあらわす行列を求めよ.

問題 **2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) A の階数を求めよ.

(2) 方程式 $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の解をすべて求めよ.

問題 **3.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) A の行列式 $\det A$ を求めよ.

(2) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) I を 3 行 3 列の単位行列とする．行列式 $\det(10 \cdot I - A)$ を求めよ.

1. (1) $x+y=z$.

(2) $x=t, y=t, z=-t$.

(3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (1) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ は 1 次独立であり，$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ だから，階数は 2 である．

(2) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は，方程式 $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の解であり，$c = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $d = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は，方程式 $Ax=0$ の解である．c と d は 1 次独立で，A の階数は 2 だから，一般解は $x=b+sc+td$（s,t は任意の実数）である．

3. (1) (2) $\det A = -9$.

(3) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & 1 & 0 \\ -\frac{7}{9} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{9} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\det(10 \cdot I - A) = 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 9 = 1729$.