

2007年度 数学IB 冬学期 期末試験問題

2月15日(金) 2限(90分) 斎藤 毅

- ・問題用紙 1枚、解答用紙 両面1枚、計算用紙 1枚
- ・筆記用具、計時機能のみの時計 以外もちこめません。

答だけでなく、途中の計算もくわしく書いてください。

問題1 不等式

$$0 \leq z \leq xy, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

で定まる立体の体積を V とする。次の問いに答えよ。

- (1) V を重積分として表わせ。
- (2) V の値を、逐次積分で求めよ。
- (3) V の値を、極座標に変数変換して求めよ。

問題2(1) 積分

$$\int_0^1 \frac{2}{x + \sqrt{1+x^2}} dx$$

の値を求めよ。

(2) 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \sqrt{n^2 + k^2}}$$

を、定積分で表わし、その値を求めよ。

問題3 半径1の球の上半分の形をした容器を、底面が水平になるようにおき、そのてっぺんから、一定のわりあい水を注ぎ、容器にためる。容器は、はじめは空であるとし、時刻 $t=0$ から水を注ぐとする。

(1) 時刻 $t=1$ で、容器がちょうどいっぱいになるとする。水面の高さが z のときの時刻 t を、 z の関数として表わせ。ただし、底面の座標を $z=0$ とする。

(2) (1) と同じ形の容器に、同じはやさで水を注ぐ。今度は容器の底にひびわれがあり、水面の高さ z に比例する量の水がもれるとする。水をずっとためていくと、ほぼ $z = \frac{1}{2}$ のところで、もれる量と注ぐ量がほぼ等しくなり、水位がほぼ一定になるとする。

水面の座標 z を時刻 t の関数と考え、 z のみたす微分方程式を求めよ。

(3) (2) で求めた微分方程式を解いて、水面の高さが z のときの時刻 t を、 z の関数として表わせ。

略解 1 (1)

$$V = \int_{\substack{x \geq 0, y \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1}} xy dx dy$$

(2)

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy dy = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x(1-x^2)}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}.$$

(3)

$$V = \int_{\substack{0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}} r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot r dr d\theta = \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta = \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \cdot \left[\frac{-\cos 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}.$$

2(1) $y = \sqrt{1+x^2}$, $t = x+y$ とおけば, $\frac{1}{t} = y - x$, $x = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right)$
だから, 置換積分して

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2}{x + \sqrt{1+x^2}} dx &= \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{t} dt = \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \left[\log t - \frac{1}{2t^2} \right]_1^{1+\sqrt{2}} \\ &= \log(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{2}((\sqrt{2} - 1)^2 - 1) = \log(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \sqrt{n^2 + k^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{k}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} (\log(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

3 (1) 水面の高さが z のとき, 体積は $\int_0^z \pi(1-z^2) dz = \pi \left(z - \frac{z^3}{3} \right)$. 時刻 t は体積に比例し, $z = 1$ のとき $t = 1$ だから, $t = \frac{3z - z^3}{2}$.

(2) (1) より, 単位時間あたり注がれる水の体積は, $\frac{2}{3}\pi$. もれる水の量は水面の高さ z に比例し, $z = \frac{1}{2}$ のときに単位時間あたり $\frac{2}{3}\pi$ だから, $\frac{4}{3}\pi z$. よって, 求める方程式は

$$\pi(1-z^2) \frac{dz}{dt} = \frac{2}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi z.$$

(3) 移項すると, $\frac{3}{2} \frac{1-z^2}{1-2z} \frac{dz}{dt} = 1$. $t = 0$ のとき $z = 0$ だから, 0 から t まで積分して,

$$t = \frac{3}{2} \int_0^t \frac{1-z^2}{1-2z} \frac{dz}{dt} dt = \frac{3}{2} \int_0^z \frac{1-z^2}{1-2z} dz.$$

$\frac{1-z^2}{1-2z} = \frac{14-4z^2}{4(1-2z)} = \frac{11-(2z)^2+3}{4(1-2z)} = \frac{1}{4} \left(1+2z + \frac{3}{1-2z} \right)$ だから,

$$t = \frac{3}{8} \int_0^z \left(1+2z + \frac{3}{1-2z} \right) dz = \frac{3}{8} \left(z + z^2 - \frac{3}{2} \log(1-2z) \right).$$