問題 (10/12)　2 変数の関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{y}{x} & x\neq 0 \text{ のとき}, \\ 0 & x=0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義する．

（1） $f(x,y)$ は連続関数であることを示せ．

（2） $a\neq 0$ のとき，偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ を求めよ．

（3） $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,b)=0$ を示せ．

（4） $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ を示せ．

（5） $b\neq 0$ のとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,b)$ は定義されないことを示せ．

（6） a,b を定数とする．合成関数 $g(t)=f(at,bt)$ について，$g'(0)$ を求めよ．

（7） $f(x,y)$ は，$(x,y)=(0,0)$ で全微分可能かどうか調べよ．

略解 (10/12)

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin \dfrac{y}{x} & x \neq 0 \text{ のとき}, \\ 0 & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

（1）$x \neq 0$ のときはよいから、$x = 0$ のときに示す.

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-b)^2} < r$ のとき，$x \neq 0$ なら，$|f(x,y) - f(0,b)| = |x \sin \frac{x}{y}| \leq |x| < r$ であり，$x = 0$ なら，$|f(x,y) - f(0,b)| = 0 < r$ である. したがって $r \to 0$ のとき、$|f(x,y) - f(0,b)| \to 0$ である.

（2）$a \neq 0$ のとき,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \sin \frac{b}{a} + a \cos \frac{b}{a} \left(-\frac{b}{a^2} \right) = \sin \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \cos \frac{b}{a},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = a \cos \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} \right) = \cos \frac{b}{a}.$$

（3）$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,b) = \lim_{y \to b} \dfrac{f(0,y) - f(0,b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \dfrac{0 - 0}{y - b} = 0.$

（4）$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \dfrac{0 - 0}{x - 0} = 0.$

（5）$b \neq 0$ のとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,b) = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x,b) - f(0,b)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \sin \dfrac{b}{x}$ である. $x \to 0$ のとき，$\frac{b}{x} \to \infty$ だから，右辺は定義されない.

（6）$a \neq 0$ とすると，$t \neq 0$ なら，$g(t) = f(at, bt) = at \sin \dfrac{b}{a}$ であり，$t = 0$ のときも $g(0) = f(0,0) = 0$ である．よって，このときは $g'(0) = a \sin \dfrac{b}{a}$.

$a = 0$ とすると，$g(t) = f(0, bt) = 0$ だから，$g'(0) = 0$.

（7）全微分可能とすると、合成関数の微分の公式がなりたつはずである。公式が成り立つとすると、（6）の記号で $g'(0) = f_x(0,0)a + f_y(0,0)b = 0 \cdot a + 0 \cdot b = 0$ となるが，$g'(0) = a \sin \dfrac{b}{a}$ は，0 でない値もとりうるから矛盾である．よって全微分可能でない.