2004 年度 数理科学 I 期末試験問題　斎藤　毅

理科 II・III 類 7〜8 組, 14〜16 組　7 月 26 日 (月) 1 限 9:00-10:30 (90 分)

・問題用紙　1 枚、解答用紙　両面 2 枚、計算用紙 1 枚

・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

・途中の計算などもできる限りくわしく書いて下さい。指示された以外の解法による答案は減点の対象となる場合があります.

第 1 問　xy 平面内の点 $(1,0)$，$(0,1)$ をそれぞれ P,Q で表す．P を始点とし，Q を終点とする曲線 C_1，C_2 を，次のように定める．

C_1：原点を中心とする半径が 1 の円のうち，第 1 象限に含まれる部分.

C_2：線分 PQ.

(1)　線積分 $\displaystyle\int_{C_1} -\frac{x}{x^2+y^2}dx+\frac{y}{x^2+y^2}dy, \int_{C_2} -\frac{x}{x^2+y^2}dx+\frac{y}{x^2+y^2}dy$ を求めよ.

(2)　D を C_1, C_2 で囲まれた部分とする．重積分 $\displaystyle\int_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dxdy$ を，Green の公式を必ず使って求めよ.

第 2 問　D を xy 平面内の中心 $(\frac{1}{2},0)$，半径 $\frac{1}{2}$ の円板のうち，第 1 象限に含まれる部分とする．変数変換

$$\begin{cases} x=\sin s\cdot\cos t, \\ y=\sin s\cdot\sin t \end{cases}$$

を考える.

(1)　st 平面の部分 E を $0\le s\le\frac{\pi}{2}, 0\le t\le\frac{\pi}{2}$ をみたしかつ対応する点が D にはいるような点全体とする．E を図示せよ.

(2)　上の変数変換を必ず使って，重積分 $\displaystyle\int_D (x^2+y^2)dxdy$ を求めよ.

第 3 問　方程式

$$(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)+1$$

で定義される曲線について，次の問いに答えよ.

(1)　概形を図示せよ.

(2)　Lagrange 未定係数法を必ず使って，条件 $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)+1$ の下での，関数 xy の最大値を求めよ.

略解 1 (1) C_1 のパラメータ表示として，$x = \cos t, y = \sin t, 0 \le t \le \pi/2$ をとる．C_2 のパラメータ表示として，$x = 1 - t, y = t, 0 \le t \le 1$ をとる．

$$\begin{aligned}
&\int_{C_1} -\frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy = \int_0^{\pi/2} (-\cos t)(-\sin t) + (\sin t)(\cos t)dt \\
=\ &\int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = \left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 1. \\
&\int_{C_2} -\frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy = \int_0^1 \frac{1-t}{(1-t)^2+t^2} + \frac{t}{(1-t)^2+t^2}dt \\
=\ &\int_0^1 \frac{2}{1+(2t-1)^2}dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\mathrm{Arctan}\ x]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(2) Green の公式より，

$$\begin{aligned}
&\int_{C_1} -\frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy - \int_{C_2} -\frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy \\
=\ &\int_D \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{x^2+y^2}\right) dxdy = -4\int_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dxdy.
\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\int_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dxdy = -\frac{1}{4}(1-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$

2 (1) D は不等式 $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 \le \frac{1}{4}$ すなわち，$x^2+y^2 \le x$ で定まるから，E は不等式 $\sin^2 s \le \sin s \cos t$，すなわち、$\sin s \le \cos t = \sin(\frac{\pi}{2} - t)$ で定まる．よって，E は $t + s \le \frac{\pi}{2}$ で定まる．

(2) $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s \cdot \cos t & \sin s \cdot -\sin t \\ \cos s \cdot \sin t & \sin s \cdot \cos t \end{pmatrix}$ だから，ヤコビアン $J(s,t)$ は $\cos s \sin s$ である。したがって，

$$\begin{aligned}
&\int_D (x^2+y^2)dxdy = \int_E \sin^2 s \cdot \cos s \sin s ds dt \\
=\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-t} \sin^3 s \cos s ds\right) dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^4 s]_0^{\frac{\pi}{2}-t} dt \\
=\ &\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - \cos^2 t \sin^2 t)dt \\
=\ &\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{64}.
\end{aligned}$$

3　(1)　対称性より $x \geq 0, y \geq 0$ として考えれば十分である．

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$$

とおく．

$$f_x(x,y) = 4x(x^2+y^2-1), f_y(x,y) = 4y(x^2+y^2+1)$$

である．これより，$f(x,y)$ は x を定数と考えると，y について $y \geq 0$ で単調減少である．したがって，$f(x,0) \leq 1$ となる x について $f(x,y)=1$ となる $y \geq 0$ がただ 1 つあり，$f(x,0) > 1$ となる x については，$f(x,y)=1$ となる y はない．$f(x,0) = x^4 - 2x^2 = (x^2-1)^2 - 1 \leq 1$ となる x の範囲は $x^2 \leq 1+\sqrt{2}$ である．したがって，$0 \leq x \leq \sqrt{1+\sqrt{2}}$ で陰関数 $y = g(x)$ が定義され，$0 \leq x \leq \sqrt{1+\sqrt{2}}$ で連続であり，$0 \leq x < \sqrt{1+\sqrt{2}}$ で連続微分可能である．

$g'(x) = -f_x(x,g(x))/f_y(x,g(x))$ である．$g'(x) = 0$ となる x では，$x^2+y^2=1$ だから，$x^2=y^2=1/2$．したがって，$g(x)$ は $0 \leq x \leq 1/\sqrt{2}$ で単調増加 $1/\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{1+\sqrt{2}}$ で単調減少．$g(x)$ は $x = 1/\sqrt{2}$ で最大値 $1/\sqrt{2}$ をとり，$x=0$ で極小値 $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ をとる。$x = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ で最小値 0 をとる。

(2)　Lagrange 未定係数法より，条件つき極値をとる点では，$4x(x^2+y^2-1) : 4y(x^2+y^2+1) = y : x$ である．これより，$x^4-x^2 = y^4+y^2$ すなわち，$(x^2+y^2)(x^2-y^2-1)=0$．$(x,y) \neq (0,0)$ だから，$x^2 = y^2+1$ で，$(2y^2+1)^2 = 3$．よって，$y^2 = (\sqrt{3}-1)/2$．したがって，$x = \sqrt{(\sqrt{3}+1)/2}, y = \sqrt{(\sqrt{3}-1)/2}$ で，xy は最大値 $1/\sqrt{2}$ をとる．