11/19 講義予定

2変数関数の極値．（つづき）([高・加] 4.5 p.138, [金子]II 6.3 p.11, [小平]II なし)

定理 $f(x,y)$ が2階連続微分可能とする． $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ とし，$A = f_{xx}(a,b), B = f_{xy}(a,b), C = f_{yy}(a,b)$ とおく．このとき，

1. $AC - B^2 > 0$ かつ $A > 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で真の極小値をとる
2. $AC - B^2 > 0$ かつ $A < 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で真の極大値をとる
3. $AC - B^2 < 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で極値をとらない

補題 A, B, C を実数とし，$f(x,y) = \frac{1}{2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)$ とする．このとき，$A = f_{xx}(a,b), B = f_{xy}(a,b), C = f_{yy}(a,b)$ であり，

1. $AC - B^2 > 0$ かつ $A > 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で真の最小値をとる
2. $AC - B^2 > 0$ かつ $A < 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で真の最大値をとる
3. $AC - B^2 < 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で極値をとらない

[証明] I. 平方完成

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = \frac{1}{A}((Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)k^2) \geq 0$$

すればよい．

II.　対角化

$${}^tP \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}$$

すればよい．

[定理の証明] 1. Taylor の定理より，

$$\begin{aligned} & f(a+h, b+k) - f(a,b) \\ = \ & \frac{1}{2} f_{xx}(a+th, b+tk)h^2 + f_{xy}(a+th, b+tk)hk + \frac{1}{2} f_{yy}(a+th, b+tk)k^2 \end{aligned}$$

をみたす $0 < t < 1$ がある．2 階連続微分可能だから，考えている範囲で $f_{xx}(x,y) > 0$ かつ $f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 > 0$ としてよい．

$$A' = f_{xx}(a+th, b+tk), B' = f_{xy}(a+th, b+tk), C' = f_{yy}(a+th, b+tk)$$

とおくと，

$$A'h^2 + 2B'hk + C'k^2 \geq 0$$

であり，等号は $(h,k) = (0,0)$ と同値である．2．の証明も同様.

3．$AC - B^2 < 0$ なら，$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 > 0$ となる (h,k) と $Ah'^2 + 2Bh'k' + Ck'^2 > 0$ となる (h',k') がある．$F(t) = f(a+ht, b+kt)$ とおけば，$F''(0) > 0$ である．よって，$F(t)$ は $t = 0$ で極小値をとる．一方 $G(t) = f(a+h't, b+k't)$ とおけば，$G(t)$ は $t = 0$ で極大値をとるから，$f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で極値をとらない．