11/05 講義予定

合成関数の微分、([高・加] 4.4 p.128, [金子]II 6.4 p.19, [小平]II 6.2 e) p.278)

$f(x,y)$：2 変数 x,y の関数.

$g(t),h(t)$:　t の関数.

合成関数とは、代入して得られる関数 $f(g(t),h(t))$ のこと.

$f(x,y)$ と $g(t),h(t)$ がどれも連続なら，合成関数 $f(g(t),h(t))$ も連続.

意味

微分 $(a,b)=(g(c),h(c))$ とし，$g(t),h(t)$ は $t=c$ で微分可能かつ $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で（全）微分可能とする．このとき，合成関数 $f(g(t),h(t))$ も $t=c$ で微分可能で，

$$\frac{d}{dt}f(g(t),h(t))|_{t=c}=\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)g'(c)+\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)h'(c).$$

図形的意味：接線は接平面に含まれる.

[証明] 仮定より，$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\leq r$ ならば

$$\begin{aligned}&\left|f(x,y)-f(a,b)-\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)(x-a)-\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)(y-b)\right|\\ \leq\ & k(r)\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\end{aligned}$$

をみたす関数 $k(r)\to 0$ がある．よって，$F(t)=f(g(t),h(t))$ とおくと，

$$\begin{aligned}&\left|F(t)-F(c)-\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)(g(t)-g(c))-\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)(h(t)-h(c))\right|\\ \leq\ & k(r)\sqrt{(g(t)-g(c))^2+(h(t)-h(c))^2}\end{aligned}$$

両辺を $t-c$ でわって，$t\to c$ とすると，

$$\begin{aligned}&\left|\lim_{t\to c}\frac{F(t)-F(c)}{t-c}-\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)g'(c)-\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)h'(c)\right|\\ \leq\ & k(r)\sqrt{(g'(c)^2+h'(c)^2}\to 0.\end{aligned}$$

平均値の定理

関数 $F(t)=f(a+t(x-a),b+t(y-b))$ に平均値の定理 $F(1)-F(0)=F'(t)$ を適用して，

$$\begin{aligned}&f(x,y)-f(a,b)\\ =\ &\frac{\partial}{\partial x}f(a+t(x-a),b+t(y-b))(x-a)+\frac{\partial}{\partial y}f(a+t(x-a),b+t(y-b))(y-b).\end{aligned}$$

高次微分、

偏導関数 $f_x(x,y)$ が偏微分可能であるとき，2 階偏導関数 $f_{xx}(x,y), f_{xy}(x,y)$ が定義される．$f_{yx}(x,y), f_{yy}(x,y)$ も同様．高階の偏導関数も同様に定義される．

記号　$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y)$ など,