10/15

定義 $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$ とは，次の性質 (1) と (2) をみたす $r>0$ の関数 $g(r)$ があること：

(1) $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\le r$ ならば $|f(x,y)-A|\le g(r)$.

(2) $\lim_{r\to+0} g(r)=0$.

(ε-δ 論法でいえば，r が δ, $g(r)$ が ε．)

説明 $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$ とは，$(x,y)\to(a,b)$ のとき $|f(x,y)-A|$ となること．$(x,y)\to(a,b)$ とは，$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\to 0$ のこと．

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\le r$ の範囲での $|f(x,y)-A|$ の最大値を $M(r)$ とすると，$r\to 0$ のとき，$M(r)\to 0$．最大値があるかどうかはわからないし，それを具体的に知る必要はない．$M(r)$ の性質：$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\le r$ ならば $|f(x,y)-A|\le M(r)$.

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$ のとき，$f(x,y)$ は (a,b) で連続であるという．$f(x,y)$ が U の各点で連続なとき，$f(x,y)$ は U で連続という．U が明らかなとき，単に $f(x,y)$ は連続であるという．

2 変数関数の微分：([長瀬・芦野] 7.3, [金子]II 6.2, [小平]II §6.2)

偏微分 y を定数と考えて x で微分する．$y=b$ とおいて，1 変数 x の関数 $f(x,b)$ を考える．$f(x,b)$ を x で微分する $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ これが定義されるとき，$f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で x について偏微分可能であるといい，その値を $f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ での x に関する偏微分係数とよび $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ と表す．同様に，$f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ での y に関する偏微分係数 $\lim_{k\to 0}\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ を定義する．

他の記号 $f_x(a,b), f_y(a,b)$ など．

偏微分可能でも連続とは限らない．さっきの例．

全微分：正しい微分の定義は？微分とは 1 次近似のことである．$f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で（全）微分可能であるとは，よく近似する 1 次式があること．

つまり，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-c)+f(a,b))}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0$$

$z=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-c)+f(a,b)$ で定まる平面を接平面という．