**7/9** 講義予定

広義積分 ([1] p.90-94, [2] p.120-122, [3] p.175-189.)

半開区間 $(a,b]$ 上で連続な関数 $f(x)$ の広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ を $\lim_{t\to a}\int_t^b f(x)dx$ と定義する．$[a,b)$ についても同様．$(a,b)$ のときは $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ と考え、それぞれが収束するとき、その和として定義する．

例

$$\int_0^1 x^a dx = \begin{cases} \frac{1}{a+1} & a > -1 \text{ のとき}, \\ \infty & a \leq -1 \text{ のとき}, \end{cases}$$

$\int_0^1 x^a dx = \lim_{t\to 0}[\frac{x^{a+1}}{a+1}]_t^1 = \frac{1}{a+1} - \lim_{t\to 0}\frac{t^{a+1}}{a+1}$ ($a \neq -1$ のとき).

$\int_0^1 x^{-1}dx = \lim_{t\to 0}[\log x]_t^1 = -\lim_{t\to 0}\log t$.

優関数による収束判定：$|f(x)| \leq g(x)$ かつ $\int_a^b g(x)dx$ が収束するなら $\int_a^b f(x)dx$ も絶対収束する．

無限区間 $f(x)$ を $[a,\infty)$ で定義された連続関数とする．広義積分 $\int_a^\infty f(x)dx$ を $\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$ と定義する．$(a,\infty)$, $(-\infty,\infty)$ などについても同様に定義する．

例

$$\int_1^\infty x^{-a} dx = \begin{cases} \frac{1}{a-1} & a > 1 \text{ のとき}, \\ \infty & a \leq 1 \text{ のとき}, \end{cases}$$

$\int_1^\infty x^{-a}dx = \lim_{t\to\infty}[\frac{x^{-a+1}}{-a+1}]_1^t = \lim_{t\to\infty}\frac{t^{-a+1}}{-a+1} + \frac{1}{a-1}$ ($a \neq 1$ のとき).

$\int_1^\infty x^{-1}dx = \lim_{t\to\infty}[\log x]_1^t = \lim_{t\to\infty}\log t$.

級数の収束との比較：([1] p.182-183 定理 4, [2] p.126, [3] p.207 定理 5.2.)

$f(x) \geq 0$ を $x \geq 1$ で定義された連続単調減少関数とする。数列 $a_1, a_2, \dots$ を $a_n = f(n)$ で定義する．このとき，級数 $\sum_{n=1}^\infty$ が収束するためには，広義積分 $\int_1^\infty f(x)dx$ が収束することが必要十分であり，

$$\int_1^\infty f(x)dx \leq \sum_{n=1}^\infty a_n \leq \int_1^\infty f(x)dx + a_1$$

がなりたつ．

$\int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq \int_1^n f(x)dx + a_1$ である．これより従う．

例: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^k}$ は $k = 1$ のとき発散し，$k \geq 2$ なら収束する．$k \geq 2$ なら $\frac{1}{k-1} \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^k} \leq \frac{k}{k-1}$.

$\int_1^\infty \frac{1}{x^k}dx$ は $k = 1$ なら発散し，$k \geq 2$ なら，$\int_1^\infty \frac{1}{x^k}dx = \frac{1}{k-1}$.

多項式による近似の補足.

$$\frac{f(x)-p(x)}{x^n} \to 0,\ \frac{g(x)-q(x)}{x^n} \to 0\ (x \to 0)$$

とすると,

$$\frac{f(x)g(x)-p(x)q(x)}{x^n} = \frac{f(x)(g(x)-q(x))}{x^n} + \frac{q(x)(f(x)-p(x))}{x^n} \to 0\ (x \to 0)$$

である．同様に,

$$\frac{f(x)-a(1-xp(x))}{x^n} \to 0\ (x \to 0)$$

$a \neq 0$ とすると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a}\frac{1-x^{n+1}p(x)^{n+1}}{1-xp(x)} = \frac{a(1-xp(x))-f(x)(1-x^{n+1}p(x)^{n+1})}{af(x)(1-xp(x))} \\ = \quad & \frac{-(f(x)-a(1-xp(x)))+x^{n+1}f(x)p(x)^{n+1}}{af(x)(1-xp(x))} \end{aligned}$$

である．よって

$$\frac{1}{x^n}\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a}\left(1+xp(x)+x^2p(x)^2+\cdots+x^np(x)^n\right)\right) \to 0\ (x \to 0)$$

である.