

6/18 講義予定

交代級数の収束. ([1] p.188 定理 8, [2] p.24 定理 1.4, [3] p.45 定理 1.23.)
 $a_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ かつ単調減少ならば, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ は収束.

$$\left| a - \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \right| \leq |a_{n+1}|.$$

他の関数の巾級数展開.

([1] p.44 例 20(5), p.194 例題 3, [2] p.73, [3] p.239 例 5.11.)

$$\begin{aligned} (1+x)^a &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \\ &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!} x^4 + \dots \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^{2n}, \\ &= 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \dots \end{aligned}$$

([1] p.195 問 11(3), [2] p.75, [3] p.239 例 5.14.)

$$\begin{aligned} \text{Arcsin } x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} x^{2n} \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n \cdot (2n+1)} x^{2n+1} \\ &= x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots \end{aligned}$$

微分方程式: ([1] p.197, [2] p.134.)

$f(x)$ と $f'(x)$ (やさらに高次の導関数) を含む方程式.

微分方程式を解く: 方程式をみたす関数 $f(x)$ を求める.

例 $f'(x) = f(x)$. 解は $f(x) = Ce^x$ (C は定数).

$$\left(\frac{f(x)}{e^x} \right)' = \frac{e^x f'(x) - e^x f(x)}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} = 0$$

より、 $\frac{f(x)}{e^x}$ は定数.

一般には、方程式だけで $f(x)$ は一意的には定まらない。

初期条件：いくつかの値 $f(a), f'(a)$ 等を指定する。

例 方程式 $f'(x) = f(x)$, 初期条件 $f(0) = 1$. 解は $f(x) = e^x$.

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ の別証明. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ は $f'(x) = f(x)$ 、 $f(0) = 1$ をみたす。

$(1+x)^a$ は $-1 < x < 1$ で定義され、初期条件 $f(0) = 1$ をみたす、微分方程式 $(1+x)f'(x) = af(x)$ のただ1つの解。

$$\left(\frac{f(x)}{(1+x)^a} \right)' = \frac{(1+x)^a f'(x) - a(1+x)^{a-1} f(x)}{(1+x)^{2a}} = \frac{(1+x)f'(x) - af(x)}{(1+x)^{a+1}} = 0$$

より、 $\frac{f(x)}{(1+x)^a}$ は定数。

$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$ の収束半径は $|\binom{a}{n+1}/\binom{a}{n}| = |\frac{a-n}{n+1}| \rightarrow 1$ だから 1 . したがって $-1 < x < 1$ で関数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$ が定義される . これは初期条件 $f(0) = 1$ をみたし、

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} n x^{n-1}.$$

$n \binom{a}{n} = a \binom{a-1}{n-1}$, $\binom{a-1}{n-1} + \binom{a-1}{n} = \binom{a}{n}$ だから ,

$$(1+x)f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a \binom{a-1}{n-1} + a \binom{a-1}{n}) x^n = a \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = af(x).$$

よって、

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$