6/11 講義予定

巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の微積分。

定理　r を巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径とする。このとき、次がなりたつ。

1. 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ の収束半径も r である。

2. $-r < x < r$ に対し、関数 $f(x)$ を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で定めると、$f(x)$ は $-r < x < r$ で微分可能であり、

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \int_0^x f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

がなりたつ。

[証明] 1. r' を $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ の収束半径とする．

(1) $|x| < r$ なら，$n a_n x^{n-1} \to 0 (n \to \infty)$ であることと，

(2) $|x| < r'$ なら，$a_n x^n \to 0 (n \to \infty)$ であること

をいえば十分である．(2) を示す．$|x| < r'$ なら，$a_n x^{n-1} \to 0 (n \to \infty)$ だから，$a_n x^n \to 0 (n \to \infty)$ である．(1) を示す．$|x| < t < r$ なら，$n \geq N$ なら $|a_n t^n| < 1$ がなりたつ N があり、

$$|n a_n x^{n-1}| \leq n(\frac{|x|}{t})^{n-1} t \to 0 \ (n \to \infty)$$

2. $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ とおく。

連続。$|x|, |a| \leq s < t < r$ とする。$n \geq N$ なら $|a_n| t^n \leq 1$ となるように N をとる．$n \geq N$ とすると、

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k x^k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| s^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| t^k \left(\frac{s}{t}\right)^k \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{s}{t}\right)^k = \left(\frac{s}{t}\right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{s}{t}} (= \varepsilon_n \text{とおく}) \end{aligned}$$

がなりたつ。$x=a$ についても同様。よって

$$\begin{aligned}|f(x)-f(a)| &\le |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(a)|+|f(a)-f_n(a)| \\ &\le |f_n(x)-f_n(a)|+2\varepsilon_n\end{aligned}$$

よって、

$$\lim_{x\to a}|f(x)-f(a)|\le 2\varepsilon_n \to 0 \quad (n\to\infty).$$

積分。$F(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ とおく。$|x|\le t<r$ とする。

$$\int_0^x f(x)dx=\int_0^x f_n(x)dx+\int_0^x (f(x)-f_n(x))dx$$

であり,

$$|\int_0^x (f(x)-f_n(x))dx|\le \int_0^x |f(x)-f_n(x)|dx\le \varepsilon_n|x|\to 0 \quad (n\to\infty).$$

微分。　巾級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ に上の結果を適用すればよい。

誤差項の評価、

Taylor の定理によるもの

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

巾級数展開によるもの、

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k-\sum_{k=0}^{n}a_kx^k=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k$$

優級数による評価。

交代級数の収束. ([1] p.188 定理 8, [2] p.24 定理 1.4, [3] p.45 定理 1.23.) $a_n>0, \lim_{n\to 0}a_n=0$ かつ単調減少ならば, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ は収束.

$$|a-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k|\le |a_{n+1}|.$$

他の関数の巾級数展開。

([1] p.44 例 20(5), p.194 例題 3, [2] p.73, [3] p.239 例 5.11.)

$$
\begin{aligned}
(1+x)^a &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \\
&= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!}x^4 + \cdots .
\end{aligned}
$$