数学 IB 演習問題 (2002.7.03)

問題 7.1 a, b を定数とする。微分方程式

$$f''(x) = -f(x) \tag{1}$$

の解 $f(x)$ で, 条件

$$f(0) = a, \quad f'(0) = b \tag{2}$$

をみたすものを次のようにしてすべて求めよ。

1.

$$f_{a,b}(x) = a\cos x + b\sin x$$

とおく。$f_{a,b}(x)$ は、方程式 (1) の解で条件 (2) をみたすことを確かめよ。

2. $f(x)$ が方程式 (1) の解ならば、$f(x)^2 + f'(x)^2$ は定数関数であることを示せ。

3. $a = b = 0$ ならば、方程式 (1) の解で条件 (2) をみたすものは、定数関数 0 だけであることを示せ。

4. 任意の定数 a, b に対し、方程式 (1) の解で条件 (2) をみたすものは、1 で定めた関数 $f_{a,b}(x)$ だけであることを示せ。

5. $V = \{$ 関数 $f(x) | f''(x) = -f(x)\}$ とおく。V に自然に加法とスカラー倍を定めると V は線型空間になることを示せ。

6. $\cos x$ と $\sin x$ は V の基底であることを示せ。$f(x) \in V$ に対し、$(f(0), f'(0)) \in \mathbb{R}^2$ を対応させる写像 $V \to \mathbb{R}^2$ は線型同型であることを示せ。

問題 7.2 a, b を定数とする。微分方程式

$$f''(x) = -2f(x) + 2f'(x) \tag{3}$$

の解 $f(x)$ を次のようにして求めよ。

1. 2 次方程式 $X^2 = -2 + 2X$ の解 $a \pm b\sqrt{-1}$ を求めよ。

2. $f_+(x) = e^{ax}\cos bx,\ f_-(x) = e^{ax}\sin bx$ とおく。$f_\pm(x)$ は、方程式 (3) の解であることを確かめよ。

3. $f(x)$ を方程式 (3) の解とする。$g(x) = e^{-ax}f(x)$ がみたす 2 階の微分方程式を求めよ。

4. 方程式 (3) の解をすべて求めよ。

問題 7.3 次の関数の原始関数を求めよ。(金子 微分積分 I 練習問題 p.112,114)

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx,$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx,$ (3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+6x+8}dx,$

(4) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2-x-2}dx,$ (5) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-1}dx,$ (6) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-1}dx.$