数学 IB 演習問題 (2002.5.22)

問題 4.1 極限

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \left(x + \frac{x^3}{3}\right)}{x^5}$$

を次のようにして求めよ。

1. $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2},\ h(x) = \dfrac{1}{x^4}(\cos x - f(x))$ とおく。$\cos x$ の Taylor 展開を使って、極限 $\lim_{x\to 0} h(x)$ を求めよ。

2. $g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{6},\ k(x) = \dfrac{1}{x^5}(\sin x - xg(x))$ とおく。$\sin x$ の Taylor 展開を使って、極限 $\lim_{x\to 0} k(x)$ を求めよ。

3. $\tan x = \dfrac{xg(x) + x^5 k(x)}{f(x) + x^4 h(x)}$ を代入して、極限 $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^5}\left(\tan x - \dfrac{xg(x)}{f(x)}\right)$ を求めよ。

4. 極限 $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^5}\left(xg(x) - f(x)(x + \dfrac{x^3}{3})\right)$ を求め、これと 3 をあわせて極限 A を求めよ。

問題 4.2 関数 $\cos x,\ \log(1+x)$ を、次のようにして $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の形に表わせ。

1. 自然数 n に対し、関数 $R_{2n+1}(x)$ を等式

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$$

で定める。任意の実数 x に対し、$\lim_{n\to\infty} R_{2n+1}(x) = 0$ であることを示せ。（ヒント：$\cos x$ の Taylor 展開を使う）

2. 任意の実数 x に対し、

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

であることを示せ。

3. $x > -1$ とする。

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{x^n}{1+x} dx$$

を示せ。（ヒント: $\dfrac{1-(-1)^n x^n}{1+x}$ を積分する。）

4. $|x| < 1$ とする。$\lim_{n\to\infty} \int_0^x \dfrac{x^n}{1+x} dx = 0$ を示し、

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

であることを示せ。