数学 I 演習問題 (2002.4.10)

問題 1. e の 100 乗根 $e^{\frac{1}{100}}$ は、1.010050167084 . . . である。このことを次のようにして確かめよ。

1. $0 \le x < 1$ ならば
$$1 + x \le e^x \le \frac{1}{1-x} \tag{1}$$
であることを示せ。

2. 不等式 (1) を使って、$1.01 < e^{\frac{1}{100}} < \dfrac{100}{99} = 1.010101010101\ldots$ であることを示せ。

3. 自然数 n に関する帰納法により、$0 \le x \le \dfrac{1}{100}$ ならば、
$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \le e^x \le 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} + \frac{100}{99}\frac{x^n}{n!} \tag{2}$$
であることを示せ。

4. 不等式 (2) を $x = \dfrac{1}{100}$ に適用すれば、$e^{\frac{1}{100}}$ が 1.010050167084 . . . であることを確かめられるような自然数 n の最小値を求めよ。

5. 4 で求めた n に対し、不等式 (2) を $x = \dfrac{1}{100}$ に適用して、$e^{\frac{1}{100}}$ が 1.010050167084 . . . であることを確かめよ。

6. 下の n の値のうち、不等式 (2) を適用すれば $e^{\frac{1}{100}}$ の値を小数点以下 100 桁まで正しく求められるものはどれか？

(1) $n = 10$, (2) $n = 20$, (3) $n = 40$, (4) $n = 100$.

問題 2. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!}$ (x は実数), (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$ (n は自然数), (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.

問題 3. 連続関数 $y = f(x)$ が、$a \le x \le b$ のとき $f(x) \ge 0$ をみたすならば、積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は、$y = f(x)$ のグラフと x 軸、直線 $x = a, x = b$ で囲まれた部分の面積と等しい。これはなぜか、その理由をのべよ。

数学 I 演習問題 (2002.4.10) 問題 1 の略解 (2002.4.15)

1. まず、任意の実数 x に対し不等式

$$1+x \le e^x \tag{3}$$

がなりたつことを示す。$(e^x-1)'=e^x>0$ だから関数 e^x-1 は単調増加。したがって $x>0$ なら $e^x-1>e^0-1=0$ であり、$x<0$ なら $e^x-1<e^0-1=0$ である。$(e^x-(1+x))'=e^x-1$ だから、$e^x-(1+x)$ は $x>0$ なら単調増加であり、$x<0$ なら単調減少である。したがって任意の x に対し $e^x-(1+x)\ge e^0-(1+0)=0$ である。よって不等式 (3) が示された。

不等式 (3) から、不等式 (1) $1+x\le e^x\le \dfrac{1}{1-x}$ の左の不等号がえられる。不等式 (3) の x に $-x$ を代入すれば $1-x\le e^{-x}$ が得られる。$x<1$ なので、移項すれば不等式 (1) の右の不等号がえられる。不等式 (1) で等号がなりたつのは $x=0$ のときだけであることも、こうして示せる。

2. 不等式 (1) に $x=\dfrac{1}{100}$ を代入すれば $1.01\le e^{\frac{1}{100}}<\dfrac{100}{99}$ がえられる。不等式 (1) で等号がなりたつのは $x=0$ のときだけなので、2 が示される。

3. e^x は単調増加なので、2 も使うと、$0\le x\le\dfrac{1}{100}$ ならば、$1=e^0\le e^x\le e^{\frac{1}{100}}<\dfrac{100}{99}$ がえられる。これで不等式 (2) が $n=0$ の場合に示された。

$n\ge 0$ とし、不等式 (2) が n にたいしてなりたつと仮定して、$n+1$ に対してもなりたつことを示す。不等式 (2) の各辺を 0 から x まで積分して 1 をたすと不等式

$$\begin{aligned}
&1+\int_0^x\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)dx\\
\le\ &1+\int_0^x e^x dx=e^x \\
\le\ &1+\int_0^x\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!}+\frac{100}{99}\frac{x^n}{n!}\right)dx
\end{aligned}\tag{4}$$

がえられる。$\displaystyle\int_0^x\frac{x^k}{k!}dx=\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ だから、不等式 (2) で n を $n+1$ でおきかえたものがえられる。

4.

$$a_n=1+\frac{1}{100}+\frac{1}{2}\frac{1}{100^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{100^3}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{100^n}$$

とおく。不等式 (2) に $x=\dfrac{1}{100}$ を代入すると

$$a_n\le e^{\frac{1}{100}}\le a_n+\frac{1}{99}\frac{1}{n!}\frac{1}{100^n}\tag{5}$$

がえられる。a_n を $e^{\frac{1}{100}}$ の近似値と考えると、その誤差は $\frac{1}{99}\frac{1}{n!}\frac{1}{100^n}$ 以下である。$n=4$ とすると、

$$\frac{1}{99}\frac{1}{4!}\frac{1}{100^4} = \frac{1}{99\cdot 24}10^{-8} > 10^{-12}$$

だが、$n=5$ とすると、

$$\frac{1}{99}\frac{1}{5!}\frac{1}{100^5} = \frac{1}{99\cdot 120}10^{-10} < 10^{-14}$$

である。よって $n=5$ とすれば十分と考えられる。

5. $a_5 = 1.01005016708416666666\ldots$ だから、不等式 (5) より、

$$1.01005016708416666666\ldots < e^{\frac{1}{100}} < 1.01005016708417666666\ldots$$

である。よって $e^{\frac{1}{100}} = 1.0100501670841\ldots$ が確かめられた。

6.
$$\frac{1}{99}\frac{1}{20!}\frac{1}{100^{20}} > 10^{-(2+9+2\cdot 10+40)} = 10^{-71}$$

だから $n=20$ では 100 けたまで求められない。

$$\frac{1}{99}\frac{1}{40!}\frac{1}{100^{40}} < 10^{-(30+80)} = 10^{-110}$$

だから $n=40$ で十分なはず。