多変数解析関数論　補足

野口潤次郎

2016(H28).July.07

補足 I: 弱正則関数の連続性 (§6. 10. 4)

補題 1　X を複素空間とする．X は，$a \in X$ で既約とし，f を近傍 $U(\ni a)$ 上の弱正則関数とする．このとき極限値 $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in U \setminus \Sigma(X)}} f(x)$ が存在する．

証明　問題は局所的であるから，X は $\mathbf{C}^n$ の原点を中心とする多重円板 $\mathrm{P}\Delta$ 内の解析的部分集合で $a=0$, $U=\mathrm{P}\Delta$ であるとしてよい．$0 \in X$ の基本近傍系

$$V_\nu \subset V, \nu = 1, 2, \ldots, \quad V_\nu \Supset V_{\nu+1}, \quad \bigcap_\nu V_\nu = \{0\}$$

で $V_\nu \setminus \Sigma(X)$ が連結なものがある (定理 6.4.16 参照).

定理 6.10.18 より $\underline{f}_0$ は $\mathcal{O}_{X,0}$ 上整である．従って，次のモニック方程式が成立しているとしてよい．

$$f(x)^d + \sum_{j=1}^d a_j(x) f(x)^{d-j} = 0, \tag{1}$$

$$x \in X \setminus \Sigma(X), \quad a_j \in \mathcal{O}(X).$$

主張が成立しないと仮定する．すると 0 に収束する点列 $x_\nu, y_\nu \in V_\nu \setminus \Sigma(X)$, $\nu = 1, 2, \ldots,$ が存在して

$$\lim_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = \alpha, \quad \lim_{\nu \to \infty} f(y_\nu) = \beta, \quad \alpha \neq \beta$$

となる．$V_\nu \setminus \Sigma(X)$ は連結なので，x_ν と y_ν を結ぶ曲線 $\Gamma_\nu \subset V_\nu \setminus \Sigma(X)$ が取れる．閉円板 $\overline{\Delta(\alpha,\rho)} \not\ni \beta$ を任意にとりその周を C_ρ とする．$\nu \gg 1$ に対し，

$$f(x_\nu) \in \Delta(\alpha,\rho), \quad f(y_\nu) \notin \overline{\Delta(\alpha,\rho)}.$$

従って，ある $w_\nu \in \Gamma_\nu$ が在って $f(w_\nu) \in C_\rho$. 部分列 $\{w_{\nu_\mu}\}_\mu$ を取ることにより，極限 $\gamma_\rho = \lim_{\mu\to\infty} f(w_{\nu_\mu}) \in C_\rho$ が存在する．$\Gamma_{\nu_\mu} \to 0$ であるから (1) より

$$\gamma_\rho^d + \sum_{j=1}^d a_j(0) \gamma_\rho^{d-j} = 0.$$

$\rho > 0$ を動かすと，この方程式は根を無限個持つことになり，矛盾である．　□

この補題より次の定理が直ちに従う．

定理 1　複素空間 X 上の弱正則関数 f は，$\{a \in X;\ \underline{X}_a$ は既約$\}$ 上へ連続関数として一意的に拡張される．

注意 1　f と $a \in X$ を上述のものとする．$f(a)$ を a で連続拡張したときの極限

値とする．$\underline{f}_a$ は，$\mathcal{O}_{X,a}$ 上整であるから a の近傍で次のモニック方程式を満たす．

$$P(x;f)=f(x)^d+\sum_{\nu=1}^{d}c_\nu(x)f(x)^{d-\nu}=0.$$

ただし，c_ν は a の近傍で正則な関数である．そのようなモニック多項式で d が最小なものをとる．もし，$f(a)=0$ ならば，補題 1 とワイエルストラスの予備定理により，$c_\nu(a)=0, 0\le\nu\le d$ となり，$P(x;f)$ はワイエルストラス多項式になる．

補足 II: L. シュヴァルツの定理 7.3.17 の別証

定義 1　位相空間 F が**ベール** (Baire) **空間**であるとは，任意の内点を含まない可算個の閉集合 G_n $(n\in\mathbf{N})$ に対し和集合 $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}G_n$ も内点を含まないこととする．線形位相空間でかつベール空間であるものを**線形ベール空間**と呼ぶ．

問. 完備距離空間は，ベール空間であることを示せ．

補題 1　E を線形位相空間，F を線形ベール空間，$A:E\to F$ を連続線形全射とする．すると，$0\in E$ の任意の近傍 U に対し，$\overline{A(U)}$ は $0\in F$ を内点として含む．

証明　演算 $(x,y)\in E\times E\to x-y\in E$ の連続性より $0\in E$ の近傍 W があって $W-W\subset U$. $E=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\nu W$ であるから，$F=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\nu\overline{A(W)}$. $\nu\overline{A(W)}$ は閉集合であるから，仮定により，ある ν_0 が在り，$\nu_0\overline{A(W)}$ は内点を含む．従って，$\overline{A(W)}$ も内点 x_0 を含む．よって 0 は $\overline{A(W)}-x_0$ の内点である．

$$0\in\overline{A(W)}-x_0\subset\overline{A(W)}-\overline{A(W)}=\overline{A(W-W)}\subset\overline{A(U)}$$

より，0 は $\overline{A(U)}$ の内点である．　□

定理 1 (バナッハの開写像定理)　E をフレッシェ空間，F を線形ベール空間とする．$A:E\to F$ が連続線形全射ならば，A は開写像である．

証明　E はフレッシェであるから (7.3.10) で定義される完備距離 $d(x,w)$ を持つ．$d(x,w)$ は次の性質を持つことに注意する．

$$(1)\qquad d(x+v,w+v)=d(x,w),\quad d(-x,0)=d(x,0),$$
$$d(x+w,0)\le d(x+w,w)+d(w,0)=d(x,0)+d(w,0).$$

$U(\epsilon)=\{x\in E: d(x,0)<\epsilon\}$, $\epsilon>0$ とおく．任意の $\epsilon>0$ に対し $A(U(\epsilon))$ が $0\in F$ を内点として含むことを示せば十分である．補題 1 により，$0\in F$ の近傍 V があって $V\subset\overline{A(U(\epsilon))}$ が成立する．$U_\nu=U\left(\frac{\epsilon}{2^{\nu+1}}\right)$, $\nu=1,2,\ldots,$ とおく．各

$\overline{A(U_\nu)}$ に対し $0 \in F$ の近傍 V_ν を $V_\nu \subset \overline{A(U_\nu)}$, $V_\nu \supset V_{\nu+1}$, $\bigcap_{\nu=1}^\infty V_\nu = \{0\}$ が成立するようにとる．

主張 1　任意の $\epsilon > 0$ に対し $A(U(\epsilon)) \supset V_1$.

$\because$) 任意に $y = y_1 \in V_1$ をとる．$y_1 \in \overline{A(U_1)}$ であるから $(y_1 - V_2) \cap A(U_1) \neq \emptyset$. ある $y_2 \in V_2, x_1 \in U_1$ が在って，$y_1 - y_2 = A(x_1)$ となる．$y_2 \in \overline{A(U_2)}$ であるから，$(y_2 - V_3) \cap A(U_2) \neq \emptyset$. $y_3 \in V_3, x_2 \in U_2$ が在って，$y_2 - y_3 = A(x_2)$ が成立する．以下帰納的に，$x_\nu \in U_\nu$ と $y_\nu \in V_\nu$ を

$$y_\nu - y_{\nu+1} = A(x_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

ととる．$\{V_\nu\}_\nu$ の取り方から，$\lim_{\nu\to\infty} y_\nu = 0$.

$$\begin{aligned} y = y_1 &= A(x_1) + y_2 = A(x_1) + A(x_2) + y_3 \\ &= \cdots = \sum_{j=1}^{\nu} A(x_j) + y_{\nu+1} = A\left(\sum_{j=1}^{\nu} x_j\right) + y_{\nu+1}. \end{aligned} \tag{2}$$

$\sum_{\nu=1}^\infty x_\nu$ の収束を調べる．$x_\nu \in U_\nu = U(\frac{\epsilon}{2^{\nu+1}})$ より，任意の $\nu, \mu \in \mathbf{N}$ に対して (1) を用いて計算すると

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{j=1}^{\nu} x_j, \sum_{j=1}^{\nu+\mu} x_j\right) &= d\left(0, \sum_{j=\nu+1}^{\nu+\mu} x_j\right) \leq \sum_{j=\nu+1}^{\nu+\mu} d(0, x_j) \\ &< \sum_{j=\nu+1}^{\nu+\mu} \frac{\epsilon}{2^{j+1}} < \frac{\epsilon}{2^{\nu+1}}. \end{aligned}$$

従って，$\sum_{\nu=1}^\infty x_\nu$ はコーシー級数で収束する．極限を $w = \sum_{\nu=1}^\infty x_\nu$ とおくと，(2) より $y = A(w)$ となる．また

$$d(0, w) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} d(0, x_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{\nu+1}} = \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon.$$

よって，$A(U(\epsilon)) \supset V_1$ が示された．□

L. シュヴァルツの定理 7.3.17 の証明.

仮定. F は，線形ベール空間と仮定すれば十分である．

(イ) $A_0 = A + B : E \to F$ とおく．有限次元線形部分空間 $S \subset F$ があって A_0 と商写像 $F \to F/S$ の合成を $\check{A}_0$ とするとき，$\check{A}_0$ が全射であることを示せば十分である．

なぜならば，まず $S = S' \oplus (S \cap A_0(E))$ と S を直和分解する．代数的に $F = A_0(E) \oplus S'$ となる．S' は，有限次元であるから線形位相空間としてフレッシェである．また $\mathrm{Ker}\, A_0$ は閉であるから商空間 $E/\mathrm{Ker}\, A_0$ はハウスドルフである．次の連続線形全射と全単射を考える．

$$\widetilde{A}_0 : x \oplus y \in E \oplus S' \to A_0(x) + y \in F,$$

$$\widehat{A}_0 : [x] \oplus y \in \widehat{E} := (E/\mathrm{Ker}\, A_0) \oplus S' \to A_0(x) + y \in F.$$

定理 1 により $\widetilde{A}_0$ は，開写像であるから，$\widehat{A}_0$ も開写像である．従って，$\widehat{A}_0$ は線形位相同型であることがわかった．$(E/\mathrm{Ker}\, A_0) \oplus \{0\} (\subset \widehat{E})$ は閉であるから $\widehat{A}_0((E/\mathrm{Ker}\, A_0) \oplus \{0\}) = A_0(E)$ は閉である．$\mathrm{Coker} A_0 = F/A_0(E) \cong S'$ となるので，$\mathrm{Coker} A_0$ は有限次元である．

上記 S の存在を示そう．仮定により，$0 \in E$ のある凸近傍 U_0 で $-U_0 = U_0$ を満たし，かつ $K := \overline{B(U_0)}$ がコンパクトなものがある．A は全射なので，定理 1 により $V_0 := A(U_0)$ は開である．開被覆 $K \subset \bigcup_{b \in K}(b + \frac{1}{2}V_0)$ を考えると，K はコンパクトであるから，有限個の点 $b_j \in K$, $1 \leq j \leq l$ があって $K \subset \bigcup_{j=1}^{l} \left(b_j + \frac{1}{2}V_0\right)$. $S = \langle b_1, \ldots, b_l \rangle$ を $b_j, 1 \leq j \leq l$ で張られる有限次元部分空間とする．定理 7.3.5 により S は閉であるから，商空間 F/S は線形ベール空間になることに注意する．$\pi : F \to F/S$ を商写像とする．$\tilde{V}_0 = \pi(V_0)$ とおく．$\tilde{K} = \pi(K)$ はコンパクトである．$\tilde{K} \subset \frac{1}{2}\tilde{V}_0$ となっている．F を F/S で置き換えて，

$$K \subset \frac{1}{2}V_0$$

が初めから満たされているとして，A_0 が全射であることを示せば良い．

(ロ) $A_0(E)$ は，F の線形部分空間であるから，次より $A_0(E) = F$ が従う．

主張 2　上述の仮定の下で，$A_0(E) \supset V_0$.

$\because$) 任意の $y_0 \in V_0$ をとる．ある $x_0 \in U_0$ が在って $A(x_0) = y_0$. $y_1 = y_0 - A_0(x_0) = -B(x_0) \in K \subset \frac{1}{2}V_0 = A(\frac{1}{2}U_0)$ であるから，ある $x_1 \in \frac{1}{2}U_0$ で $A(x_1) = y_1$ となるものがある．

$$\begin{aligned} y_2 := y_1 - A_0(x_1) = -B(x_1) \in B\left(\frac{1}{2}U_0\right) &= \frac{1}{2}B(U_0) \\ \subset \frac{1}{2}K \subset \frac{1}{2^2}V_0 = A\left(\frac{1}{2^2}U_0\right). \end{aligned}$$

従って $x_2 \in \frac{1}{2^2}U_0$ が在って $y_2 = A(x_2)$. 以下順次，$x_\nu \in \frac{1}{2^\nu}U_0$, $y_\nu = A(x_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots,$ を

$$y_{\nu+1} = y_\nu - A_0(x_\nu) \in \frac{1}{2^\nu}K \subset A\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}U_0\right)$$

が満たされるように取ることができる．従って $\lim_{\nu\to\infty} y_\nu = 0$ が成立し，

$$y_{\nu+1} = y_\nu - A_0(x_\nu) = \cdots = y_0 - A_0\left(\sum_{j=0}^{\nu} x_j\right). \tag{3}$$

$\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ が収束するように取り直せることを示したい．(7.3.10) で定義される E の完備距離を d とし，$U(r)=\{x\in E; d(x,0)<r\}$ と書く．$0\in E$ の基本近傍系 $\{U_p\}_{p=0}^{\infty}$ を次のようにとる．

(i) U_0 は既に取ってあるが，$U_0 \subset U(1)$ が成り立つとしてよい．さらに，$U_p \subset U(2^{-p})$, $p=1,2,\ldots$.

(ii) 各 U_p は，凸かつ対称, $-U_p=U_p$, である．

(iii) $U_{p+1}\subset \frac{1}{2}U_p$, $p=0,1,\ldots$.

K の開被覆

$$K\subset A\left(\left(\bigcup_{\mu=1}^{\infty} 2^{\mu}U_p\right)\cap \frac{1}{2}U_0\right)=\bigcup_{\mu=1}^{\infty} A\left((2^{\mu}U_p)\cap\frac{1}{2}U_0\right)$$

を考えると，ある $N(p)(\geq 1)$ が存在して

$$K\subset A\left(\left(2^{N(p)}U_p\right)\cap\frac{1}{2}U_0\right) \tag{4}$$

となる．$N(p)<N(p+1)$ $(p=1,2,\ldots)$ が成立しているとしてよい．$0\leq \nu\leq N(1)$ に対しては上で取った x_ν をとり

$$\tilde{x}_0=x_0+\cdots+x_{N(1)}$$

とおく．以下順に，$N(p)<\nu\leq N(p+1)$ $(p=1,2,\ldots)$ に対しては (4) より

$$\frac{1}{2^{\nu-1}}K\subset A\left(\left(2^{N(p)-\nu+1}U_p\right)\cap\frac{1}{2^{\nu}}U_0\right)$$

が成立し, $y_\nu\in\frac{1}{2^{\nu-1}}K$ であったから, $x_\nu\in\left(2^{N(p)-\nu+1}U_p\right)\cap\frac{1}{2^\nu}U_0$ を $A(x_\nu)=y_\nu$ が成立するように取ることができる．すると

$$\begin{aligned}\tilde{x}_p &:= x_{N(p)+1}+\cdots+x_{N(p+1)}\in\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{N(p+1)-N(p)-1}}\right)U_p\\ &\subset 2U_p\subset U_{p-1}\subset U\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right);\end{aligned}$$

$$d(\tilde{x}_p,0)<\frac{1}{2^{p-1}}. \tag{5}$$

任意の $p>q>q_0$ に対し, (1) と (5) を使って

$$\begin{aligned}d\left(\sum_{\nu=0}^{p}\tilde{x}_\nu,\sum_{\nu=0}^{q}\tilde{x}_\nu\right)&\leq\sum_{\nu=q+1}^{p}d(\tilde{x}_\nu,0)<\sum_{\nu=q+1}^{p}\frac{1}{2^{\nu-1}}\\ &<\frac{1}{2^{q-1}}\leq\frac{1}{2^{q_0}}\to 0\quad (q_0\to\infty).\end{aligned}$$

よって $\sum_{\nu=0}^{\infty}\tilde{x}_\nu$ は，コーシー級数をなし，d は完備であるから極限 $w=\sum_{\nu=0}^{\infty}\tilde{x}_\nu$ が存在する．(3) より

$$y_{N(p+1)+1}=y_0-A_0\left(\sum_{\nu=0}^{p}\tilde{x}_\nu\right)$$

である．$p \to \infty$ として，$y_0 = A_0(w)$．よって, $A_0(E) \supset V_0$. □

注意 1 (1) 上記証明は，次の文献 [†] の Chap. IX, Theorem (1.8) b) の証明法による．

[†] J.-P. Demailly, Complex Analytic and Differentiable Geometry, 2012, www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/ .

(2) L. シュヴァルツの定理 7.3.17 において，既存の文献 (L. Schwartz, C.R. Paris **236** (1953), [一松], [Gu-R], [G-R1], [†] 等を参照) では F をフレッシェと仮定しているが，上述のようにベール空間と仮定すれば十分である．

補足 III: カルタンの行列分解 補題 4.2.2 の別証

§4.2 の議論では，行列の対数 $\log(\cdot)$ を用いる為に諸定数を決める手続きが複雑であった．ここでは，定数の決め方が簡易化された証明を与える．行列の $\exp(\cdot)$, $\log(\cdot)$ も用いない．

一般に p 次正方行列（複素係数）A に対し作用素ノルム

$$\|A\| = \max\{\|A\xi\|; \xi \in \mathbf{C}^p, \|\xi\| = 1\}$$

を考える．$A = A(z)$ が，部分集合 $E \subset \mathbf{C}^n$ 上定義された p 次正方行列値関数であるとき，$\|A\|_E = \sup\{\|A(z)\|; z \in E\}$ と書く．さらに，B も p 次正方行列とすると，次が成立する：

(i) A の成分を a_{ij} として，$\frac{1}{p}\|A\| \leq \max_{i,j}\{|a_{ij}|\} \leq \|A\|$.

(ii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

(iii) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

(iv) $A = A(z) (z \in E)$ に対し，$\|A\|_E \leq \varepsilon < 1$ ならば，逆行列 $(\mathbf{1}_p - A(z))^{-1}$ が存在して次が成立する．

$$(\mathbf{1}_p - A(z))^{-1} = \mathbf{1}_p + A(z) + A(z)^2 + \cdots.$$

ここで，右辺は E 上一様収束し，

$$\|(\mathbf{1}_p - A(z))^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}, \quad \|(\mathbf{1}_p - A(z))^{-1} - \mathbf{1}_p\| \leq \frac{\|A(z)\|}{1-\varepsilon}.$$

特に，$\varepsilon = \frac{1}{2}$ ならば，$\|(\mathbf{1}_p - A(z))^{-1}\| \leq 2$.

(v) $k = 0, 1, \ldots$ に対し，$0 < \varepsilon_k < 1$ と p 次正方行列値関数 $A_k(z), z \in E$ が与えられ，$\|A_k\|_E \leq \varepsilon_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$ が成立しているとする．このとき，次の 2 つの無限乗積

$$\lim_{k\to\infty}(\mathbf{1}_p - A_0(z))\cdots(\mathbf{1}_p - A_k(z)),$$
$$\lim_{k\to\infty}(\mathbf{1}_p - A_k(z))\cdots(\mathbf{1}_p - A_0(z))$$

は E 上一様収束し，極限は共に可逆行列値関数である．

(v) は，$\|\prod_{j=0}^{k}(\mathbf{1}_p - A_j)\|_E \le \prod_{j=0}^{k}(1+\|A_j\|_E)$ と次の不等式を用いると簡単に導かれる：$l>k\ge 1$ に対し

$$\begin{aligned}\left\|\prod_{j=k}^{l}(\mathbf{1}_p - A_j) - \mathbf{1}_p\right\|_E &\le \prod_{j=k}^{l}(1+\|A_j\|_E) - 1\\ &\le \exp\left(\sum_{j=k}^{l}\|A_j\|_E\right) - 1.\end{aligned}$$

可逆性については $(\mathbf{1}_p - A_k(z))^{-1}$ の無限乗積に (iii) を用いて同様の議論を適用する．以上の性質は，これより断りなく用いることとする．

補題 4.2.2 の証明： A を補題 4.2.2 で与えられたものとする．$A = \mathbf{1}_p - B_1$ とおく．この B_1 に (4.2.6) を適用すると，

(1) $$B_1 = B_1' + B_1'',$$

(2) $$\begin{aligned}\|B_1'\|_{\tilde{E}'_{(2)}} &\le \frac{1}{2\pi}\frac{2^2}{\delta}L\|B_1\|_{\tilde{E}'_{(1)}\cap\tilde{E}''_{(1)}},\\ \|B_1''\|_{\tilde{E}''_{(2)}} &\le \frac{1}{2\pi}\frac{2^2}{\delta}L\|B_1\|_{\tilde{E}'_{(1)}\cap\tilde{E}''_{(1)}}.\end{aligned}$$

$(\mathbf{1}_p - B_1')^{-1}$, $(\mathbf{1}_p - B_1'')^{-1}$ の存在を仮定して，

$$\begin{aligned}M(B_1', B_1'') &= (\mathbf{1}_p - B_1')^{-1}(\mathbf{1}_p - B_1' - B_1'')(\mathbf{1}_p - B_1'')^{-1}\\ &= \mathbf{1}_p - N(B_1', B_1'')\end{aligned}$$

とおくと，

$$A = \mathbf{1}_p - B_1 = (\mathbf{1}_p - B_1')M(B_1', B_1'')(\mathbf{1}_p - B_1'')$$

となる．$M(B_1', B_1'')$ を A に見立てて繰り返すと，帰納的に $k = 1, 2, \ldots$ に対し

$$A = (\mathbf{1}_p - B_1')\cdots(\mathbf{1}_p - B_k')M(B_k', B_k'')(\mathbf{1}_p - B_k'')\cdots(\mathbf{1}_p - B_1'')$$

を得る．これを然るべく収束させる為に，次の評価が鍵となる．

補題 1 S, T を p 次正方行列とし，$\max\{\|S\|, \|T\|\} \le \frac{1}{2}$ とすると，

$$\|N(S,T)\| \le 2^2(\max\{\|S\|, \|T\|\})^2.$$

証明 $(\mathbf{1}_p - T)^{-1} = \mathbf{1}_p + T(\mathbf{1}_p - T)^{-1} = \mathbf{1}_p + T + T^2(\mathbf{1}_p - T)^{-1}$ に注意して，

$$M(S,T) = (\mathbf{1}_p - S)^{-1}(\mathbf{1}_p - S - T)(\mathbf{1}_p - T)^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mathbf{1}_p - (\mathbf{1}_p - S)^{-1}T)(\mathbf{1}_p - T)^{-1} \\
&= \mathbf{1}_p + T + T^2(\mathbf{1}_p - T)^{-1} \\
&\quad - (\mathbf{1}_p + S(\mathbf{1}_p - S)^{-1})T(\mathbf{1}_p + T(\mathbf{1}_p - T)^{-1}) \\
&= \mathbf{1}_p + T + T^2(\mathbf{1}_p - T)^{-1} \\
&\quad - T - T^2(\mathbf{1}_p - T)^{-1} - S(\mathbf{1}_p - S)^{-1}T(\mathbf{1}_p - T)^{-1} \\
&= \mathbf{1}_p - S(\mathbf{1}_p - S)^{-1}T(\mathbf{1}_p - T)^{-1},
\end{aligned}
$$

$$
N(S,T) = S(\mathbf{1}_p - S)^{-1}T(\mathbf{1}_p - T)^{-1}.
$$

条件より，

$$
\|N(S,T)\| \leq \|S\| \cdot 2 \cdot \|T\| \cdot 2 \leq 2^2(\max\{\|S\|, \|T\|\})^2. \qquad \triangle
$$

(3) $$\varepsilon_1 = \max\left\{\|B_1'\|_{\tilde{E}'_{(2)}}, \|B_1''\|_{\tilde{E}''_{(2)}}\right\} \left(\leq \frac{2L}{\pi\delta}\|B_1\|_{\tilde{E}'_{(1)} \cap \tilde{E}''_{(1)}}\right)$$

とおく．ここで括弧内の不等式は (2) による．$\frac{\pi\delta}{2^5 L} \leq \frac{1}{2}$ が満たされるように，必要ならば $\delta > 0$ を小さく取り直す．$B_1 = \mathbf{1}_p - A$ は，次を満たす様に取る．

$$
\|B_1\|_{\tilde{E}'_{(1)} \cap \tilde{E}''_{(1)}} \leq \frac{\pi^2\delta^2}{2^6 L^2}.
$$

すると，

(4) $$\varepsilon_1 \leq \frac{\pi\delta}{2^5 L} \leq \frac{1}{2},$$

(5) $$
\begin{aligned}
A(z) = (\mathbf{1}_p - B_1(z)) &= (\mathbf{1}_p - B_1'(z))(\mathbf{1}_p - N(B_1'(z), B_1''(z))) \\
&\quad \cdot (\mathbf{1}_p - B_1''(z)), \quad z \in \tilde{E}'_{(2)} \cap \tilde{E}''_{(2)}.
\end{aligned}
$$

以下，帰納的に構成してゆく．$j = 1, \ldots, k (\in \mathbf{N})$ に対し p 次正方行列値正則関数

$$
B_j'(z) \ (z \in \tilde{E}'_{(j+1)}), \quad B_j''(z) \ (z \in \tilde{E}''_{(j+1)})
$$

が，次を満たすように決まったとする：

(6) $$\varepsilon_j := \max\left\{\|B_j'\|_{\tilde{E}'_{(j+1)}}, \|B_j''\|_{\tilde{E}''_{(j+1)}}\right\} \leq \frac{\pi\delta}{2^{j+4}L} \ \left(\leq \frac{1}{2^j}\right), \ 1 \leq j \leq k,$$

(7) $$
\begin{aligned}
A(z) &= (\mathbf{1}_p - B_1'(z)) \cdots (\mathbf{1}_p - B_k'(z)) \cdot (\mathbf{1}_p - N(B_k'(z), B_k''(z))) \\
&\quad \cdot (\mathbf{1}_p - B_k''(z)) \cdots (\mathbf{1}_p - B_1''(z)), \quad z \in \tilde{E}'_{(k+1)} \cap \tilde{E}''_{(k+1)}.
\end{aligned}
$$

$k = 1$ の場合は，(4), (5) により成立している．

$z \in \tilde{E}'_{(k+2)} \cap \tilde{E}''_{(k+2)}$ に対し $B_{k+1}(z) = N(B_k'(z), B_k''(z))$ として，本文 p. 101

にある $\gamma'_{(k+1)}, \gamma''_{(k+1)}$ を用いて

$$B'_{k+1}(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'_{(k+1)}} \frac{B_{k+1}(z',\zeta)}{\zeta - z_n}d\zeta, \quad (z', z_n) \in \tilde{E}'_{(k+2)},$$

$$B''_{k+1}(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma''_{(k+1)}} \frac{B_{k+1}(z',\zeta)}{\zeta - z_n}d\zeta, \quad (z', z_n) \in \tilde{E}''_{(k+2)}$$

とおく．上記被積分関数内で，$|\zeta - z_n| \geq \frac{\delta}{2^{k+2}}$ であることに注意すると，(6) と補題 1 より，

(8)
$$\begin{aligned}\varepsilon_{k+1} &\leq \frac{L}{2\pi}\frac{2^{k+2}}{\delta}\|N(B'_k, B''_k)\|_{\tilde{E}'_{(k+1)}\cap\tilde{E}''_{(k+1)}} \\ &\leq \frac{L}{2\pi}\frac{2^{k+2}}{\delta}2^2\varepsilon_k^2 \leq \frac{1}{2}\varepsilon_k \leq \frac{\pi\delta}{2^{k+5}L},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_p - N(B'_k(z), B''_k(z)) = (\mathbf{1}_p - B'_{k+1}(z))(\mathbf{1}_p - N(B'_{k+1}(z), B''_{k+1}(z))) \\ \cdot (\mathbf{1}_p - B''_{k+1}(z)), \quad z \in \tilde{E}'_{(k+2)} \cap \tilde{E}''_{(k+2)}.\end{aligned}$$

よって，(6) 及び (7) は，$k+1$ で成立する，

以上より，次の無限乗積

$$A'(z) = \lim_{k\to\infty}(\mathbf{1}_p - B'_1(z))\cdots(\mathbf{1}_p - B'_k(z)), \quad z \in \tilde{E}' := \bigcap_{k=1}^{\infty}\tilde{E}'_{(k)},$$

$$A''(z) = \lim_{k\to\infty}(\mathbf{1}_p - B''_k(z))\cdots(\mathbf{1}_p - B''_1(z)), \quad z \in \tilde{E}'' := \bigcap_{k=1}^{\infty}\tilde{E}''_{(k)}$$

はそれぞれの定義域で一様収束し，その内部で可逆な p 次正方行列値正則関数となる．$z \in \tilde{E}' \cap \tilde{E}''$ に対し，(6) と補題 1 より

$$\|N(B'_k(z), B''_k(z))\| \leq 2^2\varepsilon_k^2 \leq \frac{1}{2^{2k-2}} \longrightarrow 0 \qquad (k \to \infty)$$

であるから，(7) より $A(z) = A'(z)A''(z) = A'(z)(A''(z)^{-1})^{-1}$ を得る． □

注意 1 (評価付き)　補題 4.2.2 の上述証明において E', E'', U で決まる正定数 η, C と E' を内部に含む閉直方体近傍 $\tilde{E}'$ および E'' を内部に含む閉直方体近傍 $\tilde{E}''$ が $\tilde{E}' \cap \tilde{E}'' \subset U$ を満たす様に存在して，$A = \mathbf{1}_p - B$ と書くとき，$\|B\|_U \leq \eta$ ならば $A' = \mathbf{1}_p - B'$, $A'' = \mathbf{1}_p - B''$ を

$$\mathbf{1}_p - B(z) = (\mathbf{1}_p - B'(z))(\mathbf{1}_p - B''(z)), \quad z \in \tilde{E}' \cap \tilde{E}'',$$

$$\max\{\|B'\|_{\tilde{E}'}, \|B'''\|_{\tilde{E}''}\} \leq C\|B\|_U$$

を満たすようにとることができる．証明は，上記議論と (3)，(8) による．