カルタンの融合補題の簡易化証明

野口潤次郎

2016(H28).07.07

4.2 カルタンの融合補題

領域 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 上の連接層 $\mathscr{F} \to \Omega$ を考える．$\mathscr{F}$ の局所有限生成系が隣接する閉部分領域 $E', E''(\Subset \Omega)$ 上にあるとき，それ等を融合して $E' \cup E''$ 上で $\mathscr{F}$ の有限生成系を作る必要がある．まずは，行列に関する基本的な事項から始めよう．

4.2.1 行列・行列値関数．

これからの議論で必要になる，行列・行列値関数の列，級数，無限乗積に関する事項を準備する．

一般に $p(\in \mathbf{N})$ 次（複素）正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し二つのノルムが考えられる：

$$\|A\|_\infty = \max_{i,j}\{|a_{ij}|\},$$
$$\|A\| = \max\{\|A\xi\|; \xi \in \mathbf{C}^p, \|\xi\| = 1\}.$$

$\xi = {}^t(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ を考えることにより，

$$\|A\|_\infty \le \|A\| \le p\,\|A\|_\infty$$

が成立するので，収束についてはどちらで考えても同じである．

行列の積については，$\|A\|_\infty$ よりも $\|A\|$ の方が性質が良いので以降 $\|A\|$ を用いる．$\|A\|$ は**作用素ノルム**と呼ばれる．

$A = A(z)$ が，部分集合 $E \subset \mathbf{C}^n$ 上定義された p 次正方行列値関数であるとき，

$$\|A\|_E = \sup\{\|A(z)\|; z \in E\}$$

と書く．$\mathbf{1}_p$ で p 次単位行列を表す．

命題 4.2.1. A を p 次正方行列または p 次正方行列値関数 $A(z)(z \in E)$ とする．B をもう一つの p 次正方行列とすると，次が成立する：

(i) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$.

(ii) $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.

(iii) $A = A(z)(z \in E)$ に対し，$\|A\|_E \le \varepsilon < 1$ ならば，逆行列 $(\mathbf{1}_p - A(z))^{-1}$ が存在して次が成立する．

$$(\mathbf{1}_p - A(z))^{-1} = \mathbf{1}_p + A(z) + A(z)^2 + \cdots.$$

ここで，右辺は E 上一様収束し，$\|(\mathbf{1}_p - A)^{-1}\|_E \le \frac{1}{1-\varepsilon}$．特に，$\varepsilon = \frac{1}{2}$ ならば，$\|(\mathbf{1}_p - A)^{-1}\|_E \le 2$.

(iv) $k = 0, 1, \ldots$ に対し，$0 < \varepsilon_k < 1$ と p 次正方行列値関数 $A_k(z), z \in E$ が与えられ，$\|A_k\|_E \le \varepsilon_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$ が満たされているとする．このとき，

次の二つの無限乗積

$$\lim_{k\to\infty}(\mathbf{1}_p - A_0(z))\cdots(\mathbf{1}_p - A_k(z)),$$
$$\lim_{k\to\infty}(\mathbf{1}_p - A_k(z))\cdots(\mathbf{1}_p - A_0(z))$$

は E 上一様収束し，極限は共に可逆行列値関数である．

証明 (i), (ii) は定義より直ちに従う．(iii) は，次の恒等式と不等式で $k\to\infty$ とすればよい：

$$(\mathbf{1}_p - A(z))(\mathbf{1}_p + A(z) + A(z)^2 + \cdots + A(z)^k) = \mathbf{1}_p - A(z)^{k+1},$$
$$\|\mathbf{1}_p + A(z) + A(z)^2 + \cdots + A(z)^k\|_E \leq \sum_{j=0}^{k} \|A\|_E^j \leq \sum_{j=0}^{k} \varepsilon^j = \frac{1-\varepsilon^{k+1}}{1-\varepsilon}.$$

(iv) は，どちらも同じような証明であるが，二番目の式を示そう．

$$G_k(z) = (\mathbf{1}_p - A_k(z))\cdots(\mathbf{1}_p - A_0(z)) = \prod_{j=k}^{0}(\mathbf{1}_p - A_j(z)), \quad k = 0, 1, \ldots$$

とおくとき，列 $\{G_k\}_{k=0}^{\infty}$ が一様コーシー列であることと，$\{G_k^{-1}\}_{k=0}^{\infty}$ も一様収束することとを示せば十分である．$C_0 = \exp(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k)$ とおくと，次が成立する：

$$\begin{aligned}\|G_k\|_E &\leq \prod_{j=k}^{0}\|\mathbf{1}_p - A_j\|_E \leq \prod_{j=0}^{k}(1+\|A_j\|_E) \leq \prod_{j=0}^{k}(1+\varepsilon_j)\\ &= \exp\left(\sum_{j=0}^{k}\log(1+\varepsilon_j)\right) < \exp\left(\sum_{j=0}^{k}\varepsilon_j\right) < C_0.\end{aligned}$$

$l > k > 0$ に対し，上式を用いて，

$$\begin{aligned}&\|G_l - G_k\|_E\\ &\leq \|G_k\|_E \cdot \|(\mathbf{1}_p - A_l)(\mathbf{1}_p - A_{l-1})\cdots(\mathbf{1}_p - A_{k+1}) - \mathbf{1}_p\|_E\\ &\leq C_0\| - A_l - A_{l-1} - \cdots - A_{k+1} + A_l A_{l-1} + \cdots\\ &\qquad\qquad + (-1)^{l-k}A_l\cdots A_{k+1}\|_E\\ &\leq C_0(\|A_l\|_E + \|A_{l-1}\|_E + \cdots + \|A_{k+1}\|_E + \|A_l\|_E\cdot\|A_{l-1}\|_E + \cdots\\ &\qquad\qquad + \|A_l\|_E\cdots\|A_{k+1}\|_E)\\ &= C_0\left(\prod_{j=l}^{k+1}(1+\|A_j\|_E) - 1\right) \leq C_0\left(\prod_{j=k+1}^{l}(1+\varepsilon_j) - 1\right)\\ &\leq C_0\left(\exp\left(\sum_{j=k+1}^{l}\varepsilon_j\right) - 1\right) \longrightarrow 0 \quad (l > k \to \infty).\end{aligned}$$

が成立する．従って，$\tau_j \in \Gamma(W' \cup W'', \mathscr{F})$, $1 \le j \le p$, を

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_p \end{pmatrix} = \begin{cases} \hat{A}'^{-1}\,\tilde{\sigma}', & W' \text{上}, \\ \hat{A}''\,\tilde{R}^{-1}\,\tilde{\sigma}'', & W'' \text{上}, \end{cases}$$

と定義することができる．$\hat{A}'^{-1}$ と $\hat{A}''\,\tilde{R}^{-1}$ は可逆行列であるから，τ_j, $1 \le j \le p$, は $W' \cup W''$ 上で $\mathscr{F}$ を生成する． □

上で得た (τ_j) を (σ'_i) と (σ''_h) を**融合**して作られた $\mathscr{F}$ の有限生成系と呼ぶ.

$G_k^{-1} = \prod_{j=0}^{k}(\mathbf{1}_p - A_j)^{-1}$ については，$B_k = -A_k(\mathbf{1}_p - A_k)^{-1}$ とおくと，

$$(\mathbf{1}_p - A_k)^{-1} = \mathbf{1}_p - B_k$$

が成立し，(iii) の結果を用いると，

$$\|B_k\|_E \leq \|A_k\|_E \cdot \|(\mathbf{1}_p - A_k)^{-1}\|_E \leq \frac{\varepsilon_k}{1 - \varepsilon_k}.$$

$0 < \theta := \max_k\{\varepsilon_k\} < 1$ とおくと，

$$\|B_k\|_E \leq \frac{\varepsilon_k}{1 - \theta}.$$

従って，任意の $k \gg 1$ に対し B_k も A_k が満たすべき条件を満たしているので，$\{G_k^{-1}\}_{k=0}^{\infty}$ も E 上一様収束する． □

p 次正方行列 S, T に対し，$(\mathbf{1}_p - S)^{-1}, (\mathbf{1}_p - T)^{-1}$ の存在を仮定して，

$$\begin{aligned} M(S,T) &= (\mathbf{1}_p - S)^{-1}(\mathbf{1}_p - S - T)(\mathbf{1}_p - T)^{-1}, \\ N(S,T) &= \mathbf{1}_p - M(S,T) \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

とおく．次の補題が，後出の収束の議論での鍵となる．

補題 4.2.3. S, T を p 次正方行列とし，$\max\{\|S\|, \|T\|\} \leq \frac{1}{2}$ とすると，

$$\|N(S,T)\| \leq 2^2(\max\{\|S\|, \|T\|\})^2.$$

証明 $(\mathbf{1}_p - T)^{-1} = \mathbf{1}_p + T(\mathbf{1}_p - T)^{-1} = \mathbf{1}_p + T + T^2(\mathbf{1}_p - T)^{-1}$ に注意して，

$$\begin{aligned} M(S,T) &= (\mathbf{1}_p - S)^{-1}(\mathbf{1}_p - S - T)(\mathbf{1}_p - T)^{-1} \\ &= (\mathbf{1}_p - (\mathbf{1}_p - S)^{-1}T)(\mathbf{1}_p - T)^{-1} \\ &= \mathbf{1}_p + T + T^2(\mathbf{1}_p - T)^{-1} \\ &\quad - (\mathbf{1}_p + S(\mathbf{1}_p - S)^{-1})T(\mathbf{1}_p + T(\mathbf{1}_p - T)^{-1}) \\ &= \mathbf{1}_p + T + T^2(\mathbf{1}_p - T)^{-1} \\ &\quad - T - T^2(\mathbf{1}_p - T)^{-1} - S(\mathbf{1}_p - S)^{-1}T(\mathbf{1}_p - T)^{-1} \\ &= \mathbf{1}_p - S(\mathbf{1}_p - S)^{-1}T(\mathbf{1}_p - T)^{-1}, \\ N(S,T) &= S(\mathbf{1}_p - S)^{-1}T(\mathbf{1}_p - T)^{-1}. \end{aligned}$$

条件より，

$$\|N(S,T)\| \leq \|S\| \cdot 2 \cdot \|T\| \cdot 2 \leq 2^2(\max\{\|S\|, \|T\|\})^2.$$ □

4.2.2 H. カルタンの行列分解． 次の状況を設定する．

4.2.4 (**閉直方体**)．ここでは，閉直方体や閉長方形と言えば，もちろん有界で，辺は座標軸に平行で，ある辺の幅が 0 に退化する場合も含むこととする．

$E', E'' \Subset \Omega$ は閉直方体で次の様に表されるものとする．閉直方体 $F \Subset \mathbf{C}^{n-1}$ と一辺 ℓ を共有する閉長方形 $E'_n, E''_n \Subset \mathbf{C}$ があり

$$\begin{aligned} &E' = F \times E'_n, \qquad E'' = F \times E''_n, \\ &(\ell = E'_n \cap E''_n), \end{aligned}$$

と表される．

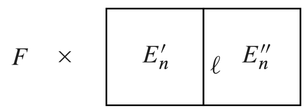

図 4.2: 隣接閉直方体

p 次複素正則行列のなす群を $GL(p;\mathbf{C})$ とする．次の行列分解は、H. カルタン [3] による．

補題 4.2.5 (H. カルタンの行列分解)．記号は、上述のものとする．$\mathbf{1}_p$ の近傍 $V_0 \subset GL(p;\mathbf{C})$ が存在して $F \times \ell$ の近傍 U 上正則な行列値関数 $A : U \to V_0$ に対し $E'(E'')$ の近傍 $U'(U'')$ 上の行列値正則関数 $A' : U' \to GL(p;\mathbf{C})$ $(A'' : U'' \to GL(p;\mathbf{C}))$ が存在して $F \times \ell$ のある近傍上 $A = A' \cdot A''$ が成立する．

証明 F, E'_n, E''_n を各辺同じ長さ $\delta > 0$ だけ外へ広げた閉長方形と閉直方体を $\tilde{F}$, $\tilde{E}'_{n(1)}$, $\tilde{E}''_{n(1)}$ とする．$\delta > 0$ を十分小さく取れば，

$$F \times \ell \subset \tilde{F} \times (\tilde{E}'_{n(1)} \cap \tilde{E}''_{n(1)}) \Subset U$$

が成立しているとしてよい．境界を図 4.3 の様に

$$\partial\left(\tilde{E}'_{n(1)} \cap \tilde{E}''_{n(1)}\right) = \gamma_{(1)} = \gamma'_{(1)} + \gamma''_{(1)} \tag{4.2.6}$$

とおく．同様に，

E'_n から $\tilde{E}'_{n(1)}$ (E' から $\tilde{E}'_{(1)}$) へ広げた幅 δ を内側の $\frac{\delta}{2}$ を残し，外側の $\frac{\delta}{2}$ を 2 分割法で順次内側に小さく入れてゆく．つまり $\tilde{E}'_{n(1)}$ から $\frac{\delta}{4}$ だけ内側に入った閉長方形を $\tilde{E}'_{n(2)}$ とし，$\tilde{E}'_{n(k)}$ まで決まったとして，その内側に $\frac{\delta}{2^{k+1}}$ だけ内側に入った閉長方形を $\tilde{E}'_{n(k+1)}$ とする（図 4.4）．

また,

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_{p'} & A \\ \hline -B & \mathbf{1}_{p''} - BA \end{array}\right)$$

とおく．(4.2.18) より，$BA\,\sigma'' = \sigma''$ であることを使うと

$$\tilde{\sigma}' = \tilde{A}\,\tilde{\sigma}'' \tag{4.2.19}$$

となる．基本変形の繰り返しである行列

$$\begin{aligned} P &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_{p'} & A \\ \hline 0 & \mathbf{1}_{p''} \end{array}\right), \quad P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_{p'} & -A \\ \hline 0 & \mathbf{1}_{p''} \end{array}\right), \\ Q &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_{p'} & 0 \\ \hline B & \mathbf{1}_{p''} \end{array}\right), \quad Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_{p'} & 0 \\ \hline -B & \mathbf{1}_{p''} \end{array}\right) \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

を取り $\tilde{A}$ を右と左から変形すると $Q\,\tilde{A}\,P^{-1} = \mathbf{1}_p$ を得る．$\tilde{A} = Q^{-1}P$ であるから $R = P^{-1}Q$ とおけば,

$$\begin{aligned} R &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_{p'} & -A \\ \hline 0 & \mathbf{1}_{p''} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_{p'} & 0 \\ \hline B & \mathbf{1}_{p''} \end{array}\right), \\ \tilde{A}R &= \mathbf{1}_p. \end{aligned} \tag{4.2.21}$$

R は，その形から A, B をどのように取っても可逆であることに注意する．A, B の成分 a_{jk}, b_{kh} は，$E' \cap E'' = F \times \ell$ の近傍上正則であるから系 1.2.23 により，その適当な近傍 $W_0(\Subset U' \cap U'')$ 上多項式 $\tilde{a}_{jk}, \tilde{b}_{kh}$ で一様近似できる．それ等を用いて (4.2.21) により作られる行列を $\tilde{R}$ とする．それ等一様近似を十分小さくすれば補題 4.2.5 の $\mathbf{1}_p$ の近傍 V_0 に対し

$$\hat{A}(z) = \tilde{A}(z)\,\tilde{R}(z) \in V_0, \qquad z \in W_0 \tag{4.2.22}$$

が成り立つ．すると補題 4.2.5 により，E' (および E'') の適当な近傍 W' (および W'') とそこで正則な関数を成分とする p 次可逆行列 $\hat{A}'$ (および $\hat{A}''$) が存在して，$W' \cap W''(\subset W_0)$ 上

$$\hat{A} = \hat{A}'\,\hat{A}'' \tag{4.2.23}$$

と書ける．これと (4.2.22) より $\tilde{A} = \hat{A}'\hat{A}''\tilde{R}^{-1}$ となり，(4.2.19) より $W' \cap W''$ 上

$$\hat{A}'^{-1}\,\tilde{\sigma}' = \hat{A}''\,\tilde{R}^{-1}\,\tilde{\sigma}'' \tag{4.2.24}$$

注意 4.2.16 (評価付き). 補題 4.2.5 において E', E'', U で決まる正定数 η, C と E' を内部に含む閉直方体近傍 $\tilde{E}'$ および E'' を内部に含む閉直方体近傍 $\tilde{E}''$ が $\tilde{E}' \cap \tilde{E}'' \subset U$ を満たす様に存在して，$A = \mathbf{1}_p - B$ と書くとき，$\|B\|_U \leq \eta$ ならば $A' = \mathbf{1}_p - B'$, $A'' = \mathbf{1}_p - B''$ を

$$A(z) = A'(z)A''(z), \quad z \in \tilde{E}' \cap \tilde{E}'',$$
$$\max\{\|B'\|_{\tilde{E}'}, \|B''\|_{\tilde{E}''}\} \leq C\|B\|_U$$

を満たすようにとることができる．証明は，上記議論と (4.2.10)，(4.2.15) による．

4.2.3　融合補題．

次が H. カルタン [3] による融合補題である．岡は，第 VII 論文の序文脚注で，この論文の定理に負うところもまた大きいと書いている[1)].

補題 4.2.17 (カルタンの融合補題)**.** $E' \subset U'$, $E'' \subset U''$ を補題 4.2.5 のものとする．連接層 $\mathscr{F} \to \Omega$ の U' 上の有限個の切断 $\sigma'_j \in \Gamma(U', \mathscr{F}), 1 \leq j \leq p'$, は U' 上 $\mathscr{F}$ を生成しているとする．同様に，$\sigma''_k \in \Gamma(U'', \mathscr{F}), 1 \leq k \leq p''$, は U'' 上 $\mathscr{F}$ を生成しているとする．更に $a_{jk}, b_{kj} \in \mathcal{O}(U' \cap U'')$, $1 \leq j \leq p'$, $1 \leq k \leq p''$, が存在して

$$\sigma'_j = \sum_{k=1}^{p''} a_{jk}\sigma''_k, \quad \sigma''_k = \sum_{h=1}^{p'} b_{kh}\sigma'_h$$

と表されているとする．

　このとき近傍 $W \supset E' \cup E'', W \subset U' \cup U''$ と $\Gamma(W, \mathscr{F})$ の有限個の切断 $\sigma_l, 1 \leq l \leq p = p' + p''$, が存在して，それらが W 上 $\mathscr{F}$ を生成する．

証明　列ベクトルと行列を $\sigma' = {}^t(\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{p'})$, $\sigma'' = {}^t(\sigma''_1, \ldots, \sigma''_{p''})$, $A = (a_{jk})$, $B = (b_{kh})$ とおくと

$$\sigma' = A\,\sigma'', \qquad \sigma'' = B\,\sigma'. \tag{4.2.18}$$

σ', σ'' に 0 を加えて個数を合わせ次のようにおく．

$$\tilde{\sigma}' = \begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \vdots \\ \sigma'_{p'} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\sigma}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \sigma''_1 \\ \vdots \\ \sigma''_{p''} \end{pmatrix}.$$

[1)]第 VII 論文の序文の脚注 (1) でご自分の論文を引用し、脚注 (2) で “H. カルタン [40] の論文情報の引用; dont nous devons beaucoup aussi aux théorèmes” と書いている．複数形になっているのは，主に前の補題 4.2.5 とこの補題 4.2.17 のことと思われる．

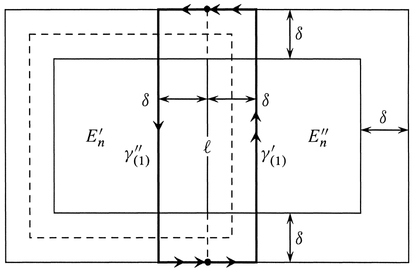

図 4.3: 隣接閉直方体の δ-閉近傍

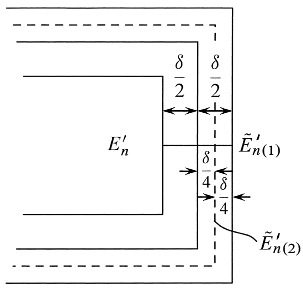

図 4.4: 閉直方体の $\frac{\delta}{2^k}$-閉近傍

$$\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{8}+\cdots=\frac{\delta}{2}$$

であるから,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\tilde{E}'_{n(k)}=E'_n \text{ を } \frac{\delta}{2} \text{ だけ各辺を外側へ広げた閉長方形}$$

である．$\tilde{E}''_{n(k)}$ も同様に定める．(4.2.6) と同じ様に

$$\partial\left(\tilde{E}'_{n(k)}\cap\tilde{E}''_{n(k)}\right)=\gamma_{(k)}=\gamma'_{(k)}+\gamma''_{(k)} \tag{4.2.7}$$

とおく．E', E'' の閉近傍直方体をそれぞれ次の様に定める．

$$\tilde{E}'_{(k)}=\tilde{F}\times\tilde{E}'_{n(k)},\qquad \tilde{E}''_{(k)}=\tilde{F}\times\tilde{E}''_{n(k)}.$$

$B_1(z)=\mathbf{1}_p-A(z)$ とおく．$(z', z_n)\in\tilde{E}'_{(2)}\cap\tilde{E}''_{(2)}$ に対しコーシーの積分表示を

用いて次の様に表す.

$$
\begin{aligned}
B_1(z', z_n) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{(1)}} \frac{B_1(z',\zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'_{(1)}} \frac{B_1(z',\zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma''_{(1)}} \frac{B_1(z',\zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta \\
&= B'_1(z', z_n) + B''_1(z', z_n).
\end{aligned} \tag{4.2.8}
$$

$B'_1(z', z_n)$ は, $(z', z_n) \in \tilde{E}'_{(2)}$ で正則, $B''_1(z', z_n)$ は, $(z', z_n) \in \tilde{E}''_{(2)}$ で正則である.

$$
|z_n - \zeta| \geq \frac{\delta}{4}, \qquad {}^{\forall}(z', z_n) \in \tilde{E}'_{(2)}, \quad {}^{\forall}\zeta \in \gamma'_{(1)} \tag{4.2.9}
$$

となっている. L を曲線 $\gamma'_{(1)}$ の長さとすれば,

$$
L = \gamma''_{(1)} \text{の長さ} \geq \gamma'_{(k)}(\gamma''_{(k)}) \text{ の長さ} \quad (k = 1, 2, \ldots).
$$

$(z', z_n) \in \tilde{E}'_{(2)}$ に対し (4.2.8) と (4.2.9) より

$$
\|B'_1(z', z_n)\| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4}{\delta} L \cdot \max_{\gamma_{(1)}} \|B_1(z', \zeta)\|.
$$

従って,

$$
\|B'_1\|_{\tilde{E}'_{(2)}} \leq \frac{2L}{\pi\delta} \|B_1\|_{\tilde{E}'_{(1)} \cap \tilde{E}''_{(1)}}.
$$

同様にして,

$$
\|B''_1\|_{\tilde{E}''_{(2)}} \leq \frac{2L}{\pi\delta} \|B_1\|_{\tilde{E}'_{(1)} \cap \tilde{E}''_{(1)}}.
$$

$$
\varepsilon_1 = \max\left\{\|B'_1\|_{\tilde{E}'_{(2)}}, \|B''_1\|_{\tilde{E}''_{(2)}}\right\} \left(\leq \frac{2L}{\pi\delta} \|B_1\|_{\tilde{E}'_{(1)} \cap \tilde{E}''_{(1)}}\right) \tag{4.2.10}
$$

とおく. $\frac{\pi\delta}{2^5 L} \leq \frac{1}{2}$ が満たされるように, 必要ならば $\delta > 0$ を小さく取り直す.

$$
\|B_1\|_{\tilde{E}'_{(1)} \cap \tilde{E}''_{(1)}} \leq \frac{\pi^2\delta^2}{2^6 L^2}
$$

とすると,

$$
\varepsilon_1 \leq \frac{\pi\delta}{2^5 L} \leq \frac{1}{2}, \tag{4.2.11}
$$

$$
\begin{aligned}
A(z) = (\mathbf{1}_p - B_1(z)) &= (\mathbf{1}_p - B'_1(z))(\mathbf{1}_p - N(B'_1(z), B''_1(z))) \\
&\quad \cdot (\mathbf{1}_p - B''_1(z)), \quad z \in \tilde{E}'_{(2)} \cap \tilde{E}''_{(2)}.
\end{aligned} \tag{4.2.12}
$$

以下，帰納的に構成してゆく．$j = 1, \ldots, k (\in \mathbf{N})$ に対し p 次正方行列値正則関数

$$B'_j(z)\ (z \in \tilde{E}'_{(j+1)}), \quad B''_j(z)\ (z \in \tilde{E}''_{(j+1)})$$

が，次を満たすように決まったとする：

$$\text{(4.2.13)} \qquad \varepsilon_j := \max\left\{\|B'_j\|_{\tilde{E}'_{(j+1)}}, \|B''_j\|_{\tilde{E}''_{(j+1)}}\right\} \leq \frac{\pi\delta}{2^{j+4}L} \ \left(\leq \frac{1}{2^j}\right), \quad 1 \leq j \leq k,$$

$$\text{(4.2.14)} \qquad A(z) = (\mathbf{1}_p - B'_1(z)) \cdots (\mathbf{1}_p - B'_k(z)) \cdot (\mathbf{1}_p - N(B'_k(z), B''_k(z))) \cdot (\mathbf{1}_p - B''_k(z)) \cdots (\mathbf{1}_p - B''_1(z)),\ z \in \tilde{E}'_{(k+1)} \cap \tilde{E}''_{(k+1)}.$$

$k = 1$ の場合は，(4.2.11), (4.2.12) により成立している．

$z \in \tilde{E}'_{(k+2)} \cap \tilde{E}''_{(k+2)}$ に対し $B_{k+1}(z) = N(B'_k(z), B''_k(z))$ （(4.2.2) を参照）として，(4.2.7) で定義される $\gamma'_{(k+1)}, \gamma''_{(k+1)}$ を用いて

$$B'_{k+1}(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'_{(k+1)}} \frac{B_{k+1}(z', \zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta, \quad (z', z_n) \in \tilde{E}'_{(k+2)},$$

$$B''_{k+1}(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma''_{(k+1)}} \frac{B_{k+1}(z', \zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta, \quad (z', z_n) \in \tilde{E}''_{(k+2)}$$

とおく．上記被積分関数内で，$|\zeta - z_n| \geq \frac{\delta}{2^{k+2}}$ であることに注意すると，(4.2.13) と補題 4.2.3 より，

$$\text{(4.2.15)} \qquad \begin{aligned} \varepsilon_{k+1} &\leq \frac{L}{2\pi}\frac{2^{k+2}}{\delta}\|N(B'_k, B''_k)\|_{\tilde{E}'_{(k+1)} \cap \tilde{E}''_{(k+1)}} \\ &\leq \frac{L}{2\pi}\frac{2^{k+2}}{\delta} 2^2 \varepsilon_k^2 \leq \frac{1}{2}\varepsilon_k \leq \frac{\pi\delta}{2^{k+5}L}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{1}_p - N(B'_k(z), B''_k(z)) = (\mathbf{1}_p - B'_{k+1}(z))(\mathbf{1}_p - N(B'_{k+1}(z), B''_{k+1}(z))) \cdot (\mathbf{1}_p - B''_{k+1}(z)), \quad z \in \tilde{E}'_{(k+2)} \cap \tilde{E}''_{(k+2)}.$$

よって，(4.2.13) 及び (4.2.14) は，$k+1$ で成立する．

(4.2.13) と命題 4.2.1 (iv) より，次の無限乗積

$$A'(z) = \lim_{k\to\infty} (\mathbf{1}_p - B'_1(z)) \cdots (\mathbf{1}_p - B'_k(z)), \quad z \in \tilde{E}' := \bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{E}'_{(k)},$$

$$A''(z) = \lim_{k\to\infty} (\mathbf{1}_p - B''_k(z)) \cdots (\mathbf{1}_p - B''_1(z)), \quad z \in \tilde{E}'' := \bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{E}''_{(k)}$$

はそれぞれの定義域で一様収束し，その内部で可逆な p 次正方行列値正則関数となる．$z \in \tilde{E}' \cap \tilde{E}''$ に対し，(4.2.13) と補題 4.2.3 より

$$\|N(B'_k(z), B''_k(z))\| \leq 2^2\varepsilon_k^2 \leq \frac{1}{2^{2k-2}} \longrightarrow 0 \qquad (k \to \infty)$$

であるから，(4.2.14) より $A(z) = A'(z)A''(z)$ を得る． □