値分布と有理点分布 II

日本数学会春季年会 2013
函数論分科会

企画特別講演

野口潤次郎

（東大数理）

平成 25 年 (2013) 3 月 23 日（土）

§1 序

前回、1997（平成 9）年の同様なタイトルでの講演では次の三つのトピックスを中心に議論した。

1. 小林双曲的多様体の理論.
2. （高次元）Nevanlinna 理論.
3. 有理点の有限性の問題 (Diophantine geometry).

Lang 予想 ('74). 代数体上定義された小林双曲的多様体の有理点は有限個である。関数体上でもその類比が成立する.

小林予想 ('70). (1) 一般 (generic) な高次 ($\deg X \geq 2n-1 \geq 5$) 超曲面 $X = \{P = 0\} \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ は双曲的.

(2) 同様な $X(\deg X \geq 2n+1 \geq 5)$ に対し、補集合 $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus X$ も双曲的.

その後の進展について報告する.

関数体上の Lang 予想 (復習)

定理 1.1 (S. Kobayashi '75)

コンパクト複素多様体 M の余接束 $\mathbf{T}^*(M)$ が豊富なら M は小林双曲的。

定理 1.2 (Nog. '81)

$\pi : \mathscr{X} \to B$ を代数多様体の間の固有有理写像で、一般のファイバー $\mathscr{X}_t$ $(t \in B)$ は非特異で $\mathbf{T}^*(\mathscr{X}_t)$ は豊富とする。

(1) このとき切断の全体 $\Gamma(B, \mathscr{X})$(B-有理点集合) が Zariski 稠密($\{\sigma(t) : \sigma \in \Gamma(B, \mathscr{X})\} \subset \mathscr{X}_t$ が Z 稠密) ならば、

$$\mathscr{X} \cong B \times \mathscr{X}_t.$$

(2) 更に、B から $\mathscr{X}_t$ への支配的有理写像は、高々有限個しか存在しない。

H. Grauert IHES '65 (関数体上の Mordell 予想の証明) の真似。

定理 1.3 (Nog. '85 '91)

$\pi : \mathscr{X} \to B$ をコンパクト化を持つ複素空間の間の固有正則写像で、任意のファイバー $\mathscr{X}_t$ $(t \in B)$ は小林双曲的、境界で B 上相対的に小林双曲的埋め込みであるとする。($\dim \mathscr{X}/B = 1$ ならば境界条件は不要。)

(1) このとき切断の全体 $\Gamma(B, \mathscr{X})$(B-有理点集合) が Zariski 稠密($\{\sigma(t) : \sigma \in \Gamma(B, \mathscr{X})\} \subset \mathscr{X}_t$ が Z 稠密) ならば、

$$\mathscr{X} \cong B \times \mathscr{X}_t.$$

(2) 更に、B から $\mathscr{X}_t$ への支配的有理型写像は、高々有限個しか存在しない。

注。 $\dim \mathscr{X}/B = 1$ に特化すると、これは関数体上のモーデル予想に対し、Y. Manin '63 (-gap+ Coleman '90 pp. 35), H. Grauert '65, 等の証明とは別の (第 2 又は第 3?) 簡単証明を与えている。

値分布論 (Nevanlinna 理論) は小林双曲性への有力なアプローチ。

値分布論 (Nevanlinna 理論) には "数論" 的な面はないが "算術的 (arithmetic)" な側面がありその観点からの論述である。

値分布の目標. 有限的に記述される不変量で超越的正則写像を理解する。

§2 Lang 予想 $\cap$ 小林予想

"Lang 予想と合わせると、次が出て来るが信じられますか？

系 (予想). $\mathbf{Q}$ を係数とする $\deg P \gg 1$ な一般の単独方程式 $P = 0$ には、どんな大きな代数体上考えても解は有限個しかない.

Sarnak-Wang ('95 C.R.) は Masuda-Noguchi ('96 Math. Ann.) で構成した射影的超曲面から $\mathbf{P}^5$ の小林双曲的超曲面 X で $X(\mathbf{R})$, $X(\mathbf{Q}_p)$ ($^\forall p$ 素数) が無限集合になる具体例を構成した。この場合、Brauer-Manin 障害群 $\mathrm{BM}(X) = 0$ で Hasse 原理と Lang 予想が相反する例になっている。

系（予想）の例：

定理 2.1 (Nog. '03 Forum)

Shirosaki の射影的超曲面 $X \subset \mathbf{P}^n$ ($\mathbf{Z}$ 上, $\deg X = d^n, d > 12$) で次を満たす例がある。

1. X は、小林双曲的である。
2. 任意の代数体 k に対して k-有理点集合 $X(k)$ は有限である。

(1) の証明には、Nevanlinna 理論、(2) の証明には Faltings の定理 (Mordell 予想解決) を使う。

小林予想と関連するものとしては、次の定理に注目したい。

定理 2.2 (Voisin '96/'98 J. Diff. Geom.)

$\mathbf{P}^n$ の次数 $d \geq 2n-1$ の一般の超曲面 X は、X 及びその任意の部分多様体が一般型である。

従って次の予想が示されれば、小林予想が示されたことになる。

予想 2.3 (Green-Griffiths '72/'80)

一般型代数多様体 X への整曲線 $f : \mathbf{C} \to X$ は、代数退化する。

予想 2.4 (整曲線の基本予想)

射影代数的非特異多様体 X、単純正規交叉因子 $D \subset X$、代数非退化な $f : \mathbf{C} \to X$ に対し

$$T_f(r, L(D)) + T_f(r, K_X) \leq N_k(r, f^*D) + o(T_f(r))||,$$

$1 \leq^{\exists} k \leq \dim X.$

§3 整曲線の退化問題と像の交点

'90 年代はアーベル多様体及び準アーベル多様体の有理点分布論が値分布論よりも進んでいた（珍しい時期）。

予想 3.1 (Lang 予想 ('66))

(1) A をアーベル多様体、D を超曲面断面とすると整曲線 $f : \mathbf{C} \to A \setminus D$ は代数退化する。

(2) f が代数非退化ならば、$f(\mathbf{C}) \cap D$ は無限集合であろう。

Ax ('70 I.C.M./'72) が f が解析的 1-パラメーター群の時は示した。

定理 3.2 (Log-Bloch-Ochiai (Nog. '77/'81))

(Bloch, Ochiai, Green-Griffiths, McQuillan)

(1) A を準アーベル多様体とする。任意の整曲線 $f : \mathbf{C} \to A$ のザリスキー閉包 $\overline{f(\mathbf{C})}^{\mathrm{Zar}}$ は、準アーベル部分多様体の平行移動である。

(2) 代数多様体 X の対数的不正則指数 $\bar{q}(X) > \dim X$ ならば、任意の整曲線 $f : \mathbf{C} \to X$ は代数退化する。

実は、(1) $\Longleftrightarrow$ (2).

定理 3.3 (Faltings '91 Ann. Math./'94 Proc.)

(1) A を代数体 k 上定義されたアーベル多様体、$X \subset A$ を k 上の部分多様体とする。このとき有限個のアーベル部分多様体 B_i の平行移動 $Y_i = a_i + B_i$ が存在して、

$$X(k) \subset \bigcup_i Y_i(k).$$

(2) $D \subset A$ を豊富な被約因子とすると、$A \setminus D$ の整数点集合は有限である。

注。 (1) は、値分布の Bloch-Ochiai の類似。
(2) の結果は、値分布より先行した。

P. Vojta は、これを準アーベル多様体に拡張した。

定理 3.4 (Vojta, I, II, '96 Invent. Math./'99 Amer. J. Math.)

(1) A を代数体 k 上定義された準アーベル多様体、$X \subset A$ を k 上の部分多様体とする。このとき有限個の準アーベル部分多様体 B_i の平行移動 $Y_i = a_i + B_i$ が存在して、

$$X(k) \subset \bigcup_i Y_i(k).$$

(2) $D \subset A$ を因子で $\mathrm{St}(D) := \{a \in A; D + a = D\}$ は有限群であるとすると、$A \setminus D$ の整数点集合は上と同様な Y_i で $Y_i \cap D = \emptyset$ であるものの有限和に含まれる。

値分布からは、(1) は Log-Bloch-Ochiai の定理 3.2 の類似と見なされる。(2) の部分については、対応するものとして Lang 予想 3.1(1) が提示されていたが、これが次のように示された。

定理 3.5 (Siu-Yeung '96)

A をアーベル多様体、D を豊富因子とすると整曲線 $f : \mathbf{C} \to A \setminus D$ は定数である。

定理 3.6 (Nog. '98)

A を準アーベル多様体、D を因子で $|\mathrm{St}(D)| < \infty$ なものとする。整曲線 $f : \mathbf{C} \to A \setminus D$ の像は、真準アーベル部分多様体の平行移動 Y で $Y \cap D = \emptyset$ であるものに含まれる。

ここまでの結果で次が示される。

定理 3.7 (Nog.-Winkelmann '02)

(1) V を n 次元射影代数的多様体、$\{D_j\}_{j=1}^{l}$ を一般の位置にある豊富な超曲面の有限族とする。整曲線 $f:\mathbf{C}\to V$ があり、$f(\mathbf{C})\subset D_i$ か $f(\mathbf{C})\cap D_j=\emptyset$ を満たすとする。$W:=\overline{f(\mathbf{C})}^{\mathrm{Zar}}$ とおくと、

$$\dim W \le \frac{n}{l-n}\mathrm{rank}_{\mathbf{Z}}\mathrm{NS}(V).$$

(2) 上の (1) の V, D_j が代数体 k 上で定義されているとする。S を全てのユークリッド的付置を含む付置の有限集合とする。$W\subset V$ を k 上の部分多様体で、$\left(\sum_{D_j\not\supset W} D_j\cap W, S\right)$-整数点集合 W' で W 内ザリスキー稠密なものを含むとする。このとき次が成立する。

$$\dim W \le \frac{n}{l-n}\mathrm{rank}_{\mathbf{Z}}\mathrm{NS}(V).$$

系 3.8

$V = \mathbf{P}^n$, D_j を一般の位置にある超平面とする。

1. $l \geq 2n+1$ ならば、$\mathbf{P}^n \setminus \sum_{j=1}^{l} D_j$ は小林双曲的である（H. Fujimoto '72).
2. $l \geq 2n+1$ ならば、$\mathbf{P}^n \setminus \sum_{j=1}^{l} D_j$ の整数点集合は常に有限である (Ru-Wong '91 Invent. Math.).

§4 Corvaja-Zannier と Min Ru による拡張

定理 4.1 (Corvaja-Zannier '04/'06 Amer. J. Math.)

シュミットの部分空間定理を、一般次数の射影超曲面の場合に拡張した。

定理 4.2 (Min Ru '04 Amer. J. Math.)

カルタンの第 2 主要定理を、一般次数の射影超曲面の場合に拡張した。

共に、評価式に含まれる幾何学的不変量は、次元のみ。
前に述べてた "整曲線の基本予想" の方向性と異なる。

§5 山ノ井の第 2 主要定理: 関数体上のイロハ (abc) 予想

Masser-Oesterlé ('88) によるイロハ (abc) 予想は次のように述べられる。

予想 5.1

任意の $\varepsilon > 0$ に対しある定数 $C_\varepsilon \in \mathbf{R}$ が存在して、互いに素な整数 $a, b, c \in \mathbf{Z}$ が

$$a + b + c = 0$$

を満たすならば、次が成立する。

(5.2)

$$(1 - \varepsilon) \log \max\{|a|, |b|, |c|\} \leq \sum_{p|a} \log p + \sum_{p|b} \log p + \sum_{p|c} \log p + C_\varepsilon .$$

ここで $p \in \mathbf{N}$ は、素数を渡る。

$[a,b] \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ とみて a,b,c を $\mathbf{P}^1$ 上の一般の位置にある 3 つの線形形式とかんがえると、一般の q 個の一般の位置にある線形形式 $L_j, 1 \le j \le q$, に対しては次の様になる。

$$(q-2-\varepsilon)\mathrm{h}(x) \le \sum_{j=1}^{q} \sum_{p|L_j(x)} \log p + C_\varepsilon \tag{5.3}$$

$$= \sum_{j=1}^{q} N_{\mathbf{1}}(x, L_j) \cancel{\log p} + C_\varepsilon.$$

但し、$x = [x_0, x_1]$, L_j は全て $\mathbf{Z}$ 上被約に表されているとする。

定理 5.4 (Nevanlinna の第 2 主要定理：原型)

$f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}^1$ を有理型関数、$a_j \in \mathbf{P}^1, 1 \leq j \leq q,$ を相異なる点とすると

$$(q-2)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^{q} N_{\mathbf{1}}(r, (f-a_j)_0) + S_f(r), \tag{5.5}$$

$$S_f(r) = O(\log T_f(r)) + o(\log r)|| \leq \varepsilon T_f(r)||.$$

定理 5.6 (Yamanoi's abc '04/'06)

X, Y を非特異射影代数的多様体、$\pi : X \to Y$ を正則全射、$\dim X/Y = 1$ とする。$f : \mathbf{C} \to X$, $a : \mathbf{C} \to Y$ を整曲線とし, $a = \pi \circ f$ が成立しているとする。a は代数非退化 (有限的に記述可能)、$D_j, 1 \leq j \leq q,$ を X の一般の位置にある超曲面とすると次が成立する。

(5.7)

$$T_f\left(r, K_{X/Y}+\sum_{j=1}^{q}L(D_j)\right) \leq \sum_{j=1}^{q} N_{\mathbf{1}}(r, f^*D_j)+O(T_a(r))+o(T_f(r))||.$$

特に、a が "小さい" ($T_a(r)=o(T_f(r))||$) ならば、

(5.8) $$T_f\left(r, K_{X/Y}+\sum_{j=1}^{q}L(D_j)\right) \leq \sum_{j=1}^{q} N_{\mathbf{1}}(r, f^*D_j)+o(T_f(r))||.$$

注。 これは、f, a が共に代数的（有理的）な場合でも、P. Vojta により予想 ('96) されていた非自明な結果である。

§6 準アーベル多様体内の整曲線の第 2 主要定理と G.C.D. 評価

定理 3.5 (Siu-Yeung)、定理 3.6 (Nog.) を第 2 主要定理として定量化したい。“Jet of jets” を使い、結局次が得られた。

定理 6.1 (N.-W.-Y. ’00/’02/’08)

A を準アーベル多様体、$f:\mathbf{C}\to A$ を代数非退化な整曲線、$J_k(f):\mathbf{C}\to X_k\subset J_k(A)$ を k-ジェット持ち上げ、X_k はその像のザリスキー閉包とする。$Z\subset X_k$ を被約代数的サイクルとする。

1. $T_{J_k(f)}(r,\mathscr{I}\langle Z\rangle)=N_{\mathbf{1}}(r,J_k(f)^*Z)+o(T_f(r))||.$
2. $\mathrm{codim}\,_{X_k}Z\geq 2$ ならば、

$$N(r,J_k(f)^*Z)=T_{J_k(f)}(r,\omega_{\mathscr{I}\langle Z\rangle})=o(T_f(r))||.$$

この (2) を最も簡単な場合に述べると次になる。

系 6.2

$X = (\mathbf{C}^*)^2$, $Z = e := (1,1)$ (群の単位元), $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$ は代数非退化とすると、

$$N(r, f^*e) = N(r, \mathscr{I}(f_1 - 1, f_2 - 1)) \leq \epsilon \cdot T_f(r)||_\epsilon, \quad {}^\forall\epsilon > 0.$$

類似として、整曲線 $f : \mathbf{C} \to A$ と A 内の有理点の反復列を対応させて考える。

定理 6.3 (Corvaja-Zannier '02, Bugeaud-Corvaja-Zannier '03)

$\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$, ${}^\forall\epsilon > 0$ とすると、

$$\log \mathrm{G.C.D.}(\alpha^n - 1, \beta^n - 1) < \epsilon \cdot n, \quad n \gg 1.$$

§7 応用

(イ) Log-Bloch-Ochiai の定理 3.2 を改良する。

定理 7.1 (N.-W.-Y. '07)

(1) X を代数多様体、$\bar{\kappa}(X) > 0$, $\bar{q}(X) \geq \dim X$、アルバネーゼ $\alpha : X \to A$ は固有とする。すると任意の整曲線 $f : \mathbf{C} \to X$ は、代数退化し、$W := \overline{f(\mathbf{C})}^{\mathrm{Zar}}$ とおくと、W は次を満たす。

条件　7.2

W 自身は準アーベル多様体 (に同型) で制限 $\alpha|_W : W \to B \subset A$ は A の準アーベル部分多様体の平行移動 B への不分岐全射になる。

(2) A を単純アーベル多様体、$\pi : X \to A$ を分岐有限射 $((\mathrm{Jac}(\pi))_0 \neq 0)$ ならば X は小林双曲的である。

注。 (1) で "固有" を外すと反例がある。Green-Griffiths 予想に一歩 (?) 近づいた。

(1) で X を一般型、$\bar{\kappa}(X) = \dim X$ とすると α の固有という条件は、不要になる (Lu-Winkelmann '12 Forum: 別証 N.-W.-Y. 準備中)

(2) は、2 次元では C.C. Grant '86 Duke で示されていた。

(ロ) Lang の予想 3.1(2).

定理 7.3 (Corvaja-Nog. '12)

$D \subset A$ を準アーベル多葉体内の超曲面で $\mathrm{St}(D)$ は有限とする。$f : \mathbf{C} \to A$ が代数非退化ならば、ある既約成分 $D' \subset D$ が存在して、像の交点集合 $f(\mathbf{C}) \cap D'$ は D' 内でザリスキー稠密である。

§8 山ノ井の一致の定理 (応用).

アーベル多様体の場合に、第 2 主要定理 6.1 の応用として次が導かれる。

定理 8.1 (Yamanoi '04)

$f_j : \mathbf{C} \to A_j$ $(j = 1, 2)$ をアーベル多様体への代数非退化な整曲線、$D_j \subset A_j$ を既約豊富な超曲面とする。

$$\mathrm{Supp}\, f_1^* D_1 = \mathrm{Supp}\, f_2^* D_2$$

ならば、対同型 $\phi : (A_1, D_1) \to (A_2, D_2)$ が存在して、$f_2 = \phi \circ f_1$.

これは、びっくり！ です。　H. Cartan の初めての論文に次のような結果があります。(少し特殊化してある。)

定理 8.2 (H. Cartan '27 C.R.)

(3 点についてを特殊化して) $f, g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$ を整関数、$f^* 1 = g^* 1$ とすると $f = g$ 又は $f = 1/g$.

Erdös の問題と山ノ井の一致の定理の拡張.

Erdös の問題 ('88 Banff). $\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{a, b \in \mathbf{N}\ \text{とする。次は正しいか}}$：

$$a = b \Longleftrightarrow \Big[p|(a^n - 1) \Leftrightarrow p|(b^n - 1),\ {}^{\forall}p > 1, \text{素数}\Big].$$

答え：成立、 Corrales-Rodrigáñez and R. Schoof '97, A. Schinzel '60.

これは、乗法群 $\mathrm{G}_m = \mathbf{Q}^*$ 上の Diophantus 近似論における一致の定理 (問題) とみる。

定理 8.3 (Corvaja-Nog. '12)

$f_i : \mathbf{C} \to A_i$ $(i = 1, 2)$ を準アーベル多様体への代数非退化な整曲線とする。$D_i \subset A_i$ を既約超曲面（簡単の為）として $|\mathrm{St}(D_i)| < \infty$ $(i = 1, 2)$ とする。

1. 無限遠点での集合の芽として、

$$\underline{\mathrm{Supp}\, f_1^* D_1}_{\infty} \subset \underline{\mathrm{Supp}\, f_2^* D_2}_{\infty}, \tag{8.4}$$

$$N_1(r, f_1^* D_1) \sim N_1(r, f_2^* D_2)||. \tag{8.5}$$

   ならば、有限不分岐全射 $\phi : A_1 \to A_2$ が存在して、$\phi \circ f_1 = f_2$, $D_1 \subset \phi^* D_2$ となっている。

2. もし (8.4) が等号で成立ならば、もちろん (8.5) は不要、$\phi : A_1 \to A_2$ は同型で $D_1 = \phi^* D_2$.

系 8.6

被覆列 $\mathbf{C} \to \mathbf{C}/\mathbf{Z} \cong \mathbf{C}^* \xrightarrow{\pi} \mathbf{C}^*/\mathbf{Z}\tau = E$ $(|\tau| > 1)$ (楕円曲線) を考える。どのように $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$ と $g : \mathbf{C} \to E$ をとっても $f^{-1}1 = g^{-1}e$ は成立しない。

注。 初等関数と楕円関数の値分布は、どうがんばっても一致しない。

有理再帰列

定理 8.7 (Corvaja-N. '12)

$\mathcal{O}_S$ を代数体 k の S-整数の全体とする。$\mathbf{G}_1$ と $\mathbf{G}_2$ を線形トーラス、$\underline{g_i \in \mathbf{G}_i(\mathcal{O}_S)\text{ をザリスキー稠密な部分群を生成}}$するものとする。$D_i$ を k 上定義された因子で $\mathscr{I}\langle D_i\rangle$ をその定義イデアルとし $\mathrm{St}(D_i) = \{1\}$ とする。$\underline{\text{無限個の自然数 } n \in \mathbf{N}}$に対し

$$(g_1^n)^* \mathscr{I}\langle D_1\rangle \supset (g_2^n)^* \mathscr{I}\langle D_2\rangle \tag{8.8}$$

が成立するとする。

すると、ある$\underline{\text{不分岐射 } \phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2\ (k\text{ 上})\text{ と } h \in \mathbf{N}}$が存在して、$\underline{\phi(g_1^h) = g_2^h \text{ かつ } D_1 \subset \phi^*(D_2).}$

条件 (8.8) は、イデアルの包含関係（重複度を込めている）なので、条件は台のみを考えるのよりも強い条件となっている。

命題 8.9 (C.-N. '12)

$\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, g_1, g_2$ を上述のものとし、D_1, D_2 を既約で $D_1 \ni 1$ かつ D_2 は正次元の部分群の平行移動を含んでいないものとする。

$$\mathrm{Supp}\,(g_1^n)^*\mathscr{I}\langle D_1\rangle \subset \mathrm{Supp}\,(g_2^n)^*\mathscr{I}\langle D_2\rangle, \quad {}^\forall n \gg 1 \tag{8.10}$$

を仮定する。

すると、支配的射 $\phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ (k 上) と $h \in \mathbf{N}$があって、
$\phi(g_1) = g_2^h$.

§9 予想

既にある未解問題・決予想以外に、ここまでの議論から出てくる新しい手頃な (?) な問題・予想を値分布と有理点分布に一つずつ述べてみよう。

(a) 値分布。 定理 7.3 をみると次の予想が興味深い。

予想 9.1

$H_j \subset \mathbf{P}^n, 1 \leq j \leq n+2,$ を一般の位置にある超平面とし $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}^n$ を代数非退化な整曲線とすると $f(\mathbf{C}) \cap (\sum_{j=1}^{n+2} H_j)$ は無限集合、特にある H_j が在って $f(\mathbf{C}) \cap H_j$ は H_j 内でザリスキー稠密であろう。

(b) 有理点分布。

ここまでの結果、特に定理 7.1 を踏まえると、Lang 予想 3.1 の部分的解決に最も近いのは次の言述でないだろうか。

予想 9.2

(1) 代数体 k 上定義された代数多様体 X、準アーベル多様体 A、有限射 $\pi : X \to A$ を考える。X は、準アーベル多様体に同型ではないとする。

この時、条件 7.2 を満たす有限個の $W_j \subsetneqq X$ (k 上) が存在して

$$X(k) \subset \bigcup_{\text{有限}} W_j.$$

(2) 上を特殊化して、A を単純アーベル多様体とすると、$X(k)$ は有限集合であろう。

ご静聴、ありがとう
ございました。