局所 Langlands 対応の幾何化と関手性

今井　直毅　（東京大学大学院数理科学研究科）

1　はじめに

p を素数とし，E を p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体とする．G を E 上の連結簡約代数群とする．局所 Langlands 対応とは大雑把に言うと，$G(E)$ の $\mathbb{C}$ 上既約スムーズ表現に対して，局所 Langlands パラメータ（Galois 表現）を付随させるよい対応のことである．局所 Langlands 対応の存在は，一般にはまだ予想であるが，多くの群あるいは表現のクラスについて証明されつつある．

ℓ を p と異なる素数とする．$\mathbb{C}$ を $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ に変えて，局所 Langlands 対応を定式化することもでき，以下では，この $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 係数の局所 Langlands 対応を考える．

局所 Langlands 対応の幾何化（Fargues 予想）は，幾何学的 Langlands 対応の定式化を，p 進的な設定で実現するものであり，系として，Scholze によって導入された p 進シュトゥーカのモジュライ空間の ℓ 進エタールコホモロジーにおける局所 Langlands 対応の実現が従う．

本稿では，局所 Langlands 対応の幾何化及び知られている結果について説明する．

2　幾何学的 Langlands 対応

まず幾何学的 Langlands 対応の定式化について説明する．$\mathbb{F}_q$ を標数 p の有限体とし，X を $\mathbb{F}_q$ 上の幾何的連結で固有滑らかな代数曲線とする．X の関数体 を F で表し，X の閉点全体の集合を $|X|$ で表す．

$x \in |X|$ とし，$\mathcal{O}_x = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ とおく．F_x を $\mathcal{O}_x$ の商体とする．

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{C}_c(\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x)\backslash \mathrm{GL}_n(F_x)/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

とおく．ただし $\mathcal{C}_c$ はコンパクト台関数を表す．$\mathcal{H}_x$ は Hecke 環とよばれ，積構造は，$f_1, f_2 \in \mathcal{H}_x$ に対し，

$$f_1 * f_2(g) = \int_{\mathrm{GL}_n(F_x)} f_1(gh)f_2(h^{-1})\mu_x(h)$$

とおくことで定まる．ただし，μ_x は $\mu_x(\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x)) = 1$ となる $\mathrm{GL}_n(F_x)$ の Haar 測度を表す．

このとき F_x の素元 ϖ_x を i 個並べた対角行列の両側剰余類

$$\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x)\mathrm{diag}(\varpi_x, \dots, \varpi_x, 1, \dots, 1)\,\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x)$$

の特性関数を $T_{x,i}$ に対応させることによって定まる $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 代数の同型

$$\mathcal{H}_x \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell[T_{x,1}, T_{x,2}, \ldots, T_{x,n}, T_{x,n}^{-1}]$$

が存在する．

$$\mathbb{A}_F = \left\{ (a_x)_x \in \prod_{x \in |X|} F_x \;\middle|\; \text{ほとんど全ての } x \text{ で } a_x \in \mathcal{O}_x \right\}$$

とおく．

F 上の GL_n に対する Langlands 対応は，Lafforgue によって証明された（[Laf02]）．ここでは不分岐表現の場合の主張を述べる．

定理 2.1. $\sigma\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を既約連続表現で $\det \sigma$ が有限位数のものとする．このとき，ゼロでない関数

$$f_\sigma\colon \mathrm{GL}_n(F)\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)/\prod_{x \in |X|} \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

で，任意の $x \in |X|$ と $1 \leq i \leq n$ に対して，

$$T_{x,i} * f_\sigma = \mathrm{Tr}(\wedge^i \sigma(\mathrm{Frob}_x)) f_\sigma$$

となるものが存在する．ここで Frob_x は x での *Frobenius* 元である．

この対応を幾何化することを考える．Bun_n を X 上の階数 n のベクトル束のモジュライスタックとする．

観察 2.2. X 上の階数 n のベクトル束 $\mathcal{E}$ に対し，自明化

$$\phi_F\colon F^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} F, \quad \phi_x\colon \mathcal{O}_x^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_x$$

をとって $((\phi_F \otimes_F F_x)^{-1} \circ (\phi_x \otimes_{\mathcal{O}_x} F_x))_{x \in |X|}$ を対応させることで，

$$\mathrm{Bun}_n(\mathbb{F}_q) \simeq \mathrm{GL}_n(F)\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)/\prod_{x \in |X|} \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x)$$

が定まる．また Bun_n 上の ℓ 進層 $\mathcal{F}$ に対して，$\mathrm{Bun}_n(\mathbb{F}_q)$ 上の関数 $y \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_q, y^*\mathcal{F})$ が定まる．

上の観察に基づき，関数 f_σ の代わりに，Bun_n 上の ℓ 進層を考える．次に Langlands 対応の主張に現れた Hecke 作用に関する条件を幾何化することを考える．

$1 \leq i \leq n$ とし，Hecke^i を組 $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', x, \alpha)$ のモジュライスタックとする．ただし

- $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ は X 上の階数 n のベクトル束，
- x は X の点，
- $\alpha\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ は単射で，$\mathcal{E}'/\alpha(\mathcal{E})$ は x に台を持ち，x 上階数 i 局所自由であるもの

とする．二つの射

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hecke}^i \arrow[dl, "\overleftarrow{h}_i"'] \arrow[dr, "\overrightarrow{h}_i"] & \\ \mathrm{Bun}_n & & \mathrm{Bun}_n \times X \end{tikzcd}$$

を

$$\overleftarrow{h}_i(\mathcal{E}, \mathcal{E}', x, \alpha) = \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{h}_i(\mathcal{E}, \mathcal{E}', x, \alpha) = (\mathcal{E}', x)$$

によって定める．このとき Hecke 作用の幾何化は，Bun_n 上の ℓ 進層に対する $(\overrightarrow{h}_i)_!(\overleftarrow{h}_i)^*$ で与えられる．

次に幾何学的 Langlands 対応の主張を述べる．$T \subset B$ を GL_n の対角トーラスと上三角 Borel 部分群とする．T の B に関する支配的余指標全体を $X_*(T)^+$ で表し，$\mu \in X_*(T)^+$ とする．

$\mathrm{Hecke}^{\leq\mu}$ を組 $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', x, \beta)$ のモジュライスタックとする．ただし

- $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ は X 上の階数 n のベクトル束，
- x は X の点，
- $\beta\colon \mathcal{E}|_{X\setminus x} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'|_{X\setminus x}$ は x での修正が μ で抑えられるもの

とする．二つの射

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hecke}^{\leq\mu} \arrow[dl, "\overleftarrow{h}"'] \arrow[dr, "\overrightarrow{h}"] & \\ \mathrm{Bun}_n & & \mathrm{Bun}_n \times X \end{tikzcd}$$

を

$$\overleftarrow{h}(\mathcal{E}, \mathcal{E}', x, \beta) = \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{h}(\mathcal{E}, \mathcal{E}', x, \beta) = (\mathcal{E}', x)$$

によって定める．

$\widehat{T}$ を $\mathrm{GL}_n = \widehat{\mathrm{GL}_n}$ の対角トーラスとし，$\widehat{T}$ の上三角 Borel 部分群に関する支配的指標全体を $X^*(\widehat{T})^+$ で表す．$\mu \in X^*(\widehat{T})^+ = X_*(T)^+$ とみなし，r_μ を GL_n の最高ウェイト μ の既約代数表現とする．さらに IC_μ を 幾何学的佐武対応で r_μ に対応する $\mathrm{Hecke}^{\leq\mu}$ 上の偏屈層とする．このとき幾何学的 Langlands 対応の主張は次のとおりである．

定理 2.3 ([FGV02])**.** $\sigma\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を既約連続表現で $\det\sigma$ が有限位数のものとする．このとき，ゼロでない $\mathcal{F}_\sigma$ で

$$R\overrightarrow{h}_!(\overleftarrow{h}^*\mathcal{F}_\sigma \otimes \mathrm{IC}_\mu) = \mathcal{F}_\sigma \boxtimes V(r_\mu \circ \sigma) \tag{2.1}$$

が成り立つものが存在する．ただし $V(r_\mu \circ \sigma)$ は，$\pi_1(X)$ の表現 $r_\mu \circ \sigma$ に対応する X 上の ℓ 進層を表す．

等式 (2.1) を Hecke 固有層性質という．

注意 2.4. 一般の簡約代数群 G に対しても，Bun_n を X 上の G 束のモジュライスタックに変えることによって予想を定式化できる．

3 Fargues 予想

E を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体とし，$\mathbb{F}_q$ を E の剰余体とする．$\Gamma_E = \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ とし，$I_E \subset W_E \subset \Gamma_E$ を E の惰性群および Weil 群とする．G を E 上の準分裂簡約代数群とする．

X を E から定まる Fargues–Fontaine 曲線とする．これはものとしては，$\mathbb{F}_q$ 上のパーフェクトイド空間 S に対して，ある p 進解析空間 X_S を付随させる関手である．X_S のことを相対 Fargues–Fontaine 曲線といい，S が幾何学的点ならば，X_S は 1 次元である．

注意 3.1. X_S から S に射はない．X_S の S 値点というものも意味をなさない．

X 上の次数 1 の有効 Cartier 因子のモジュライスタックを Div_X^1 で表す．このとき，[Far17, Proposition 3.1] により，$\mathrm{Div}^1_{X,\overline{\mathbb{F}}_q}$ 上のスムーズ ℓ 進層と W_E の ℓ 進表現が対応する．

代数曲線の場合と同様に

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hecke}^{\leq\mu} \arrow[dl, "\overleftarrow{h}"'] \arrow[dr, "\overrightarrow{h}"] & \\ \mathrm{Bun}_G & & \mathrm{Bun}_G \times \mathrm{Div}^1_X \end{tikzcd}$$

を構成できる．

$\widehat{G}$ を G の $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の双対群とし，${}^L G = \widehat{G} \rtimes \Gamma_E$ とおく．ここでは，連続準同型

$$\varphi\colon W_E \to {}^L G$$

で Γ_E 成分への射影が自然な包含 $W_E \subset \Gamma_E$ と一致するものを局所 Langlands パラメータということにする．実際には，局所 Langlands 対応で局所 Langlands パラメータに付随する表現の集合が空でないためには，さらに条件が必要になる（*cf.* [Bor79, §8]）．

$$S_\varphi = \{g \in \widehat{G} \mid g\varphi g^{-1} = \varphi\}$$

とおく．$Z(\widehat{G})^{\Gamma_E} \subset S_\varphi$ となる．

定義 3.2. φ を局所 *Langlands* パラメータとする．$S_\varphi/Z(\widehat{G})^{\Gamma_E}$ が有限かつ $\varphi(I_E)$ の $\widehat{G}$ への射影が有限であるとき，φ は尖点的であるという．

予想 3.3 (Fargues 予想)**.** 尖点的 *Langlands* パラメータ φ に対し，$\mathrm{Bun}_{G,\overline{\mathbb{F}}_q}$ 上の ℓ 進層 $\mathcal{F}_\varphi$ が存在し，

$$R\overrightarrow{h}_!(\overleftarrow{h}^*\mathcal{F}_\varphi \otimes \mathrm{IC}_\mu) \simeq \mathcal{F}_\varphi \boxtimes V(r_\mu \circ \varphi)$$

となる．さらに次が成り立つ．

- $\mathrm{Supp}\mathcal{F}_\varphi$ は $\mathrm{Bun}_{G,\overline{\mathbb{F}}_q}$ の半安定部分 $\mathrm{Bun}^{\mathrm{ss}}_{G,\overline{\mathbb{F}}_q}$ に含まれる．
- $\mathcal{F}_\varphi$ は，G の拡大純内部形式に対する局所 *Langlands* 対応で，φ に付随する表現を用いて記述される．

特に，局所 Langlands 対応が知られている場合には，$\mathcal{F}_\varphi$ を構成することができる．

注意 3.4. 幾何学的 *Langlands* 対応の設定においては，関手性の一例である保型誘導の幾何学的実現が *Braverman–Gaitsgory [BG02]* によって知られており，この類似をたどることによって，p 進的な設定においても保型誘導の幾何学的実現が得られると期待される．

Fargues 予想については以下が知られている．

- G がトーラスの場合に成立（[Far16]）
- $G = \mathrm{GL}_2$ で μ が minuscule の場合に成立（[GI16]）
- $G = \mathrm{GL}_2$ で μ が一般の場合に半安定部分上で成立（[Ima19]）
- $G = \mathrm{GL}_3$ で μ が minuscule の場合に半安定部分上で成立（[Ima19]）

$G = \mathrm{GL}_3$ で $\mu = (1,0,0)$ の場合の証明のあらすじについて説明する．E の最大不分岐拡大の完備化を $\breve{E}$ で表す．n を正の整数，m 整数としたとき，$\mathrm{GL}_n(\breve{E})$ の基本元 b_1 で，行列式の正規付置が -1 であるものを取ると，[Far16, 2.2.2] のように X 上の階数 n 次数 m の半安定ベクトル束 $\mathscr{E}_{b_1^m}$ が構成でき，このベクトル束を $\mathcal{V}(n,m)$ とかく．

m, m' を整数とし，$\mathcal{M}^{\leq\mu}_{\frac{m}{n},\frac{m'}{n}}$ を $\mathcal{V}(n,m)$ と $\mathcal{V}(n,m')$ の間の修正で μ で抑えられるもののモジュライ空間とする．以下では代数閉体上に底変換したものを同じ記号であらわす．

半安定部分上での Hecke 固有層性質は，コホモロジー $H_c^*(\mathcal{M}^{\leq\mu}_{\frac{m}{3},\frac{m'}{3}}, \mathrm{IC}_\mu)$ を調べることに帰着される．

[SW13] により，$\mathcal{M}^{\leq(1,0,0)}_{\frac{0}{3},\frac{1}{3}}$ は GL_3 に対する Lubin–Tate 空間のレベルに関する極限と一致する．よって，非可換 Lubin–Tate 理論により

$$H_c^*(\mathcal{M}^{\leq(1,0,0)}_{\frac{0}{3},\frac{1}{3}}, \mathrm{IC}_{(1,0,0)})$$

については，どのような表現が現れるかがわかっている．

すると，問題は，$H_c^*(\mathcal{M}^{\leq(1,0,0)}_{\frac{1}{3},\frac{2}{3}}, \mathrm{IC}_{(1,0,0)})$ を調べることに帰着される．修正の合成によって定義される次のような畳み込み射を考える．

$$m\colon \mathcal{M}^{\leq(1,0,0)}_{\frac{-1}{3},\frac{0}{3}} \times \mathcal{M}^{\leq(1,0,0)}_{\frac{0}{3},\frac{1}{3}} \to \mathcal{M}^{\leq(2,0,0)}_{\frac{-1}{3},\frac{1}{3}}.$$

この射と，幾何学的佐武対応における畳み込み積の分解

$$\mathrm{IC}_{(1,0,0)} * \mathrm{IC}_{(1,0,0)} = \mathrm{IC}_{(2,0,0)} \oplus \mathrm{IC}_{(1,1,0)}$$

を用いることによって，

$$H_c^*(\mathcal{M}^{\leq(1,0,0)}_{\frac{-1}{3},\frac{0}{3}}, \mathrm{IC}_{(1,0,0)}) \otimes H_c^*(\mathcal{M}^{\leq(1,0,0)}_{\frac{0}{3},\frac{1}{3}}, \mathrm{IC}_{(1,0,0)})$$

と

$$H_c^*(\mathcal{M}^{\leq(2,0,0)}_{\frac{-1}{3},\frac{1}{3}}, \mathrm{IC}_{(2,0,0)} \oplus \mathrm{IC}_{(1,1,0)})$$

を関係づけることができる．

さらに commutativity constraint の同型

$$c\colon \mathrm{IC}_{(1,0,0)} * \mathrm{IC}_{(1,0,0)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{IC}_{(1,0,0)} * \mathrm{IC}_{(1,0,0)}$$

を用いると

$$H_c^*(\mathcal{M}_{\frac{-1}{3},\frac{1}{3}}^{\le(2,0,0)}, \mathrm{IC}_{(2,0,0)} \oplus \mathrm{IC}_{(1,1,0)})$$

に対合が定まる．一方，双対により定まる同型

$$\mathcal{M}_{\frac{-1}{3},\frac{0}{3}}^{\le(1,0,0)} \simeq \mathcal{M}_{\frac{0}{3},\frac{1}{3}}^{\le(1,0,0)}$$

を用いて，

$$H_c^*(\mathcal{M}_{\frac{-1}{3},\frac{0}{3}}^{\le(1,0,0)}, \mathrm{IC}_{(1,0,0)}) \otimes H_c^*(\mathcal{M}_{\frac{0}{3},\frac{1}{3}}^{\le(1,0,0)}, \mathrm{IC}_{(1,0,0)})$$

にも対合が定まる．このとき二つの対合が整合的であることが証明できる．このことを用いて，$H_c^*(\mathcal{M}_{\frac{-1}{3},\frac{1}{3}}^{\le(2,0,0)}, \mathrm{IC}_{(1,1,0)})$ を分離できる．

さらに

$$H_c^*(\mathcal{M}_{\frac{-1}{3},\frac{1}{3}}^{\le(2,0,0)}, \mathrm{IC}_{(1,1,0)}) \simeq H_c^*(\mathcal{M}_{\frac{-1}{3},\frac{1}{3}}^{\le(1,1,0)}, \mathrm{IC}_{(1,1,0)})$$

である．捻りによって定まる射

$$\mathcal{M}_{\frac{-1}{3},\frac{1}{3}}^{\le(1,1,0)} \times \mathcal{M}_{\frac{0}{1},\frac{1}{1}}^{\le(1)} \to \mathcal{M}_{\frac{1}{3},\frac{2}{3}}^{\le(1,0,0)}$$

を用いて，$\mathcal{M}_{\frac{1}{3},\frac{2}{3}}^{\le(1,0,0)}$ のコホモロジーを調べることができる．

参考文献

[BG02] A. Braverman and D. Gaitsgory, Geometric Eisenstein series, Invent. Math. 150 (2002), no. 2, 287–384.

[Bor79] A. Borel, Automorphic L-functions, in Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979 pp. 27–61.

[Far16] L. Fargues, Geometrization of the local Langlands correspondence: An overview, 2016, arXiv:1602.00999.

[Far17] L. Fargues, Simple connexité des fibres d'une application d'Abel-Jacobi et corps de classe local, 2017, arXiv:1705.01526, to appear in Annales Scientifiques de l'ENS.

[FGV02] E. Frenkel, D. Gaitsgory and K. Vilonen, On the geometric Langlands conjecture, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), no. 2, 367–417.

[GI16] I. Gaisin and N. Imai, Non-semi-stable loci in Hecke stacks and Fargues' conjecture, 2016, arXiv:1608.07446.

[Ima19] N. Imai, Convolution morphisms and Kottwitz conjecture, 2019, arXiv:1909.02328.

[Laf02] L. Lafforgue, Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands, Invent. Math. 147 (2002), no. 1, 1–241.

[SW13] P. Scholze and J. Weinstein, Moduli of p-divisible groups, Camb. J. Math. 1 (2013), no. 2, 145–237.