THE $\overline{\mu}$-INVARIANTS AND THE ETA INVARIANTS FOR SEIFERT RATIONAL HOMOLOGY 3-SPHERES

上　正明

dedicated to Prof. Yukio Matsumoto for his 70th birthday

ザイフェルト有理ホモロジー３球面（以下向き付け可能な底空間をもつもののみ考える）とその上のスピン構造の組 (Y,s) の $\overline{\mu}$ 不変量と他の不変量（Oszváth-Szabó の補正項不変量など）との関係をみるために，(Y,s) に対する η 不変量と関連づける試みについて報告する．

1. 不変量の定義と定理

$\overline{\mu}$ 不変量は４次元鉛管多様体の境界となる３次元多様体（グラフ多様体）に関して定義される．

定義 1. Y を整数値のウェイト付きのグラフ Γ に付随する４次元鉛管多様体 $P(\Gamma)$ の境界 $Y=\partial P(\Gamma)$ として表されるグラフ多様体とする（Γ の取り方は一意ではない）．以下 Y は有理ホモロジー３球面とする．このとき Γ はサイクルを含まず，Γ の各頂点 v_i にはそのウェイト e_i を Euler 数とする D^2 上の S^2 バンドル E_i が対応し，$P(\Gamma)$ は頂点どうしが辺で結ばれているとき対応するバンドルを鉛管構成によって貼り合わせて得られる．$H_2(P(\Gamma),\mathbf{Z})$ は E_i のゼロ切断を生成元（同じ v_i で表す）とする自由アーベル群である．ここで Y にスピン構造 s を与えたとき，$H_2(P(\Gamma),\mathbf{Z})$ の特性元 $w=\sum \epsilon_i v_i$ で

(1) ϵ_i は 0 または 1．
(2) $PDw \pmod 2 \in H^2(P(\Gamma),\partial P(\Gamma),\mathbf{Z}_2)$ は s を $P(\Gamma)$ のスピン構造に拡張するための障害

となるものが一意的に存在する．このとき

$$\overline{\mu}(Y,s)=\sigma(P(\Gamma))-w\cdot w\in\mathbf{Z}$$

とおく（Neumann-Siebenmann）．この定義は $P(\Gamma)$ の取り方にはよらず，$\overline{\mu}(Y,s) \pmod{16}$ は Rochlin 不変量 $\mu(Y,s)$ に一致する．

注 1. $\overline{\mu}(Y,s)$ の定義の符号を逆にする場合，また Y が整係数ホモロジー３球面のときは 8 で割った形で定義する場合もある．

定理 1 (Fukumoto-Furuta, Ue, Saveliev)**.** Y がザイフェルト有理ホモロジー３球面で，s が Y の *spin* 構造のとき，$\overline{\mu}(Y,s)$ は有理ホモロジーコボルディズム不変である．

次に一般の３次元多様体に対する η 不変量の定義を与える．

定義 2. Y を向きづけられた３次元閉多様体，g を Y のリーマン計量とし，$D:\Gamma(E)\to\Gamma(E)$ を Y 上のバンドル E に関する自己随伴楕円型作用素とする．このとき D の固有値は有限重複度の離散的な実数で D の η 関数が

$$\eta_D(s,Y,g)=\sum_{\lambda\neq 0}(\operatorname{sgn}\lambda)|\lambda|^{-s}\quad (s\in\mathbf{C})$$

で定義される（和は D の 0 でない固有値全体に対する和）．この $\eta_D(s,Y,g)$ を 0 まで解析接続し 0 での値 $\eta_D(Y,g)=\eta_D(0,Y,g)$ を (Y,g) の η 不変量と定める（Atiya-Patodi-Singer)．特に D が Y の符号数作用素 D_{sign} のときその η 不変量を $\eta_{\mathrm{sign}}(Y,g)$, D が Y の spin^c 構造 s に付随する Dirac 作用素 $\mathcal{D}$ のときは $\eta_{\mathcal{D}}(Y,g)$ とおく．これらは g に依存するが，文脈から明らかなときは g は省略する．

ここで Y が向きづけられた２次元軌道体 Σ 上のファイバー構造をもつザイフェルト有理ホモロジー３球面がある条件をみたすとき，Y のある標準的な（Thurston 幾何構造に適合する）計量 g に関する符号数作用素と Y の spin 構造 s に付随する Dirac 作用素に対し，次の関係がなりたつ．

定理 2. Y が $-|\deg Y|\leq\chi^{\mathrm{orb}}(\Sigma)$ をみたすならば Y のある標準的計量 g に対し次がなりたつ．

$$(*)\quad \overline{\mu}(Y,s)=-4\eta_{\mathcal{D}}(Y)-\eta_{\mathrm{sign}}(Y)$$

ここで $\mathcal{D}$ は s に付随するスピノールバンドル上のある接続に同伴する形で定める．

注 2. 上の $(*)$ は Y が整係数のホモロジー３球面で s が Y の（唯一の）spin 構造の場合（$\overline{\mu}$ の規約を変えて）Mrowka-Rubermann-Saveliev に

より具体的な計算によって示されていた（上記の結果とはPoincareホモロジー3球面の場合以外は重複しない）．

ここでは$(*)$をSeiberg-Wittenモジュライ方程式の有限次元近似（古田）の手法により幾何学的に示すことを考える．$(*)$が条件なしに，あるいは直接計算で示せるかどうかは（筆者には）明らかでない．少なくともこの式の幾何的意味を考えることは意味のあることである．

定義 3. Σを向き付けられた種数0の2次元軌道体でn個の特異点を持ち，それぞれの重複度がα_i $(i=1,\dots,n)$であるとする．このときΣ上のV複素直線バンドル (orbifold line bundle) Eのザイフェルト不変量が

$$\{e,(\alpha_1,\gamma_1),\dots,(\alpha_n,\gamma_n)\},\quad 0\le\gamma_i<\alpha_i\quad(i=1,\dots,n)$$

で与えられる．ここでeはEの非特異化$|E|\to|\Sigma|$のオイラー数であり，Eの重複度α_iの特異点上のファイバーの近傍は

$$\pi^{-1}(D_i)\cong(D^2\times\mathbf{C})/\mathbf{Z}_{\alpha_i}$$

と表される．ただし$\mathbf{Z}_{\alpha_i}$の生成元$\zeta=\exp(2\pi i/\alpha_i)$は$D^2\times\mathbf{C}$上に

$$\zeta(w,z)=(\zeta w,\zeta^{\gamma_i}z)\quad((w,z)\in D^2\times\mathbf{C})$$

により作用する．このときEの（有理）次数が

$$\deg E=e+\sum_{i=1}^n\frac{\gamma_i}{\alpha_i}$$

により定義される．ここでYをΣ上のファイバー構造$\pi:Y\to\Sigma$をもつザイフェルト有理ホモロジー3球面とすると，Yはあるザイフェルト不変量

$$\{b,(\alpha_1,\beta_1),\dots,(\alpha_n,\beta_n)\}$$
$$0\le\beta_i<\alpha_i,\ \gcd(\alpha_i,\beta_i)=1\quad(i=1,\dots,n)$$

をもつΣ上の直線バンドルL_0に付随するS^1バンドル$Y=S(L_0)$であり，Yのザイフェルト不変量，次数をL_0のそれとして定義する．特にYが有理ホモロジー3球面ならば$\deg Y=\deg L_0\neq 0$である．

注 3. ザイフェルト不変量と次数の定義については文献により符号の違いがあるが，ここでは後述のMrowka-Ozsváth-Yuの結果に適合させるため，彼らの既約に従う．

$Y = S(L_0)$ の計量としては，Nicolaescu, Mrowka-Ozsváth-Yu にならって Σ の標準直線バンドル K_Σ の定曲率の計量 g_Σ および $\pi : Y \to \Sigma$ のファイバー方向の無限小作用の双対 η により

$$g_Y = \eta^2 + \pi^* g_\Sigma$$

の形の計量をいれる．Nicolaescu においては $\mathrm{vol}(\Sigma) = \pi$ となる g_σ を選び，η を $r\eta$ に置き変えた計量 g_r を考えている（r を十分小さくとる）．次に Y 上の spin^c 構造 s に対し g_r と両立する Y の 2 通りの接続を考える．1 つは Σ の Levi-Civita 接続 ∇_Σ の持ち上げ $\nabla = d \oplus \pi^*(\nabla_\Sigma)$（Nicolaescu により断熱的接続と呼ばれている），他方は g_r に関する Levi-Civita 接続 ∇^{LC} であり，$\deg Y \neq 0$ となる有理ホモロジー 3 球面においては両者は一致しない．ここで Y 上の標準的 spin^c 構造 s_{can} を対応するスピノールバンドル S_{can} が K_Σ の引き戻し $\mathcal{K} = \pi^*(K_\Sigma)$ と自明な直線バンドル $\underline{\mathbf{C}}$ の直和となる spin^c 構造とすると，∇, ∇^{LC} はそれぞれ S_{can} の接続に持ち上がる（同じ記号で書く）．一方 Y の一般の spin^c 構造は Y 上の複素直線バンドル L により $s_L = s_{\mathrm{can}} \otimes L$ と書かれ，L 上の Hermite 接続 B を与えると ∇, ∇^{LC} とのカップリングにより対応するスピノールバンドル $S_L = (\mathcal{K} \oplus \underline{\mathbf{C}}) \otimes L$ 上の 2 種類の接続 ∇_B, ∇_B^{LC}, およびそれらに同伴する Dirac 作用素

$$\mathcal{D}_B,\ \mathcal{D}_B^{LC} : \Gamma(S_L) \to \Gamma(S_L)$$

が得られる．この両者の差は

$$\mathcal{D}_B = \mathcal{D}_B^{LC} + \frac{r \deg Y}{2}$$

で与えられる．Mrowka-Ozsváth-Yu は Y の Seiberg-Witten モジュライ空間を決定したが，その際方程式を前者の Dirac 作用素によって定義しており，これを利用するためには前者を考慮する必要がある．一方他の不変量との比較には後者を用いるが，両者の η 不変量の差は Nicolaescu により計算されている．

注 4. Dirac 作用素を定義する際の Clifford 積 $c : \wedge^*(Y) \to \mathrm{End}(S_L)$ を Mrowka-Ozsváth-Yu においては $c(\mathrm{dvol}_Y) = 1$, Nicolaescu においては $c(\mathrm{dvol}_Y) = -1$ となるように定めているため，Dirac 作用素の符号の取り方が両者で異なる．以下後者の計算に従うため後者に合わせる．

ここで X を $\partial X = Y$ となるコンパクト 4 次元多様体，g_X を ∂X のカラー近傍 $[0,1] \times Y$ 上 $dt^2 + g_r$ となる X の計量とし，g_X に両立する TX

の接続 $\widehat{\nabla}$ を $[0,1]\times Y$ 上 $dt\otimes\partial/\partial t+\nabla$ となるようにとり，また TX の Levi-Civita 接続を $\widehat{\nabla}^{LC}$ とおく．さらに $(\widehat{L},\widehat{B})|_Y=(L,B)$ となる X 上の直線バンドル $\widehat{L}$ とその上の接続 $\widehat{B}$, および $s_{\widehat{L}}|_Y=s_L$ となる X 上の spin^c 構造を $\widehat{\nabla}$ と $\widehat{\nabla}^{LC}$ がそれぞれ $\widehat{B}$ とともに $s_{\widehat{L}}$ に付随するスピノールバンドル $S_{\widehat{L}}$ の接続を与えるようにとる．これにより $\widehat{\nabla}$, $\widehat{\nabla}^{LC}$ に対応する 2 種類の X 上の Dirac 作用素

$$\mathcal{D}_{\widehat{B}},\ \mathcal{D}^{LC}_{\widehat{B}}:\Gamma(S^+_{\widehat{L}})\to\Gamma(S^-_{\widehat{L}})$$

が得られ，$[0,1]\times Y$ 上では Nicolaescu の既約に従うとそれぞれ

$$\mathcal{D}_{\widehat{B}}=\partial/\partial t-\mathcal{D}_B,\quad \mathcal{D}^{LC}_{\widehat{B}}=\partial/\partial t-\mathcal{D}^{LC}_B$$

と表される．さらに Atiyah-Patodi-Singer の定理がいずれにおいても成立する (Nicolasecu) ことから

$$\operatorname{ind}\mathcal{D}_{\widehat{B}}=\int_X(-\frac{1}{24}p_1^{\widehat{\nabla}})-\frac{1}{2}(\eta_{\mathcal{D}_B}+h_{\mathcal{D}_B})$$

となる（$p_1^{\widehat{\nabla}}$ は $\widehat{\nabla}$ に付随する第 1 Pontryagin 類）．ここで $h_{\mathcal{D}_B}=\dim\ker\mathcal{D}_B$ である．一方 Y の符号数作用素の η 不変量については X の符号数 $\sigma(X)$ と $\widehat{\nabla}^{LC}$ に付随する第 1Pontryagin 類により

$$\sigma(X)=\int_X\frac{p_1^{\widehat{\nabla}^{LC}}}{3}-\eta_{\mathrm{sign}}$$

である．

ここで s_L, $s_{\widehat{L}}$ が spin 構造のとき，∇_B が引き起こす $\det s_L$ の接続が平坦なものをとる（後述の Y の Seiberg-Witten モジュライ空間の可約成分に対応する）と $\eta_{\mathcal{D}_B}$ と $\eta_{\mathcal{D}^{LC}_B}$, $\int_X\frac{p_1^{\widehat{\nabla}}}{3}$ と $\int_X\frac{p_1^{\widehat{\nabla}^{LC}}}{3}$ の比較計算 (Nicolaescu) の結果を代入することで次の関係が得られる．

$$4\eta(\mathcal{D}^{LC}_B)+\eta_\sigma=-8\operatorname{ind}\mathcal{D}_{\widehat{B}}-\sigma(X)-4h(\mathcal{D}_B)$$

前述の定理における $\eta_{\mathcal{D}}$ はこの $\mathcal{D}^{LC}_B$ に対する η 不変量である．

2. Seiberg-Witten モジュライ空間

この結果を Y に対する Seiberg-Witten モジュライ空間の議論と結びつける．

$\pi:Y\to\Sigma$ を Seifert 有理ホモロジー 3 球面とし s_L を以前のように Y の spin^c 構造，S_L をそれに付随するスピノールバンドルとする．こ

のとき S_L の接続のなす空間 $\mathcal{A}(S_L)$（ただし「断熱的」接続 ∇_B の形の接続を考える）とスピノールの空間 $\Gamma(S_L)$ の組のゲージ同値類からなる規制空間

$$\mathcal{B}_Y(s_L) = \{(A, \phi) \in \mathcal{A}(S_L) \times \Gamma(S_L)\}/\mathcal{G}_Y \quad (\mathcal{G}_Y = \mathrm{Map}(Y, S^1))$$

において計量 g_r に関する Seiberg-Witten 方程式

$$F_{A^t} - \sigma(\phi) = 0$$
$$\mathcal{D}_A(\phi) = 0$$

の解のゲージ同値類のなすモジュライ空間を $\mathcal{M}_X(s_L)$ とおく．ここで F_{A^t} は A から誘導される s_L の行列直線バンドル $\det s_L$ 上の接続の曲率，$\sigma(\phi)$ は $\phi \otimes \phi^*$ のトレース 0 の成分を Clifford 積により $\wedge^2(Y)$ の元と同一視したもの，$\mathcal{D}_A$ は A に同伴する（断熱的）Dirac 作用素である．なお Seiberg-Witten 方程式解は Chern-Simons-Dirac 汎函数

$$CSD : \mathcal{A}(S_L) \times \Gamma(S_L) \to \mathbf{R}$$

の特異点であるが，Y が有理ホモロジー 3 球面ならば CSD は $\mathcal{B}_Y(s_L)$ からの写像

$$CSD : \mathcal{B}_Y(s_L) \to \mathbf{R}$$

を引き起こし，$\mathcal{M}_Y(s_L)$ はその特異点集合となる．$\mathcal{M}_Y(s_L)$ の構造に関して次のことが知られている．

定理 3 (Mrowka-Ozsváth-Yu). 一般にザイフェルトファイバー空間 $\pi : Y = S(L_0) \to \Sigma$ に対し $\mathcal{M}_Y(s_L) \neq \emptyset$ となることとある Σ 上の直線バンドル E_0 に対して $L \cong \pi^* E_0$ となることは同値である．このとき $\mathcal{M}_Y(s_L)$ の可約成分 $\mathcal{M}_Y^{\mathrm{red}}(s_L)$ は *1* 個のヤコビトーラス $\mathcal{T} \cong H^1(|\Sigma|, \mathbf{R})/H^1(|\Sigma|, \mathbf{Z})$ からなり，既約成分 $\mathcal{M}_Y^*(s_L)$ は

$$0 \le \deg E < \frac{\deg K_\Sigma}{2}, \ E \equiv E_0 \ (\mod \mathbf{Z}[L_0]).$$

をみたす Σ 上の各直線バンドル E ごとに定義される $\mathcal{C}^+(E)$ と $\mathcal{C}^-(E)$ の対からなる．ここで $\mathcal{C}^\pm(E)$ は E の非特異化 $|E| \to |\Sigma|$ のオイラー数を e としたとき $|\Sigma|$ の e 次対称積 $\mathrm{Sym}^e(|\Sigma|)$ に同相である．

特に Y が有理ホモロジー 3 球面ならば Y 上の任意の直線バンドルは Σ 上のバンドルの引き戻しであり，さらに定理 2 の条件をみたすときは次のことが示される．

命題 1. $\pi : Y \to \Sigma$ を定理 *2* の条件をみたすザイフェルト有理ホモロジー *3* 球面で s_L が *spin* 構造のとき，$\mathcal{M}_Y^*(s_L) = \emptyset$ で $\mathcal{M}_Y^{\mathrm{red}}(s_L)$ は *1* 点 $[A, 0]$ からなる．さらに A に同伴する（断熱的）*Dirac* 作用素 $\mathcal{D}_A$ に対して $\dim \mathcal{D}_A = 0$ であり，$[A, 0]$ は CSD の非退化特異点である．

この A が前述の $\det s_L$ 上の平坦接続を誘導する接続 ∇_B である．
次にこのような Y と spin 構造 s_L に対して

$$(Y, s_L) = \partial(\widehat{X}, s_{\widehat{X}})$$

となる 4 次元の軌道体 $\widehat{X}$ とその上の spin 構造 $s_{\widehat{X}}$ をとる．ここで $\widehat{X}$ の特異点はすべて孤立特異点とする．このとき特異点の近傍は 3 次元楕円型多様体 S_i 上の錐 $c(S_i)$ であり，これらを $\widehat{X}$ から除くと $\partial X = \cup_i Y_i$（$Y_0 = Y$, $i \geq 1$ に対し $Y_i = -S_i$ とおく）となる 4 次元多様体 $X = \widehat{X} \setminus \cup_I c(S_i)$ とその上の spin 構造 s_X が得られる．ここで s_X の $Y_0 = Y$ への制限は $s_0 = s_L$ であり，S_i への制限は s_i とおく．

注 5. このような $\widehat{X}$ は常に存在する．軌道体にとるのは，ベッチ数をなるべく下げるためである．

今 X に $[0, \infty) \times \partial X$ を付加した開多様体を $\widetilde{X}$ とおき，$\widetilde{X}$ の計量 $g_{\widetilde{X}}$ をエンドの各成分上 Y の計量 g_r, S_i の標準計量 g_i と $[0, \infty)$ の標準計量との直積となるようにとり，X 上の対象を自然に $\widetilde{X}$ に拡張する．
そこで以下簡単のため $\widetilde{X}$ を単に X と表し，s_X に付随する $+$ スピノールバンドル S_X^+ 上の接続のなす空間 $\mathcal{A}(S_X^+)$ とスピノール $\Gamma(S_X^+)$ の対のゲージ同値類のなす規制空間

$$\mathcal{B}_X(s_X) = \{(\widehat{A}, \widehat{\phi}) \in \mathcal{A}(S_X^+) \times \Gamma(S_X^+)\}/\mathcal{G}_X \quad (\mathcal{G}_X = \mathrm{Map}(X, S^1))$$

において 4 次元の Seiberg-Witten 方程式

$$F_{\widehat{A}^t} - q(\widehat{\psi}) = 0$$
$$\mathcal{D}_{\widehat{A}}(\widehat{\psi}) = 0$$

の解の同値類のなす Seiberg-Witten モジュライ空間を $\mathcal{M}_X(s_X)$ とおく．ただし Mrowka-Ozsváth-Yu の結果に適合させるため，X 上の基準となる接続 $\widehat{A}_0$ を（$S_X^+|_{Y_i}$ と Y_i 上のスピノールバンドルの同一視を経由して）X の各エンド上彼らの定理に現れた 3 次元モジュライ空間の可約な 1 点を表す接続の引き戻しとなっているように選び，$\mathcal{A}(S_X^+) = A_0 + \Omega^1(X, i\mathbf{R}) \otimes 1_{S_X}$ として定める（実際は S_i 上は Levi-Civita 接続で

もよい）．また $\mathcal{D}_A$ はこのような接続に同伴する Dirac 作用素である．このとき $\mathcal{M}_X(s_X)$ の元 (A,ϕ) は X のエンドの各成分 $[0,\infty)\times Y_i$ 上テンポラルゲージ（A の dt 成分が 0）で表すと Chern-Simons-Dirac 汎函数 $CSD:\mathcal{B}_{Y_i}(s_i)\to\mathbf{R}$ に関する勾配流 $(A(t),\phi(t))$ となるが，前述の命題の条件（楕円型多様体に対しては常に成り立つ）のもとではこの勾配流は CSD の特異点（この場合非退化で可約な 1 点 $[A_\infty,0]$）に指数関数的に近づく．すなわちある $C,\delta>0$ が存在して

$$||A(t)-A_\infty,\phi(t)||_{L^2_k(Y)}<Ce^{\delta(t-T_0)}\quad (t>T_0)$$

が十分大きな T_0 に対して成り立つ．ここでの δ は A_∞ に同伴する Y_i の Dirac 作用素と Y_i の ASD 作用素の和の 0 でない固有値の絶対値の最小値より小さくとる．これにより $\mathcal{M}_X(s_X)$ は $\mathcal{B}_X(s_X)$ をウェイト付きノルム $L^2_{k,\delta}$ で完備化した空間の中で定義され，境界写像

$$\partial_\infty:\mathcal{M}_X(s_X)\to\cup\mathcal{M}_{Y_i}(s_i)$$

が定まる（各 $\mathcal{M}_{Y_i}(s_i)$ はここでは 1 点）．

実際は各 Y_i に対して 3 次元 Seiberg-Witten 方程式解の空間を X に拡張するゲージ変換からなる群で割った商空間を $\widetilde{\mathcal{M}}_{Y_i}(s_i)$ とおくと $\widetilde{\mathcal{M}}_{Y_i}(s_i)$ は $\mathcal{M}_{Y_i}(s_i)$ 上の $H^1(Y_i,\mathbf{Z})/(\mathrm{Im}:H^1(X,\mathbf{Z})\to H^1(Y_i,\mathbf{Z}))$ の位数を次数とする被覆となり，∂_∞ はこれを経由する．しかし CSD の単調性から $\widetilde{\mathcal{M}}_{Y_i}(s_i)$ の元どうしを結ぶような勾配流は存在しないので，各エンドにおいて複数の勾配流をつなぐ特異軌道 (broken trajectory) は発生しない．これより

命題 2. Y が定理の条件をみたすならば $\mathcal{M}_X(s_X)$ はコンパクトである．

この X に先の式を適用すると $\dim\ker\mathcal{D}(Y_i)=0$ を考慮して次の等式が得られる．

$$(**)\quad \eta_{\mathrm{sign}}(Y)+4\eta_{\mathcal{D}^{LC}}(Y)=-\sigma(X)-8\,\mathrm{ind}\,\mathcal{D}_X \\ +\sum_i(\eta_{\mathrm{sign}}(S_i)+4\eta_{\mathcal{D}^{LC}}(S_i))$$

ただし $\eta_{\mathcal{D}^{LC}}(Y)$, $\eta_{\mathcal{D}^{LC}}(S_i)$ は前述の Levi-Civita 接続に対して定義された Y, S_i 上のそれぞれの spin 構造に関する Dirac 作用素であり，$\mathcal{D}_X$ は (断熱的な) X の接続に対して定義された X 上の Dirac 作用素である．

一方楕円型多様体である S_i に対しては次の関係が独立に示される．

命題 3.

$$\eta_{\mathrm{sign}}(S_i) + 4\eta_{\mathcal{D}^{LC}}(S_i) = -\overline{\mu}(S_i, s_i)$$

さらに (Y, s_0) に対しては次のことが成り立つ．

命題 4. $(Y, s_0) = \partial(\widehat{X}^i, \widehat{s}^i)$ をみたすコンパクト *spin4* 次元軌道体 $\widehat{X}_i$ で特異点が孤立点のみからなるものとその *spin* 構造 $\widehat{s}^i$ $(i = 1, 2)$ で次の性質をみたすものが存在する．

(1) $\sigma(\widehat{X}^i) + \sum_j \overline{\mu}(S^i_j, s^i_j) = \overline{\mu}(M, s)$, ここで S^i_j は X_i の孤立特異点のリンク，s^i_j は $\widehat{s}^i$ の S^i_j への制限である．

(2) $b_1(\widehat{X}_i) = 0$ $(i = 1, 2)$, $b^+_2(\widehat{X}^1) \leq 1$, $b^-_2(\widehat{X}^2) \leq 1$.

このことから $\widehat{X}^i$ からすべての特異点の近傍を除いて得られるコンパクト多様体を X^i とおけば，これに上の結果を適用して次の等式が得られる．以下 X^i にシリンダー型エンドを付け加えた開多様体も同じ X^i で表す．

$$\eta_{\mathrm{sign}}(Y) + 4\eta_{\mathcal{D}^{LC}}(Y) = -\overline{\mu}(Y, s_0) - 8 \operatorname{ind} \mathcal{D}_{X^i} \quad (i = 1, 2)$$

ここで $\mathcal{D}_{X^i}$ は s^i（の X^i への制限）に関する（断熱的）Dirac 作用素である．

結局

補題 1.

$$\operatorname{ind} \mathcal{D}_{X^i} = 0 \quad (i = 0, 1)$$

を示せば定理の主張が得られる．この補題の証明は Seiberg-Witten 方程式の有限次元近似の手法（古田）によって行われる．今

$\mathcal{M}_{X^i}(s^i)$ の元は自明バンドル $\det s^i$ 上の平坦接続を引き起こす接続 A_0 を基準に $[A_0 + a \otimes 1_{S^+}, \phi]$ $(a \in L^2_{k,\delta}(\wedge^1(X^i, i\mathbf{R}))$ の形に書け，ゲージ固定条件 $d^*_\delta a = 0$ を付け加えた Seiberg-Witten 方程式は 4 次元閉多様体における (Furuta) のと同様に次のように表される．

$$D + Q : L^2_{k,\delta}(\Gamma(S^+) \oplus \wedge^1(X^i, i\mathbf{R})) \to L^2_{k-1,\delta}(\Gamma(S^-) \oplus (\wedge^0 \oplus \wedge^2_+)(X^i, i\mathbf{R}))$$

ここで D は Dirac と ASD 作用素の和からなる線形作用素であり，Q は残りの非線形項である．なお ASD 作用素 $ASD : L^2_{k,\delta}(\wedge^1(X^i)) \to L^2_{k-1,\delta}(\wedge^0 \oplus \wedge^2_+)(X^i, i\mathbf{R})$ の指数（Atiyah-Patodi-Singer 型の指数に等しい）は

命題 5 (Nikolaescue).

$$\operatorname{ind} ASD = -\frac{1}{2}(\chi(X^i) + \sigma(X^i) + \sum_j (b_0(Y_j) + b_1(Y_j)))$$

で与えられるが，$b_1(X^i) = 0,\ b_1(Y_j) = 0$ であることから $\operatorname{ind} ASD = -1 + b_2^+(X^i)$ となる．

さらに s^i が spin 構造であることから，$D+Q$ は $Pin(2)$ 作用で不変であり，$S^\pm$ は $\mathbf{H}$ 構造をもち Dirac 作用素はこれを保つことから $\operatorname{ind}\mathcal{D}_{X^i}$ は偶数である（$2k$ とおく）．そこで $\mathcal{M}_{X^i}(s^i)$ がコンパクトであることから，閉多様体の場合と同様に $Q+D$ を有限次元近似 (Furuta) することで次のような $Pin(2)$ 同変な写像

$$f : \mathbf{H}^{k+m} \oplus \widetilde{\mathbf{R}}^n \to \mathbf{H}^m \oplus \widetilde{\mathbf{R}}^{b_2^+(X^i)+1+n}$$

が得られる．ここで m, n はある自然数，$\mathbf{H}$ は $Pin(2)$ の標準的作用をもつ 4 元数体，$\widetilde{\mathbf{R}}$ は $Pin(2)$ が自然な射影 $Pin(2) \to Pin(2)/S^1 \cong \{\pm 1\}$ を経由して作用する $\mathbf{R}$ であり閉多様体の場合と同様な議論により不等式

$$2k \leq b_2^+(X^i)$$

が得られる（$k \leq 0$ なら自明である）．さらに X^i の代わりに $-X^i$ を用いると

$$\eta_{\mathrm{sign}}(-Y_i) = -\eta_{\mathrm{sign}}(Y_i), \quad \eta_{\mathcal{D}}(-Y_i) = -\eta_{\mathcal{D}}(Y_i)$$

であることおよび $h_{\mathcal{D}}(-Y_i) = h_{\mathcal{D}}(Y_i) = 0,\ \operatorname{ind}\mathcal{D}_{-X^i} = -\operatorname{ind}\mathcal{D}_{X^i}$, $b_2^+(-X_0) = b_2^-(X_0)$ であることから同様に

$$-b_2^-(X^i) \leq 2k$$

がなりたつ（これらの結果はモジュライ空間が空集合であってもなりたつ）．

一方 X^i の構成から $b_1(X^i) = 0,\ b_2^+(X^1) \leq 1,\ b_2^-(X^2) \leq 1$, および前述の等式から $\operatorname{ind}(\mathcal{D}_{X^1}) = \operatorname{ind}(\mathcal{D}_{X^2})$ であるから先の 2 つの不等式から

$$\operatorname{ind}(\mathcal{D}_{X^i}) = 0$$

でなければならず，補題が示される．

3. 補遺

$\overline{\mu}(Y,s)$ と他の不変量，特に Ozsváth-Szabo の補正項不変量 $d(Y,s)$ との比較を考える背景に次の結果がある．

定義 4 (Ozsváth-Szábo). M を一般の有理ホモロジー 3 球面，t を M の spin^c 構造とするとき，補正項不変量 $d(M,t)$ は (M,t) の Heegaard Floer ホモロジー間の自然な写像 $HF^\infty(M,t) \to HF^+(M,t)$ の像に含まれる元の絶対次数の最小値として定義される．

定理 4 (Rustamov). 上記の (M,t) に対し，次の等式がなりたつ．

$$\frac{1}{2}d(M,t) - \chi(HF_{\mathrm{red}}(M,t)) = sw(M,t) + \frac{1}{8}(\eta_{\mathrm{sign}}(M) + 4\eta_{\mathcal{D}^{LC}}(M,t))$$

ここで $\chi(HF_{\mathrm{red}}(M,t))$ は簡約 *Floer* ホモロジー $HF_{\mathrm{red}}(M,t)$ の $\mathbf{Z}_2$ 次数に関するオイラー数，$sw(M,t)$ は (M,t) の 3 次元 *Seiberg-Witten* 不変量，$\eta_{\mathrm{sign}}(M)$, $\eta_{\mathcal{D}^{LC}}(M,t)$ はそれぞれ M および (M,t) に関する符号数作用素，*Dirac* 作用素の η 不変量である．

右辺の各項は M の計量の取り方に依存するが，和は位相不変量になる．M が特別な場合，たとえば負定値な鉛管多様体 $P(\Gamma)$ の境界になる場合，Γ が「悪い頂点」（頂点のウェイトの絶対値より頂点から出る辺の数が大きい点）をもたなければ $HF_{\mathrm{red}}(Y,t) = 0$(Ozsváth-Szabó) であり，さらに t が spin 構造であれば直接 $d(M,t) = \overline{\mu}(M,t)$ が成り立つ（主定理の条件をみたす多くの Seifert 有理ホモロジー 3 球面はこれにあてはまる）．しかし一般には Seifert ホモロジー球面であっても両者は一致せず，（Mrowka-Rubermann-Saveliev の結果によれば）その差は $HF_{\mathrm{red}}(M,t)$ または $sw(M,t)$ に現れることになるが，詳細は不明である．またこれらの不変量は Manolescu の β 不変量とも一致しないが他の不変量（Furuta-Lee の不変量など）も含めてそれらとの関係も少なくとも筆者には現時点ではよくわからない．

Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto, 606-8502, Japan

E-mail address: `ue@math.kyoto-u.ac.jp`