5-CHARTS WITH FOUR CROSSINGS

TERUO NAGASE AND AKIKO SHIMA

n を自然数とする. <u>n-chart</u> とは円板内の向きとラベルが付いたグラフで、 各辺のラベルは 1,2,$\cdots$, か $n-1$ であり, 各頂点は次の内のどれかである ([1], [3]).

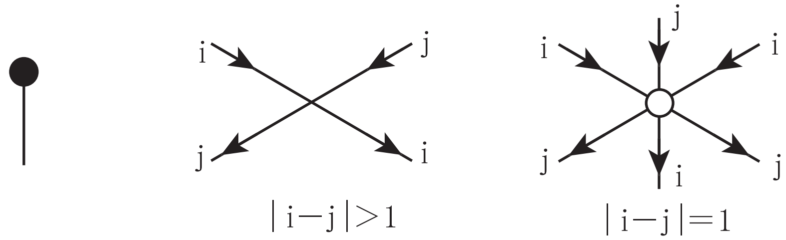


図１.

次数が１, ４, ６の頂点をそれぞれ <u>black vertex</u>, <u>crossing</u>, <u>white vertex</u> という.

chart Γ に有限回の C-move を施して chart Γ' が得られるとき, Γ と Γ' は <u>C-同値</u>であるという. chart Γ が white vertex のない chart に C-同値であるとき, Γ を <u>ribbon chart</u> という.

次の chart は ribbon chart であることが示されている.

(1) 3-chart ([2])

(2) 高々１つの crossing を含む n-chart ([4])

(3) n-chart で高々２つの crossing を含み, その chart が表す曲面結び目が球面達を表すもの ([5],[6])

更に crossing を３つ含む n-chart や、 crossing を４つ含む 4-chart について結果も得られている.

Γ を chart とする.

$c(\Gamma)$ = crossing の数, $w(\Gamma)$ = white vertex の数,

$f(\Gamma)$ = free edge の数, $b(\Gamma)$ = bigon の数

The second author is partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (No.23540107), Ministry of Education, Science and Culture, Japan.

とおく. ここで, 両端が black vertex である辺を free edge という. Γ の２つの辺を境界とする図のような open disk を bigon という.

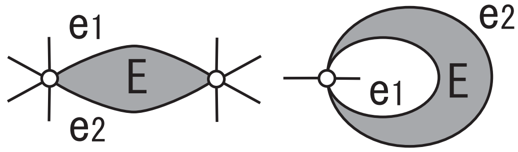


図２．e_1, e_2 が Γ の辺で、E が open disk.

４つの組 $(c(\Gamma), w(\Gamma), -f(\Gamma), -b(\Gamma))$ を Γ の C-complexity という. chart Γ が C-minimal であるとは次の条件を満たすことをいう：４つの整数の組の間に辞書式順序を考えたとき Γ と C-同値な chart の中で、Γ の C-complexity が最小である.

つぎが今回の主結果である.

定理. つぎの条件を満たす C-minimal 5-chart は存在しない.

(1) 丁度４つの crossing を含む.

(2) chart から得られる曲面結び目が球面達を表す.

つまり, (1) と (2) を満たす 5-chart は C-move によって white vertex の数を減らすことが出来る.

条件 (2) より,

(3) black vertex の数が８個以下である 5-chart

について調べればよいことが分かる.

次に, どんな種類の crossing を含む chart を調べなければいけないか述べる.

補題. Γ を丁度４つの crossing を含む C-minimal 5-chart とする.

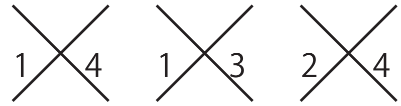
(1) $c(\Gamma_1) \geq 1$ ならば, $c(\Gamma_1) \geq 2$ である.

(2) $c(\Gamma_4) \geq 1$ ならば, $c(\Gamma_4) \geq 2$ である.

(3) $c(\Gamma_1 \cap \Gamma_4) \geq 1$ ならば, $c(\Gamma_1 \cap \Gamma_4) \geq 2$ である.

ここで, $c(G)$ は G に含まれる crossing の数、Γ_i は Γ の label i の辺とその頂点からなる部分グラフとする.

Γ に含まれる crossing は丁度４つあるが、上の補題から、次の６種類を調べればよいことが分かる:

5-chart の crossing の種類は 

であるので

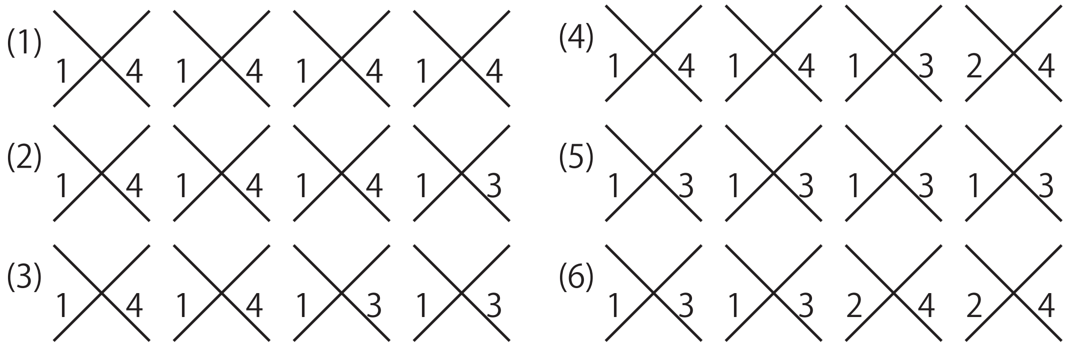


図 3.

上の表で，同時にラベル 1,2,3,4 をそれぞれラベル 4,3,2,1 に取り換えれ得られるものは省略してある.

この講演では, どのように black vertex が 8 個の C-minimal 5-chart を調べていったか述べたいと思う.

References

[1] J. S. Carter and M. Saito: Knotted surfaces and their diagrams, Mathematical Surveys and Monographs, 55, American Mathematical Society, Providence, RI, (1998).

[2] S. Kamada: *Surfaces in R^4 of braid index three are ribbon*, J. Knot Theory Ramifications 1, no. 2 (1992), 137–160.

[3] S. Kamada: Braid and Knot Theory in Dimension Four, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 95, American Mathematical Society, (2002).

[4] T. Nagase and A. Shima, *Any chart with at most one crossing is a ribbon chart*, Topology Appl. **157** (2010), 1703–1720.

[5] T. Nagase and A. Shima, *On charts with two crossings I: There exist no NS-tangles in a minimal chart*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **17** (2010), 217–241.

[6] T. Nagase and A. Shima, *On charts with two crossings II*, Osaka J. Math. **49** (2012), 909–929.

Department of Mathematics, Tokai University, 4-1-1 Kitakaname, Hiratuka Kanagawa, 259-1292 Japan

E-mail address: `shima@keyaki.cc.u-tokai.ac.jp`