Asymptotic geometry of Heegaard splittings

大鹿健一　（大阪大学）

Klein 群 G の変形空間 $AH(G)$ は，それ自身の $\mathrm{PSL}_2\mathbf{C}$ への指標多様体 $X(G)$ の閉部分集合と見なせる．これにより，$AH(G)$ と，G から基本群への全射がある双曲 3 次元閉多様体との相対的な位置関係を問題にすることができる．この視点が特に重要なのは G が自由群 F_g の場合である．このとき，$AH(F_g)$ は Schottky 空間 S_g の閉包であり，また $X_g := X(F_g)$ は g 元生成基本群をもつ双曲 3 次元多様体を (marking 付きで）全て含む.

X_g の中の双曲 3 次元閉多様体の族の振る舞いで，まず問題とすべきなのは，どのようなときに集積するかと言うことである．Jøregensen, Thurston の仕事で， hyperbolic Dehn surgery に対応した，双曲 3 次元多様体の列の有限体積で閉でない双曲多様体への集積（これは代数的にも幾何的にも収束している）がある．この他にどのような状況で集積するかというのが問題となる．その手始めとして，次の事実を示した.

定理 1 (Kim-Lecuire-O) *S_g の境界の任意の点は双曲 3 次元閉多様体の列の極限になっている．特に閉多様体列は primitive stable な表現からなるものとしてとれる.*

“primitive stable” という概念はここでは述べない．この定理のように，X_g 内での双曲 3 次元多様体の振る舞いを調べるためには，古典的な概念である，Heegaard 分解を使うことが有効である．一般に基本群が g 元生成であるからといって，種数 g の Heegaard 分解を持つとは限らない．しかしこの問題はこの講演では扱わないことにして，X_g の 3 次元閉多様体に対応する表現で，種数 g の Heegaard 分解を持つものを考えよう.（Heegaard 種数と基本群の階数が異なる場合の振る舞いについても，X_g を通した視点で興味深い現象が解明できるのであるが.）

Heegaard 分解に関しては，Hempel 距離という概念がある．これは 2 つのハンドル体の meridian 系の距離を， 間にある Heegaard 曲面の曲線複体で計ったものである．上の定理で与えられる列は Hempel 距離が無

限に発散するような列である．一方で，Hempel 距離が無限に行かなくても，Schottky 空間の境界に収束する場合がある．この場合より精密に meridian 系の位置関係を調べるために，Heegaard marking distance という概念を導入する．

命題 2 *Schottky*空間S_gの境界に収束する種数gの*Heegaard*分解が*Hempel*距離が*bounded*な場合，*Heegaard marking distance*が無限に行く．その場合収束先は*parabolic*元をもつ．

一方で Hempel 距離が無限に行くからといって，Schottky 空間の境界に行くとは限らず，X_g での発散列になっていることもある．しかしながら次のことが示せる．

命題 3 *Hempel*距離が無限に行くような列が X_g の中で収束したとすると，その極限は*Schottky*空間 S_g の境界にのっている．

Hempel 距離が bounded で，Heegaard marking distance が無限に行く場合，S_g の境界にも，体積有限の多様体にも集積しない，新しい現象が存在する．これは X_g の中に余次元をもつ Klein 群の変形空間が存在し，そこの境界に集積することによって起こる．時間があればこの現象についても述べる．

参考文献

[1] I. Kim, C. Lecuire and K. Ohshika, Primitive stable closed hyperbolic 3-manifolds. Topology Appl. 172 (2014), 68–71