曲面絡み目上の２次元ブレイド

中村伊南沙 (東大数理)*

松本幸夫先生の７０歳のお誕生日をお慶び申し上げます

概要

曲面絡み目 S について、S 上の２次元ブレイドという、S をコンパニオンとするサテライトとして構成される曲面絡み目を考えることができる。曲面絡み目上の２次元ブレイドを用いて、曲面絡み目を区別できることを示す。

1　曲面絡み目上の２次元ブレイド

４次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^4$ 内への閉曲面の埋め込みを**曲面絡み目**という。ここでは曲面絡み目は向きづけられているとする。

曲面結び目 F 上の２次元ブレイドという、F をコンパニオンとする曲面結び目のサテライトの一種を考察する。これは円盤または閉曲面上の２次元ブレイドの概念を拡張したものである。$\mathbf{R}^4$ 内の F の管状近傍を $N(F)$ で表し、閉曲面 Σ 上の２次元ブレイドを $S \subset D^2 \times \Sigma$ とする。このとき、$f(D^2 \times \Sigma) = N(F)$ であるような埋め込み $f : D^2 \times \Sigma \to \mathbf{R}^4$ による像 $f(S)$ のことを、**曲面結び目 F 上の２次元ブレイド**という。

閉曲面 Σ 上の２次元ブレイドは Σ 上のある種のグラフである**チャート**で表すことがで

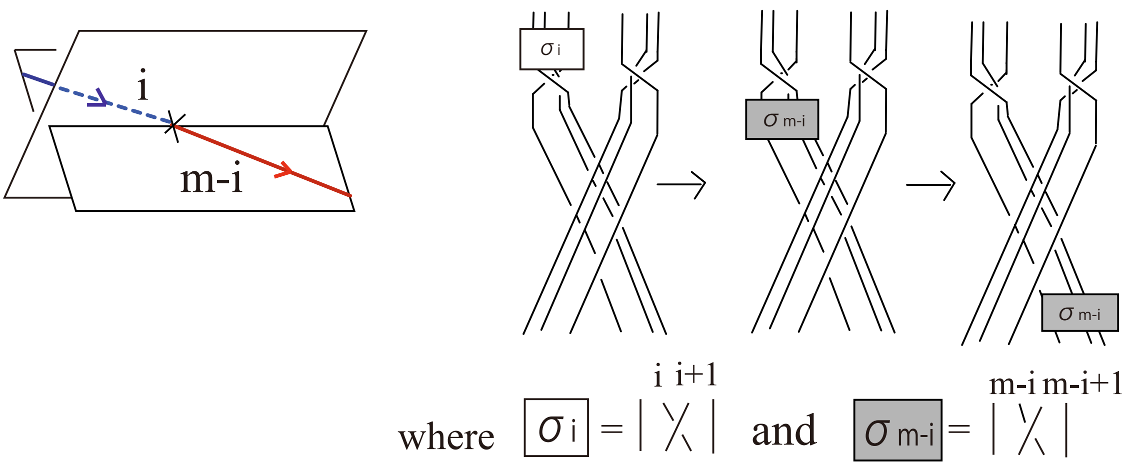

図１　２重点曲線のまわりの次数 m のチャートとそれの表す２次元ブレイド

* inasa@ms.u-tokyo.ac.jp
153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1
東京大学大学院数理科学研究科　附属数理科学連携基盤センター　生物医学と数学の融合拠点 (iBMath)
本研究は、文部科学省「生命動態システム科学推進拠点事業」の支援を受けたものである。

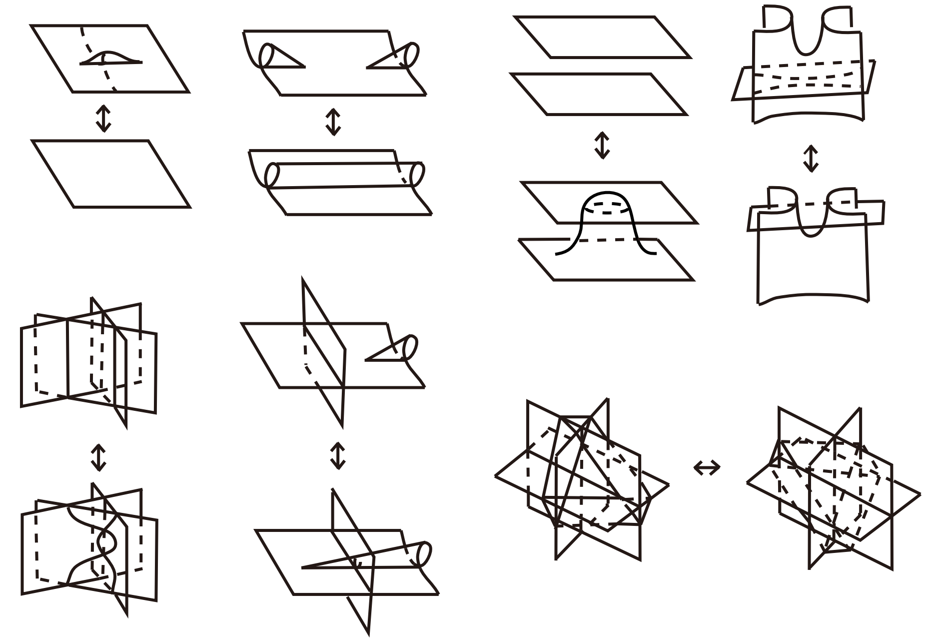

図 2　ローズマンムーブ

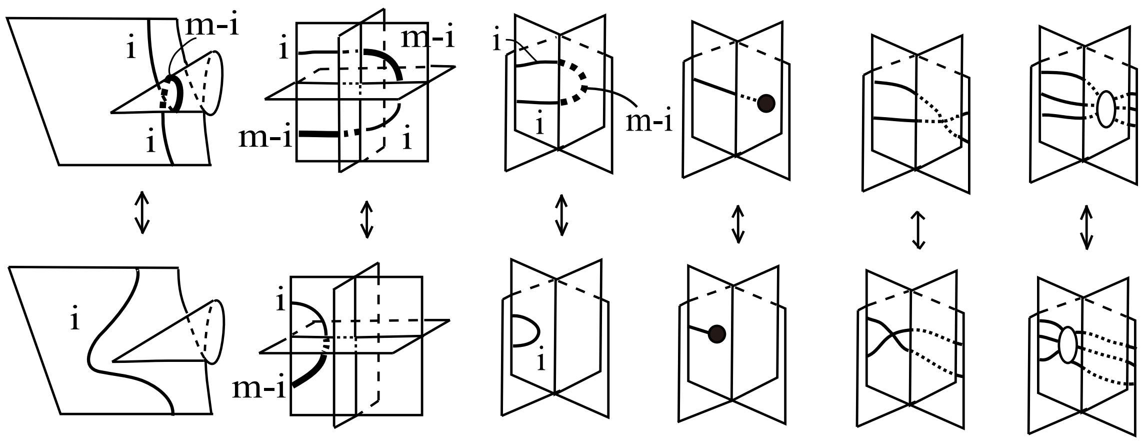

図 3　チャート付き曲面図式の新たなローズマンムーブ

きる [1, 3]。曲面図式 $\pi(F)$ 上の自明な次数 m のチャートが表す F 上の次数 m の 2 次元ブレイドを定義することにより、チャートの概念を曲面図式上に拡張できる [6]。ここで、曲面結び目 F の**曲面図式**とは、generic な射影 $\pi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ による像 $\pi(F)$ の 2 重点曲線に上下の情報を付け加えたもののことである。$\pi(F)$ の 2 重点曲線のまわりでのチャートの辺およびそれの表す 2 次元ブレイドは図 1 のようになる。曲面結び目 F 上の 2 次元ブレイドは F の曲面図式上のチャートで表される。

2　チャート付き曲面図式のローズマンムーブ

同値な曲面結び目はその曲面図式がローズマンムーブ（図 2 ）という局所変形でうつりあい、逆にローズマンムーブでうつりあう曲面図式は同値な曲面結び目を表すことが知られている [8]。**チャート付き曲面図式のローズマンムーブ**を、図 2 に示される通常のロー

ズマンムーブを自明なチャート付き曲面図式のムーブとみなしたものおよび図3で示されるものと定義する。

定理1（[6]） 次数 m のチャート付き曲面図式のローズマンムーブは well-defined である。すなわち、各ムーブの曲面図式は同値な2次元ブレイドを表す。

3 絡み目群が自由アーベル群である曲面絡み目

各成分がトーラス型の曲面絡み目を **T^2-絡み目**という。絡み目群がランク n の自由アーベル群である曲面絡み目をランク n の**アーベル曲面絡み目**と呼ぶことにする。アーベル T^2-絡み目のランクは4以下であり、ランク4のアーベル T^2-絡み目はトーラス被覆絡み目で実現できる [2]。ここで、**トーラス被覆絡み目**とは4次元空間 $\mathbf{R}^4$ の中の自明なトーラス T の被覆の形で表される曲面絡み目のことであり [5]、T 上の2次元ブレイドである。ただし、T 上の2次元ブレイドとしてみたときブランチ点がないものとする。このようなトーラス被覆絡み目 S について、自明なトーラス T の基点つきメリディアン μ とロンジチュード λ を考えると、それらに対応する S の部分は1次元のブレイドの閉包の形になっている。この1次元ブレイドのペアを**基底ブレイド**と呼ぶことにする。基底ブレイドは可換であり、逆に任意の可換な1次元ブレイドのペアが与えられたとき、それらを基底ブレイドに持つトーラス被覆絡み目が一意に定まる [5]。基底ブレイドが m-ブレイド a と b であるトーラス被覆絡み目を記号 $\mathcal{S}_m(a,b)$ で表すことにする。定義より、トーラス被覆結び目はトーラス上のチャートで表される。

4 曲面絡み目 S_k

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ を $(k+1)$-ブレイド群のスタンダードな生成元とし、$X_k = \sigma_1^2\sigma_2\sigma_3\cdots\sigma_k$（但し $X_1 = \sigma_1^2$）とし、Δ を正のハーフツイストである $(k+1)$-ブレイドとする。X_k, Δ^2 は、[2] で構成したランク4のアーベル T^2-絡み目の基底ブレイドの一部であり、X_k の閉包は2成分を成す。曲面絡み目 $S_k = \mathcal{S}_{k+1}(X_k, \Delta^2)$ はランク2のアーベル曲面絡み目である。

曲面絡み目 S_k は無限列を構成しているのか調べたい。基本群はランク2の自由アーベル群なので、基本群では S_k は区別できない。S_k の第1成分が第2成分の補空間で成す第2ホモロジー類を考察しても、[4] の結果と併せると、S_k の同値類は少なくとも2つあるということしか示せない。

[2] で構成したアーベル曲面絡み目は、絡み数の曲面版である**3重絡み数**を計算することによって曲面絡み目を区別することができた。しかし、3重絡み数は3成分以上から成る曲面絡み目について定義されているため、2成分から成る S_k については適用できない。そこで、S_k 上の2次元ブレイドを考える。次数 m の2次元ブレイドをうまくとると、成分数が m 倍になるからである。

5　主結果 [7]

曲面図式上の空チャートで表される 2 次元ブレイドを**自明な** 2 次元ブレイドと呼ぶことにする。曲面絡み目 S 上の自明な次数 m の 2 次元ブレイド $\widetilde{S}$ の成分数は、S の成分数の m 倍になる。

命題 1（[7]）　3 重絡み数が自明である曲面絡み目 S について、S 上の自明な次数 m の 2 次元ブレイド $\widetilde{S}$ の 3 重絡み数も自明である。

よって、S_k を区別するには自明でない 2 次元ブレイドを考えなければならないことが分かる。S_k 上の次数 2 の 2 次元ブレイド $\widetilde{S_k}$ で、曲面図式上の次数 2 のチャートで頂点のないもので表され、かつ成分数が 4 であるものを考える。そうなる全ての $\widetilde{S_k}$ を考えて、ローズマンムーブを使った同値変形およびその 3 重絡み数を考えることにより、以下の結果を得た。

定理 2（[7]）　異なる正の整数 k, l について、S_k と S_l は同値でない。

参考文献

[1] J. S. Carter, S. Kamada, M. Saito, *Surfaces in 4-space*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences 142, Low-Dimensional Topology III (Springer-Verlag, Berlin, 2004).

[2] Tetsuya Ito and Inasa Nakamura, *On surface links whose link groups are abelian*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **157** (2014), 63-77.

[3] S. Kamada, *Braid and Knot Theory in Dimension Four*, Math. Surveys and Monographs 95, Amer. Math. Soc., 2002.

[4] J. M. Montesinos, *On twins in the four-sphere. I*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **34** (1983), no. 134, 171–199.

[5] I. Nakamura, *Surface links which are coverings over the standard torus*, Algebr. Geom. Top. **11** (2011), 1497–1540.

[6] I. Nakamura, *Satellites of an oriented surface link and their local moves*, Topology Appl. **164** (2014), 113–124.

[7] I. Nakamura, *Showing distinctness of surface links by taking satellites*, arXiv:1403.3165.

[8] D. Roseman, *Reidemeister-type moves for surfaces in four-dimensional space*, in: Knot Theory, Banach Center Publications, vol. 42, Polish Acad. Sci., 1998, pp. 347–380.