

## Ivanov の「切り詰めタイヒミュラー空間」と モジュライ空間のコンパクト化について

松本幸夫 (学習院大学理学部数学科)

### 1 「切り詰めタイヒミュラー空間」

種数  $g$  の向き付けられた閉曲面から  $n$  個の相異なる点を抜いた曲面を  $\Sigma_{g,n}$  と書く．点抜きリーマン面  $S$  と向きを保つ同相写像  $w : S \rightarrow \Sigma_{g,n}$  の対  $(S, w)$  の等角同値類を  $[S, w]$  と書くと，その全体がタイヒミュラー空間  $T_{g,n}$  である．

以下， $2g - 2 + n > 0$  と仮定する． $n$  点抜きで種数  $g$  のリーマン面  $S$  には双曲構造が入る． $S$  上の非自明な（すなわち，零ホモトピックでなく，除かれた 1 点の周りにホモトピックでない）単純閉測地線  $C$  はポアンカレ計量により長さ  $l(C)$  が決まる．ある十分小さな正数  $M$  があって， $l(C_1), l(C_2) < M$  であれば， $C_1$  と  $C_2$  は一致するかあるいは交わらない」ということはよく知られている．点  $p \in T_{g,n}$  が  $p = [S, w]$  と表されるとき， $S$  上の非自明な単純閉測地線の長さの最小値を  $L(p)$  と書くと，区分的に実解析的な関数

$$L : T_{g,n} \rightarrow \mathbb{R}$$

が決まる（[1] 参照．）上にとった基本的な定数  $M$  よりも小さな任意の正数  $\varepsilon$  について

$$P_{g,n}^\varepsilon = \{p \in T_{g,n} \mid L(p) \geq \varepsilon\}$$

とおく．Ivanov [10] は写像類群  $\Gamma_{g,n}$  のコホモロジカルな性質を研究するためこの  $P_{g,n}^\varepsilon$  を考えた（彼の記号は  $X_S$  であるが．）これが表題の Ivanov の「切り詰めタイヒミュラー空間」である．

Ivanov [10] は  $P_{g,n}^\varepsilon$  が角をもつ多様体であることから，Borel–Serre [4] による「算術群の等質空間の角をもつ多様体としての境界付け」との関連を意識している．これはすでに Harvey [8] により意識され，彼の“complex of curves”によるタイヒミュラー空間の境界付けの試み [8] があるが，Ivanov は切り詰めタイヒミュラー空間  $P_{g,n}^\varepsilon$  が Harvey の試みをより簡明に実現させるものと考えている（[10], §4.8 Remark.）

## 2 モジュライ空間のコンパクト化について

講演の主な目的は、Ivanov の切り詰めタイヒミュラー空間の構成が、モジュライ空間のコンパクト化の自然なオービフォールド構造を与えることを注意することにある。タイヒミュラー空間  $T_{g,n}$  を写像類群  $\Gamma_{g,n}$  の固有不連続な作用で割った商空間  $T_{g,n}/\Gamma_{g,n}$  がモジュライ空間  $M_{g,n}$  である。Deligne–Mumford [6] によりそのコンパクト化  $\overline{M}_{g,n}$  が代数幾何的に考えられたものの、 $\overline{M}_{g,n}$  のオービフォールドの構造は未だきちんと記述されていないように思われる。Looijenga [14] は  $\overline{M}_{g,n}$  がオービフォールドとして “good” であることを証明しているが、これは種数を高くしたリーマン面を使うもので、 $\overline{M}_{g,n}$  のオービフォールドの構造を考える上で不満が残る。また、今年 (2014) に J.D.G. に出版された Hubbard–Koch の論文 [9] には、 $\overline{M}_{g,n}$  の解析構造が記述されているが、それらを貼り合わせるオービフォールド・チャートについては言及されていない。

この講演では、 $\overline{M}_{g,n}$  に即したオービフォールドの構造を与える。

まず、切り詰めタイヒミュラー空間  $P_{g,n}^\varepsilon$  の「疑似正多面体」としての構造を調べる。 $P_{g,n}^\varepsilon$  の各面 (Facet) は  $\Sigma_{g,n}$  の complex of curves  $\mathcal{C}_{g,n}$  の単体  $\sigma = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$  ( $k \leq 3g - 3 + n$ ) と全単射的に対応する。単体  $\sigma$  に対応する面  $F^\varepsilon(\sigma)$  は

$$F^\varepsilon(\sigma) = \{p \in P_{g,n}^\varepsilon \mid l_p(C_i) = \varepsilon, i = 1, \dots, k\}$$

で与えられる。 $p = [S, w]$  が  $F^\varepsilon(\sigma)$  の点であれば、リーマン面  $S$  上の  $C_1, \dots, C_n$  以外の単純閉測地線の長さは  $\varepsilon$  より真に大きいと考える。そうすると、 $\sigma \neq \sigma'$  ならば  $F(\sigma) \cap F(\sigma') = \emptyset$  であり、

$$\sigma \subset \sigma' \iff \overline{F(\sigma)} \supset F(\sigma')$$

が成り立つ。したがって、 $\partial P_{g,n}^\varepsilon$  には、 $\mathcal{C}_{g,n}$  の重心細分の絵が描かれていることになる。 $P_{g,n}^\varepsilon$  はタイヒミュラー距離の入った疑似正多面体となるが、その (向きを保つ) 自己同形は自然に境界  $\partial P_{g,n}^\varepsilon$  の自己同形を引き起こし、それはまた  $\mathcal{C}_{g,n}$  の自己同形を引き起こす。Ivanov [11], Korkmaz [13], Luo [7] により (いくつかの例外的な場合を除き)  $\mathcal{C}_{g,n}$  の自己同形群は拡大された写像類群  $\Gamma_{g,n}^*$  (向きを逆にする自己同相写像も含んだ写像類群) である。こうして、 $P_{g,n}^\varepsilon$  の向きを保つ自己同形群が写像類群  $\Gamma_{g,n}$  に一致することがわかる：

$$\text{Isom}_+(P_{g,n}^\varepsilon) = \Gamma_{g,n}.$$

この同型対応のもとで、一つの面  $F^\varepsilon(\sigma)$  を保つ部分群が  $NT(\sigma)$  に等しいことがわかる。ここに、 $\Gamma(\sigma)$  は  $\sigma$  に属する単純閉曲線達の周りの Dehn twists から生成される階数  $k$  の自由アーベル群で、 $NT(\sigma)$  はその正規化群である。

なお、 $F^\varepsilon(\sigma)$  は実解析的多様体で  $\mathbb{R}^{2(3g-3+n)-k}$  に同相である。ここに、 $k = \#\sigma$ 。

### 3 「切り捨てられた部分」の考察

面  $F^\varepsilon(\sigma)$  の外辺部 (Fringe)  $FR^\varepsilon(\sigma)$  を

$$FR^\varepsilon(\sigma) = \bigcup_{0 < \delta < \varepsilon} F^\delta(\sigma)$$

と定義する． $FR^\varepsilon(\sigma)$  は  $F^\varepsilon(\sigma)$  によりタイヒミュラー空間  $T_{g,n}$  の本体から切り離された外辺部に相当する開集合である．前節で考察した面  $F^\varepsilon(\sigma)$  を保つ部分群  $N\Gamma(\sigma)$  はこの外辺部も保ち，この外辺部に固有不連続に作用している．

外辺部に「無限遠点」 $F^0(\sigma)$  を付け加えたもの  $\overline{FR^\varepsilon}(\sigma)$  を外辺部の完備化と呼ぼう．すなわち

$$\overline{FR^\varepsilon}(\sigma) = \bigcup_{0 \leq \delta < \varepsilon} F^\delta(\sigma)$$

である． $N\Gamma(\sigma)$  は  $\overline{FR^\varepsilon}(\sigma)$  にも作用するが，もはやその作用は固有不連続ではない．なぜなら， $\Gamma(\sigma)$  という自由アーベル群が「無限境界部分」 $F^0(\sigma)$  の各点を固定するからである．

切り詰めタイヒミュラー空間  $P_{g,n}^\varepsilon$  に全ての完備化された外辺部を付け加えたもの

$$\overline{T}_{g,n} = P_{g,n}^\varepsilon \bigcup_{\sigma \in \mathcal{C}_{g,n}} \overline{FR^\varepsilon}(\sigma)$$

は Abikoff [2] の言う augmented Teichmüller space である．山田 [16] は  $\overline{T}_{g,n}$  を  $T_{g,n}$  の完備化である「Weil-Petersson 凸体」として捉えている．この中では， $F^0(\sigma)$  は測地線的に凸になっている． $\overline{T}_{g,n}$  は付けくわえた  $F^0(\sigma)$  において多様体でない．

この  $\overline{T}_{g,n}$  には写像類群  $\Gamma_{g,n}$  の作用があるが，この作用で割った商空間がモジュライ空間の Deligne–Mumford コンパクト化  $\overline{M}_{g,n}$  である．

完備化された外辺部の和集合

$$\bigcup_{\sigma \in \mathcal{C}_{g,n}} \overline{FR^\varepsilon}(\sigma)$$

を  $\Gamma_{g,n}$  で割ったものは  $\overline{M}_{g,n}$  のなかの境界因子  $\bigcup_{\sigma \in \mathcal{C}_{g,n}} F^0(\sigma)$  の開近傍になっている．したがって，この開近傍のオービフォールド構造を考えれば  $\overline{M}_{g,n}$  のオービフォールド構造が分かる．

一般に，ある位相空間  $X$  にオービフォールドの構造を与えるというのは，多様体  $D$  とそこに固有不連続に働く群  $W$  の対  $(D, W)$  (オービフォールド・チャート) を沢山考え，この商空間  $D/W$  達により  $X$  を被覆することである．

問題は， $\bigcup_{\sigma \in \mathcal{C}_{g,n}} \overline{FR^\varepsilon}(\sigma)$  が多様体でないことである．したがって，方針としては，この空間をいくつかの部分に分け，各部分を予備的な群  $\Gamma(\sigma)$  で割って多様体  $D(\sigma)$  としておき，その部分の上に適当な群の固有不連続な作用を構成することである．この作業を「多様体  $D(\sigma)$  の構成」までやったのが Hubbard–Koch の論文 [9] である．すなわち (我々の記号を使って，われわれの状況に引きよせて

説明すれば) 完備化された外辺部の和集合  $\bigcup_{\sigma \in \mathcal{C}_{g,n}} \overline{FR^\varepsilon}(\sigma)$  は多様体でないが, その部分

$$\bigcup_{\sigma' \subset \sigma} \overline{FR^\varepsilon}(\sigma')$$

を  $\Gamma(\sigma)$  の作用で割れば, その商空間

$$\bigcup_{\sigma' \subset \sigma} \overline{FR^\varepsilon}(\sigma')/\Gamma(\sigma)$$

が実  $6g - 6 + 2n$  次元の多様体になる. そしてこれが Bers [3] のいう「変形空間」 $D(\Sigma_{g,n}(\sigma))$  になっているというのが, Hubbard–Koch [9] の主な結果である (ここに,  $\Sigma_{g,n}(\sigma)$  とは,  $\Sigma_{g,n}$  において,  $\sigma$  に属する各単純閉曲線をそれぞれ 1 点につぶして得られる「ノード付きの閉曲面」である.)

変形空間  $D(\Sigma_{g,n}(\sigma))$  を以後簡単に  $D(\sigma)$  と書こう. Hubbard–Koch の先をやるには,  $D(\sigma)$  に固有不連続に働く群  $W(\sigma)$  を構成し,  $(D(\sigma), W(\sigma))$  がオービフォールド・チャートを与えることを示さねばならない. 群  $W(\sigma)$  の構成は易しい.  $W(\sigma) = N\Gamma(\sigma)/\Gamma(\sigma)$  とおけばよい.  $W(\sigma)$  は  $D(\sigma)$  に固有不連続に作用している. したがって,  $(D(\sigma), W(\sigma))$  をオービフォールド・チャートになりそうであるが, 実はこれはオービフォールド・チャートを与えない. なぜなら, 商空間  $D(\sigma)/W(\sigma)$  は  $\overline{M}_{g,n}$  のなかにそのまま埋め込まれないからである.

この困難を回避するのが, 次節で説明する「制御された変形空間」である.

#### 4 制御された変形空間

上述の困難を避けるために, Ivanov の切り詰めタイヒミュラー空間の構成に使った正数  $\varepsilon$  と §1 の初めに述べた定数  $M$  の間に  $6g - 6 + 2n$  個の数を挿入する:

$$\varepsilon < \varepsilon_1 < \eta_1 < \cdots < \varepsilon_{3g-3+n} < \eta_{3g-3+n} < M.$$

そして制御された変形空間  $D_\varepsilon(\sigma)$  を

$$D_\varepsilon(\sigma) := \{p = [S, w] \in D(\sigma) \mid l_p(C_i) < \varepsilon_k, i = 1, \dots, k \\ \text{かつ, } S \text{ 上の他の単純閉測地線は } \eta_k \text{ より長い}\}$$

と定義する. ここに,  $\sigma = \{C_1, \dots, C_k\}$  である.

これは単純な工夫であるが,  $\overline{M}_{g,n}$  のオービフォールド構造を考える上で結構本質的であるような気がする. とにかく, このように定義すると,  $D_\varepsilon(\sigma)$  に群  $W(\sigma)$  が固有不連続に働き, 商空間  $D_\varepsilon(\sigma)/W(\sigma)$  は  $\overline{M}_{g,n}$  のなかにそのまま埋め込めることが証明できる. したがって,

定理 (Curve complex の自己同型群と拡張された写像類群の同型を主張する定理に現れたいくつかの例外的な場合を除き)  $\{(D_\varepsilon(\sigma), W(\sigma))\}_{[\sigma] \in \mathcal{C}_{g,n}/\Gamma_{g,n}}$  は  $\overline{M}_{g,n}$  のオービフォールド構造を与える.

このオービフォールド構造は [15] で与えたものと同じであるが, この講演では Ivanov の切り詰めタイヒミュラー空間に即して構成したので, 例えば Buiding [5] を用いた対称空間のコンパクト化などとのアナロジーがより鮮明になると期待される ([12] 参照.)

## 参考文献

- [1] W. Abikoff, *The real analytic theory of Teichmüller space*, Lecture Notes in Math. **820**, Springer, Berlin etc. 1976.
- [2] W. Abikoff, Degenerating families of Riemann surfaces, *Ann. of Math.* 105 (1977), 29–44.
- [3] L. Bers, Spaces of degenerating Riemann surfaces, in: *Discontinuous groups and Riemann surfaces*, Proc. of the 1973 Conference, *Ann. Math. Studies*, **79**, Princeton Univ. press, 1974.
- [4] A. Borel and J.-P. Serre, Corners and arithmetic groups, *Comment. Math. Helv.* **48** (1973), 436–491.
- [5] K. S. Brown, *Buildings*, Springer-Verlag, 1989.
- [6] P. Deligne and D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus, *I.H.E.S. Publ. math.* (1969), **36** 75–109.
- [7] F. Luo, Automorphisms of the complex of curves, *Topology* **39** (2000), 283–298.
- [8] W. J. Harvey, Boundary structure of the modular group, in *Riemann surfaces and related topics*, Proc. 1978 Stony Brook Conference (Ed. I.Kra and B.Maskit), *Annals of Math. Studies*, **97**, Princeton University Press, 1981, 245–251.
- [9] J. H. Hubbard and S. Koch, An analytic construction of the Deligne–Mumford compactification of the moduli space of curves, *J. Diff. Geom.* **98** (2014), 261–313.
- [10] N. V. Ivanov, Complexes of curves and the Teichmüller modular group, *Russian Math. Surveys* **42:3** (1987), 55–107.
- [11] N. V. Ivanov, Automorphisms of complexes of curves and of Teichmüller spaces, *Int. Math. Res. Notice* **14** (1997), 651–666.

- [12] L. Ji, Curve complexes versus Tits buildings: structures and applications, in: *handbook of Teichmüller Theory IV* (ed. A. Papadopoulos) IRMA Lectures In Math. and Theoretical Phys. **19** (2014), 135–196.
- [13] M. Korkmaz, Automorphism of complexes of curves on punctured spheres and on punctured tori, *Topology and Appl.* **95** (1999), 85–111.
- [14] E. Looijenga, Smooth Deligne–Mumford compactification by means of Prym level structures, *J. Algebraic Geom.* **3** (1994), no.2 283–293.
- [15] Y. Matsumoto, On the universal degenerating family of Riemann surfaces, IRMA Lectures in Math. and Theoretical Phys. **20** (2012), 71–102.
- [16] S. Yamada, On the geometry of Weil–Petersson completion of Teichmüller spaces, *Math. Res. Lett.* **11** (2004), 327–344.