調和的 Magnus 展開、Stasheff associahedron そして森田 Mumford 類

河澄響矢 (東京大学大学院数理科学研究科)

本稿は「コンパクト・リーマン面のモジュライ空間 $\mathbb{M}_g$ 上で定義された森田 Mumford 類を表示する『canonical な』微分形式を求める」という問題についての現状報告である。森田 Mumford 類というものの「構成元素」である（拡大）Johnson 準同型を表す「canonical な」（ねじれ係数 1 次）微分形式は、一意的なのであるが、これを組み合わせて作る森田 Mumford 類を表す微分形式表示は一意的ではなく多義的であって、高次の幾何学=高次特性類の存在が予想される。その背景には (イ) 組合せ方の ambiguity と (ロ) もっと深い原因が考えられるが、(イ) の部分については、平面 tree のモジュライ空間である Stasheff associahedron によってある程度の統制ができそうな状況になって来た。このことについてご報告する。

さて、(あ) 森田 Mumford 類の背景に（拡大）Johnson 準同型があることは森田 [Mo3] および森田-河澄 [KM1][KM2] によって明らかになったのであるが、(い) Johnson 準同型の背景には自由群の（古典的な）Magnus 展開 [Ma] というものがあることが、北野 [Ki] によってすでに明らかにされている。閉でない Riemann 面の基本群が自由群であることに注意する。以上の流れを図にしておく。

$$\text{Magnus 展開} \overset{(あ)}{\Rightarrow} \text{Johnson 準同型} \overset{(い)}{\Rightarrow} \text{森田 Mumford 類} \tag{0.1}$$

この流れ (0.1) を (a) 太くし、(b) 幾何化することで、森田 Mumford 類を表示する微分形式を手に入れ、具体的に表示するというのが私の方針である。「正規第３種 Abel 積分の擬等角変分から森田 Mumford 類の微分形式表示を導く」という以前からの私のアイディアは一部分このアプローチに含まれるのだが、これで完全にコントロールできるかどうかは不明である。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

1. Magnus 展開と Johnson 準同型.

（広義の）Magnus 展開の定義を述べ、Johnson 準同型が（もはや準同型ではないけれども）自由群の自己同型群全体まで拡張することを示す。この §の内容はすべて単位結合環で成立つことだが、以後の記号を簡単にするため実数体 $\mathbb{R}$ で考える。とくに断らない限りテンソル積は実数体上のもの $\otimes = \otimes_{\mathbb{R}}$ とする。$n \geq 2$ とする。F_n を n 個の文字 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する自由群とする。

$$H := H_1(F_n;\mathbb{R}) = {F_n}^{\mathrm{abel}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \quad \widehat{T} := \prod\nolimits_{m=0}^{\infty} H^{\otimes m}$$

とおく。$X_i := [x_i] \otimes 1 \in H$ と表す。テンソル代数 $\widehat{T}$ は $\mathbb{R}\langle\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle\rangle$ とも表され、非可換形式的巾級数環とも呼ばれる。各 $p \geq 1$ について $\widehat{T}_p := \prod_{m\geq p} H^{\otimes m}$ は代数 $\widehat{T}$ の両側イデアルをなす。$1 + \widehat{T}_1$ は代数 $\widehat{T}$ の乗法群の部分群をなす。

定義. 写像 $\theta : F_n \to 1 + \widehat{T}_1$ が（実係数の広義の）*Magnus* 展開であるとは、θ が群準同型であって、各 i, $1 \leq i \leq n$, について $\theta(x_i) \equiv 1 + X_i \pmod{\widehat{T}_2}$ が成立つことをいう。

Magnus 展開は「沢山」存在する。つまり、自由群 F_n の普遍性により、上の条件を充たすように x_i たちの行き先を任意に決めれば、それに対して Magnus 展開が一通りに決まる。たとえば $\theta(x_i) = 1 + X_i$（合同 $\equiv$ ではなくて等号 $=$ ）を充たす Magnus 展開が、Fox の自由微分を使った古典的 Magnus 展開 [Ma] に他ならない。Magnus 展開全体の集合を Θ_n と表すことにする

$$\Theta_n := \{\theta : F_n \to 1 + \widehat{T}_1; \text{Magnus 展開}\}.$$

群環 $\mathbb{R}[F_n]$ の添加イデアル $I_{\mathbb{R}}[F_n]$ に関する完備化を $\widehat{\mathbb{R}[F_n]} := \varprojlim_{p\to\infty} \mathbb{R}[F_n]/I_{\mathbb{R}}[F_n]^p$ と表し、完備群環とよぶことにする。次の補題が Magnus 展開を考えるときの最も基本的な事実だと思う。

補題 1.1. 任意の *Magnus* 展開 $\theta : F_n \to 1 + \widehat{T}_1$ は完備群環 $\widehat{\mathbb{R}[F_n]}$ からテンソル代数 $\widehat{T}$ の上への同型

$$\theta : \widehat{\mathbb{R}[F_n]} \xrightarrow{\cong} \widehat{T}$$

を誘導する。この同型は、各 p について $I_{\mathbb{R}}[F_n]^p$ の像を $\widehat{T}_p$ の上に写像する。

この補題を使って Johnson 準同型を導くために、二種類の Lie 群（の射影極限）を用意する。代数 $\widehat{T}$ の実代数自己同型 $U : \widehat{T} \to \widehat{T}$ であって、すべての $p \geq 1$

について $U(\widehat{T}_p)=\widehat{T}_p$ を充たすもの全体のなす Lie 群を $A_n^\sharp$ とする。自然な同型 $H=\widehat{T}_1/\widehat{T}_2$ に注意すると、全射かつ分裂した C^∞ 準同型

$$|\ |: A_n^\sharp \longrightarrow \mathrm{GL}(H), \quad U \mapsto |U|$$

が得られる。この準同型の核を $IA_n^\sharp$ とあらわす。テンソル代数 $\widehat{T}$ の普遍性により、各 i, $1 \le i \le n$, について $\xi_i \in \widehat{T}_2$ を任意に決めると $U(X_i)=X_i+\xi_i$ をみたす $\widehat{T}$ の実代数自己準同型がただ一つ存在する。初等的考察によってこの U は同型である。そこで、C^∞ 多様体（の射影極限）としての同型

$$IA_n^\sharp \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H,\widehat{T}_2)=\prod_{p=1}^{\infty} H^*\otimes H^{\otimes(p+1)} \tag{1.1}$$

が成立つ。ただし $H^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H,\mathbb{R})$ である。$GL(H)$ の元は明らかに H のテンソル代数 $\widehat{T}$ の $\widehat{T}_p$ たちを保つ自己同型、つまり $A_n^\sharp$ の元を定める。したがって、半直積分解

$$A_n^\sharp = IA_n^\sharp \rtimes \mathrm{GL}(H) \tag{1.2}$$

をもつ。

これで、自由群の自己同型全体の群 $\mathrm{Aut}(F_n)$ 全体の上で、Johnson 準同型を定義する準備ができた。Magnus 展開 $\theta: F_n \to 1+\widehat{T}_1$ を一つ固定する。群 $\mathrm{Aut}(F_n)$ の完備群環 $\widehat{\mathbb{R}[F_n]}$ への自然な作用は、明らかに、各 p について $I_{\mathbb{R}}[F_n]^p$ の像を保つ。そこで、補題 1.1 の同型 $\theta: \widehat{\mathbb{R}[F_n]} \cong \widehat{T}$ を通して、群 $\mathrm{Aut}(F_n)$ は $\widehat{T}$ に $\widehat{T}_p$ を保つように作用する。つまり、Lie 群 $A_n^\sharp$ への準同型

$$T^\theta: \mathrm{Aut}(F_n) \to A_n^\sharp$$

が得られる。合成写像

$$\mathrm{Aut}(F_n) \xrightarrow{T^\theta} A_n^\sharp = IA_n^\sharp \rtimes \mathrm{GL}(H) \xrightarrow{\text{1st proj.}} IA_n^\sharp = \prod_{p=1}^{\infty} H^*\otimes H^{\otimes(p+1)} \tag{1.3}$$

の第 p 成分を

$$\tau_p=\tau_p^\theta: \mathrm{Aut}(F_n) \longrightarrow H^*\otimes H^{\otimes(p+1)}$$

と表し、第 p Johnson 準同型, $p \ge 1$, とよぶ。もちろん、(1.3) における第一射影 $IA_n^\sharp \rtimes \mathrm{GL}(H) \xrightarrow{\text{1st proj.}} IA_n^\sharp$ も、第 p 成分をとる写像 $\prod_{q=1}^{\infty} H^*\otimes H^{\otimes(q+1)} \to$

$H^* \otimes H^{\otimes(p+1)}$ も、準同型ではない。したがって τ_p も準同型ではない。（そこでJohnson「非」準同型と呼んだ方が良いかもしれなくて、私も場所によってはそのように呼んでいるが、ちょっとハシタナイので、ここでは準同型と呼んでおく。）他方、$\mathrm{Aut}(F_n)$ の適当な部分群に制限すると τ_p は準同型であって、自由群 F_n の巾零 tower への $\mathrm{Aut}(F_n)$ の作用から決まる古典的な Johnson 準同型に一致する。次の §2 で述べるように、τ_p たちがどのくらい準同型から離れているか？ということは無限小的に測ることができてそれが Stasheff associahedron である。

T^θ は準同型である。つまり、任意の $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(F_n)$ について $T^\theta(\varphi\psi) = T^\theta(\varphi)T^\theta(\psi)$ が成立つ。これを書き下す。最初に出てくるのは

$$-d\tau_1^\theta = 0 \in C^2(\mathrm{Aut}(F_n); H^* \otimes H^{\otimes 2}) \tag{1.4}$$

である。ここで、d は群 $\mathrm{Aut}(F_n)$ の加群 $H^* \otimes H^{\otimes 2}$ に値をもつ標準コチェイン複体 $C^*(\mathrm{Aut}(F_n); H^* \otimes H^{\otimes 2})$ の微分である。つまり、(1.4) は第 1 Johnson 準同型がねじれ準同型として $\mathrm{Aut}(F_n)$ 全体に拡張するということを言っていて、写像類群については森田 [Mo2] が示したことである。

二番目に出てくるのは

$$-d\tau_2^\theta = (\tau_1^\theta \otimes 1 + 1 \otimes \tau_1^\theta) \cup \tau_1^\theta \in C^2(\mathrm{Aut}(F_n); H^* \otimes H^{\otimes 3}) \tag{1.5}$$

である。これが中村-Garoufalidis [GN] が提唱し、森田-河澄 [KM2] で証明を与えた「IH 関係式」である。森田-河澄 [KM1] [KM2] の本質はこの関係式であると言ってよい。

三番目以降に出てくるものの意味はよく分かっているとは言えない。しかし、Stasheff associahedron が後ろにいるということははっきりして、それを次の §で述べる。

2. Stasheff associahedron.

まず、準備として Lie 群の Maurer-Cartan 形式について復習する。Lie 群 G が C^∞ 多様体 X に自由かつ推移的に左作用しているとする。簡単のため G は実線型空間 V の一般線型群 $\mathrm{GL}(V)$ の Lie 部分群であるとする。そこで G の Lie 代数 $\mathrm{Lie}\,G$ は結合代数 $\mathrm{End}(V)$ の Lie 部分代数とみなされる。接束 TX の自明化 $X \times \mathrm{Lie}\,G \to TX$, $(x,u) \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tu)x$ の転置写像は X 上の $\mathrm{Lie}\,G$ に値をもつ 1-形式とみなされる。これは Maurer-Cartan 形式であって $\eta \in A^1(X) \otimes \mathrm{Lie}\,G$ と表す。ここで、多様体 X の実係数 de Rham 複体を $A^*(X)$ と表す。Maurer-Cartan 公式

$$d\eta = \eta \wedge \eta \in A^2(X) \otimes \mathrm{End}(V) \tag{2.1}$$

が成立つ。

いま一点 $x_0 \in X$ を固定する。函数 $F : X \to G \subset \mathrm{End}(V)$ を $F(gx_0) := g^{-1}$, $g \in G$, によって定義すると直接計算によって $dF = -F\eta \in A^1(X) \otimes \mathrm{End}(V)$ となる。したがって Chen の反復積分 [C] を使って、任意の $g \in G$ について

$$g^{-1} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \int_{x_0}^{gx_0} \overbrace{\eta\eta\cdots\eta}^{m} \tag{2.2}$$

が成立つ。

Magnus 展開に戻る。$n \geq 2$ とし、自由群 F_n とその自己同型群 $\mathrm{Aut}(F_n)$ を考える。§1 の記号を続けて用いる。Magnus 展開全体の空間 Θ_n には自然な C^∞ 多様体（の射影極限）の構造が入る。群 $IA_n^\sharp$ は Magnus 展開全体の集合 Θ_n に左作用している。$U \in IA_n^\sharp$ と $\theta \in \Theta_n$ について合成写像 $U \circ \theta : F_n \to 1 + \widehat{T}_1 \to 1 + \widehat{T}_1$ は再び Magnus 展開となる。$|U| = 1_H$ だからである。補題 1.1 により、この作用が自由かつ推移的であることが分かる。かくして Maurer-Cartan 形式

$$\eta \in A^1(\Theta_n) \otimes \mathrm{Lie}\, IA_n^\sharp$$

が得られる。(2.2) により Magnus 展開 θ の定める Johnson 準同型 $\tau_p = \tau_p^\theta$, $p \geq 1$, は反復積分によって表示される。$\varphi \in \mathrm{Aut}(F_n)$ について

$$(\tau_p^\theta(\varphi))_{p\geq 1} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \int_{\theta}^{|\varphi|\circ\theta\circ\varphi^{-1}} \overbrace{\eta\eta\cdots\eta}^{m} \tag{2.3}$$

が成立つ。

さて、$\mathrm{Lie}\, IA_n^\sharp$ の元は代数 $\widehat{T}$ の導分であるから $\widehat{T}$ の生成元 H での値だけで決まる。同型

$$\mathrm{Lie}\, IA_n^\sharp \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H, \widehat{T}_2) = \prod_{p=1}^{\infty} H^* \otimes H^{\otimes(p+1)} \tag{2.4}$$

が成立つ。$p \geq 1$ について η の $H^* \otimes H^{\otimes(p+1)}$ 成分を $\eta_p \in A^1(\Theta_n) \otimes H^* \otimes H^{\otimes(p+1)}$ と表す。$\mathrm{Lie}\, IA_n^\sharp$ の元が導分であることによって Maurer-Cartan 公式 (2.1) は

$$\begin{aligned} d\eta_1 &= 0 \\ d\eta_2 &= (\eta_1 \otimes 1 + 1 \otimes \eta_1) \wedge \eta_1 \\ d\eta_p &= \sum_{s=1}^{p-1} (\eta_s \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \eta_s) \wedge \eta_{p-s} \end{aligned} \tag{2.5}$$

となる ($p \geq 2$)。(2.5) の右辺の項の数は $\sum (p - s + 1)$ である。

式 (2.5) は Magnus 展開と Stasheff associahedron が関係していることを示している。Stasheff associahedron K_m, $m \geq 2$, は D^{m-2} に同相な有限胞体複体である [S]。各 cell は m 個の文字への意味のあるカッコの付け方に対応している。たとえば K_2 は (12) に対応する 1 つの 0-cell だけからなり、K_3 は (123) に対応する 1 つの 1-cell と ((12)3) と (1(23)) に対応する 2 つの 0-cells からなる。また K_4 は 5 角形である。

(2.5) の右辺の各項は K_{p+1} の $(p-2)$-cell と一対一対応している。さらに詳しく、K_{p+1} の各 cell に Θ_n 上の $H^* \otimes H^{\otimes(p+1)}$ に値をもつ微分形式を対応させる。各 cell は $p+1$ 文字のカッコの付け方に対応しているが、planar tree に対応していると見ることもできる。この tree の次数 $s+2$ の頂点に η_s を対応させ、それらの積をとり、tree の辺にしたがって係数を縮約すると、望む $A^*(\Theta_n) \otimes H^* \otimes H^{\otimes(p+1)}$ の元が得られる。η_s たちの対称性から、この微分形式は $\mathrm{Aut}(F_n)$ 不変である。こうして Θ_n の $\mathrm{Aut}(F_n)$-不変 de Rham 複体に係数をもつ K_{p+1} の胞体 cochain 複体

$$C^*(K_{p+1}; A^*(\Theta_n/\mathrm{Aut}(F_n); H^* \otimes H^{\otimes(p+1)}))$$

の全複体の p-cochain Y_p がえられる。式 (2.5) はこれが cocycle であることを含意する $Y_p \in Z^p(\mathrm{Total})$.

さて Θ_n および K_{p+1} は可縮であるから、この全複体の cohomology は $\mathrm{Aut}(F_n)$ の cohomology に一致する

$$H^*(\mathrm{Total}) = H^*(\mathrm{Aut}(F_n); H^* \otimes H^{\otimes(p+1)}).$$

このとき cocycle Y_p の定める cohomology 類は第 $(0, p+2)$ ねじれ係数森田 Mumford 類に他ならない。

以上により第 $(0, p+2)$ ねじれ係数森田 Mumford 類を表す微分形式が Stasheff associahedron K_{p+1} によって「組合せ的に parametrize」されることがわかった。この結果はもちろん中途半端であって、$K_{p+1} \times \Theta_n$ 上の本当の微分形式で K_{p+1} 方向を「fiber 積分」すると Y_p となるものを見つけなければならない。

3. 調和的 Magnus 展開.

ここまで考えてきた自由群の自己同型群 $\mathrm{Aut}(F_n)$ では、Magnus 展開に「個性」はなかった。ここからは Teichmüller 空間を考える。$g \geq 1$ とする。種数 g の mark つき Riemann 面（の三対）に対して、Chen の反復積分 [C] を用いてただ一つ Magnus 展開 $F_{2g} \to 1 + \widehat{T}_1$ が決まる。これを調和的 Magnus 展開と呼ぶことにする。

ここでは、Riemann 面 C とその点 $P_0 \in C$ そして 0 でない接 vector $v \in T_{P_0}C - \{0\}$ の三対 (C, P_0, v) を考える。この三対の双正則同値類 $[C, P_0, v]$ 全体のなす moduli 空間を $\mathbb{M}_{g,1}$ と表す。これは、特異点をもたない $3g-1$ 次元複素多様体であって、種数 g 境界連結成分 1 の写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ の Eilenberg-MacLane 空間 $K(\mathcal{M}_{g,1}, 1)$ である。

三対 (C, P_0, v) の基本群 $\pi_1(C, P_0, v)$ を、区分的 C^∞ 曲線 $\ell : [0,1] \to C$ であって、条件 $\ell(0) = \ell(1) = P_0$, $\ell(]0,1[) \subset C - \{P_0\}$, および $\dot{\ell}(0) = -\dot{\ell}(1) = v$ をみたすものの homotopy 類 $[\ell]$ 全体の集合として定義する。これは明らかなやりかたで群となり、自由群 F_{2g} に同型となる。moduli 空間 $\mathbb{M}_{g,1}$ の普遍被覆が Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_{g,1}$ であるが、それは、三対 (C, P_0, v) および基本群の「type-preserving な」同型 $\alpha : F_{2g} \xrightarrow{\cong} \pi_1(C, P_0, v)$ の四対 (C, P_0, v, α) の双正則同値類 $[C, P_0, v, \alpha]$ 全体の空間として与えられる。他方、基本群 $\pi_1(C, P_0, v)$ の Abel 化に $\mathbb{R}$ をテンソルしたものは明らかに C の実係数 1 次元ホモロジー群であり

$$H = H_1(\pi_1(C, P_0, v); \mathbb{R}) = H_1(C; \mathbb{R})$$

Poincaré 双対性によりその双対と自然に同型である

$$H = H_1(C;\mathbb{R}) = H^1(C;\mathbb{R}) = H^*$$

ことに注意する。H とその双対 H^* を Poincaré 双対によって同一視する。

「調和的 Magnus 展開」という canonical な写像 $\theta : \mathcal{T}_{g,1} \to \Theta_{2g}$ を構成しよう。Teichmüller 空間の点 $[C, P_0, v, \alpha] \in \mathcal{T}_{g,1}$ をとる。調和 1 形式をとる写像 $H^* = H^1(C;\mathbb{R}) \to A^1(C)$ は H 係数 1 形式 $\omega_{(1)} \in A^1(C) \otimes H$ とみなすことができる。C 上の loop γ について $\int_\gamma \omega_{(1)} = -[\gamma]$(の双対を表す調和形式) $\in H$ が成立つ。調和 1 形式は、正則 1 形式とその複素共役の和で表されるから、複素構造だけで決まることに注意する。

1 形式 $\omega_{(1)}$ から出発して Chen の反復積分 [C] をもちいて Magnus 展開を定義したい。naive に考えて、$\widehat{T}_1$ に値をもつ 1 形式 $\omega = \sum_{p\geq 1} \omega_{(p)}$, $\omega_{(p)} \in A^1(C) \otimes H^{\otimes p}$, であって $\omega_{(1)}$ が上述の調和 1 形式であるもので、可積分条件 $d\omega = \omega \wedge \omega$ をみたすものが存在するか？というと、それは存在しない。実際 $\int_C \omega_{(1)} \wedge \omega_{(1)} \in H^{\otimes 2}$ は交叉形式に他ならず、決して 0 ではない。しかし、$\int_C d\omega_{(2)} = 0$ でなければならないからである。そこで、可積分条件を手直しする。$I \in H^{\otimes 2}$ を交叉形式とする。また、$\delta_0 : C^\infty(C) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(P_0)$, を点 P_0 における delta current とする。可積分条件を

$$d\omega = \omega \wedge \omega - I \cdot \delta_0 \tag{3.1}$$

と手直しする。点 P_0 に矛盾をしわ寄せするわけである。このとき、$\widehat{T}_1$ に値をもつ 1 形式（1 current）$\omega = \sum_{p\geq 1} \omega_{(p)}$, $\omega_{(p)} \in A^1(C) \otimes H^{\otimes p}$, であって $\omega_{(1)}$ が上述の調和 1 形式に一致し、条件 (3.1) をみたし、任意の閉 C^∞ 1 形式 φ および任意の $p \geq 2$ について $\int_C \omega_{(p)} \wedge *\varphi = 0$ をみたすものがただ一つ存在する。$*$ は Hodge $*$ 作用素である。これは 1-形式の上では複素構造だけに依存することに注意する。

こうして曲率形式 $\omega \in A^1(C) \otimes \widehat{T}_1$ が得られた。上述の条件をみたす loop ℓ について広義反復積分 $\int_\ell \overbrace{\omega\omega\cdots\omega}^{n}$ が収束することが分かる。条件 (3.1) により Magnus 展開

$$\theta = \theta^{(C,P_0,v)} : \pi_1(C, P_0, v) \to 1 + \widehat{T}_1, \quad [\ell] \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_\ell \overbrace{\omega\omega\cdots\omega}^{n}$$

が得られる。これを三対 (C, P_0, v) の調和的 Magnus 展開とよぶ。そして、合成写像 $\theta[C, P_0, v, \alpha] := \theta^{(C,P_0,v)} \circ \alpha : F_{2g} \to \pi_1(C, P_0, v) \to 1 + \widehat{T}_1$ を四対 $[C, P_0, v, \alpha] \in \mathcal{T}_{g,1}$ の調和的 Magnus 展開とよぶ。以上の構成はすべて canonical である。canonical な写像

$$\theta : \mathcal{T}_{g,1} \longrightarrow \Theta_{2g}, \quad [C, P_0, v, \alpha] \mapsto \theta[C, P_0, v, \alpha]$$

がえられた。

Magnus 展開の空間 Θ_{2g} の上の Maurer-Cartan 形式 $\eta = \sum_{p\geq 1}$, $\eta_p \in A^1(\Theta_{2g}) \otimes H^* \otimes H^{p+1}$ を写像 θ によって引き戻す。(2.3) により調和的 Magnus 展開の定める Johnson 準同型は引き戻し $\theta^*\eta$ の Teichmüller 空間上の反復積分として与えられる。また、p-cochain Y_p の θ による引き戻し

$$\theta^* Y_p \in Z^p(\mathrm{Total}\, C^*(K_{p+1}; A^*(\mathbb{M}_{g,1}; H^{\otimes(p+2)})))$$

は moduli 空間 $\mathbb{M}_{g,1}$ 上の第 $(0, p+2)$ ねじれ係数森田 Mumford 類を表す微分形式の canonical な族を与えている。係数 $H^{\otimes(p+2)}$ を縮約して自明係数の通常の森田 Mumford 類を表す微分形式の族が得られることになるが、縮約の方法を parametrize する空間を見い出す必要があって、それはまだまったく分からない。

この講演の主結果は 1 形式 $\theta^*\eta \in A^1(\mathbb{M}_{g,1}; \widehat{T}_3)$ の具体的表示である。曲率形式 ω の $(1,0)$ 部分を ω' と表す。$\omega = \omega' + \overline{\omega'}$ が成立つ。線型写像 $N : \widehat{T}_1 \to \widehat{T}_1$ を、$H^{\otimes m}$ の成分入れ替えの和

$$N|_{H^{\otimes m}} := \sum_{k=0}^{m-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m-1 & m \\ 2 & 3 & \cdots & m & 1 \end{pmatrix}^k$$

として定義する。

定理 3.1. 任意の $[C, P_0, v] \in \mathbb{M}_{g,1}$ において

$$(\theta^*\eta)_{[C,P_0,v]} = \Re(2N(\omega'\omega' - 2{\omega_{(1)}}'{\omega_{(1)}}')) \in T^*_{[C,P_0,v]}\mathbb{M}_{g,1} \otimes \widehat{T}_3$$

が成立つ。ここで右辺の $\Re$ の中身は P_0 のみで高々二位の極をもつ C 上の有理型二次微分、つまり $\mathbb{M}_{g,1}$ の点 $[C, P_0, v]$ における正則余接空間の元である。$\Re$ というのはその実部のさだめる実余接空間の元というつもりである。

右辺で引き算されている ${\omega_{(1)}}'{\omega_{(1)}}'$ の部分はちょうど周期行列の擬等角変分に一致する。第 1 Johnson 準同型に対応する部分（から点 P_0 に依存する部分を

除いたもの）は、Harris [Hs] が、彼の調和体積の変分として与えている。1 形式 $N(\omega'\omega')$ が、森田 Mumford 類を表す「canonical な」微分形式を支配しているというようなことだと都合がよいのだが、果たしてどうだろうか？

文献

[AB] L. V. Ahlfors and L. Bers: “Riemann’s mapping theorem for variable metrics,” Ann. Math. **72** (1960), pp. 385–404.

[B] L. Bers: ‘Riemann Surfaces,’ (mimeographed lecture notes), New York University, (1957-58).

[C] K.-T. Chen: “Iterated path integrals,” Bull. Amer.Math. Soc. **83** (1977), pp. 831–879.

[GN] S. Garoufalidis and H. Nakamura: “Some IHX-type relations on trivalent graphs and symplectic representation theory,” Math. Rex. Lett. **5** (1998) 391–402.

[Hn] R. M. Hain: “The geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group,” Proc. Symp. Pure Math. **46** (1987), pp.247–282.

[Hs] B. Harris: “Harmonic volumes,” Acta Math. **150** (1983), pp. 91–123.

[J] D. Johnson: “An abelian quotient of the mapping class group $\mathcal{I}_g$,” Math. Ann. **249** (1980) 225–242.

[Kae] R. H. Kaenders: “The mixed Hodge structure on the fundamental group of a punctured Riemann surfaces,” Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2000), pp. 1271–1281.

[Kaw] 河澄響矢: “A generalization of the Morita-Mumford classes to extended mapping class groups for surfaces,” Invent. math. **131** (1998), pp. 137–149.

[KM1] ——、森田茂之: “The primary approximation to the cohomology of the moduli space of curves and cocycles for the stable characteristic classes,” Math. Rex. Lett. **3** (1996) 629–641.

[KM2] ——、——: “The primary approximation to the cohomology of the moduli space of curves and cocycles for the Mumford-Morita-Miller classes,” preprint, 東京大学大学院数理科学研究科 UTMS**2001-13**.

[Ki] 北野晃朗: “Johnson’s homomorphism of subgroups of the mapping class group, the Magnus expansion and the Massey higher products of mapping tori," Topology and its appl. **69** (1996), pp. 165–172.

[Ma] W. Magnus: "Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem spezi-ellen Ring," Math. Ann. **111** (1935), pp. 259–280.

[Mo1] 森田茂之: "Characteristic classes of surface bundles," Invent. math. **90** (1987), pp. 551–577.

[Mo2] ——: "The extension of Johnson's homomorphism from the Torelli group to the mapping class group," Invent. math. **111** (1993), pp. 197–224.

[Mo3] ——: "A linear representation of the mapping class group of orientable surfaces and characteristic classes of surface bundles," in: 'Topology and Teichmüller spaces.' World Sci. Publ., River Edge, 1996, pp. 159–186.

[Mu] D. Mumford: "Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves" in: 'Arithmetic and Geometry.' Progress in Math. 36, Birkhäuser, Boston, 1983, pp. 271–328.

かわずみなりや

kawazumi@ ms.u-tokyo.ac.jp

東京大学大学院数理科学研究科

〒153-8914 目黒区駒場 3-8-1