Goldman-Turaev Lie 双代数のテンソル表示について

河澄響矢 (東大・数理)

はじめに

Goldman 括弧積 [5] のテンソル表示は、境界成分数 1 の曲面の基本群の完備群環への Dehn twist の作用の記述の目的から久野・河澄 [11] が創始した。境界が空でない任意のコンパクト曲面への拡張は、久野・河澄 [12] および Massuyeau-Turaev [19] が独立に行った。問題は、Turaev 余括弧積のテンソル表示である。Massuyeau-Turaev [19] の方法を使えばテンソル表示の最低次項は Schedler 余括弧積 [24] として記述できるが、テンソル表示そのものは未解明である。Turaev 余括弧積の正則 homotopy 版を考えると (Alekseev-Torossian [2] の定式化による) 柏原 Vergne 問題と関係しているように見える。この仕事の大部分は久野雄介氏（津田塾大・学芸）との共同研究である。

なお、松本幸夫先生は「手作りの数学」ということを提唱しておられる。本報告で述べる諸結果も初等的な議論の積み重ねで出来ており「手作りの数学」と言えるのではないかと思う。「手作りの数学」のささやかな例として松本先生および聴衆の皆さんに受け取っていただければ幸いです。

1 自由群の群環のテンソル表示

まず、自由群の群環の古典的なテンソル表示について述べたい。これは Johnson 準同型の再構成に関わっている。本報告を通じて係数環は有理数体 $\mathbb{Q}$ をとるが、$\mathbb{Q}$ を含む可換環であればほとんどの結果はそのまま成り立つ。本報告では、集合 X の生成する有理自由ベクトル空間を $\mathbb{Q}X$ と表し、X の生成する $\mathbb{Z}$ 自由加群を $\mathbb{Z}X$ と表す。

π を有限生成の自由群とする。$\mathbb{Q}\pi$ は群 π の有理群環である。$H := (\pi/[\pi,\pi]) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = H_1(\pi;\mathbb{Q})$ をその第一有理 homology 群とする。$x \in \pi$ の homology 類を $[x] := (x \bmod [\pi,\pi]) \otimes 1 \in H$ と表す。完備テンソル代数 $\widehat{T} = \widehat{T}(H) := \prod_{m=0}^{\infty} H^{\otimes m}$ を考える。これは両側 ideal による filtration $\widehat{T}_{\geq p} := \prod_{m\geq p} H^{\otimes m}$, $p \geq 1$, によって位相が入っているものとする。部分集合 $1 + \widehat{T}_{\geq 1}$ は乗法に関して群となっていることに注意する[1]。

定義 1.1. 写像 $\theta : \pi \to \widehat{T}$ が（一般化された）*Magnus* 展開であるとは、二つの条件

(1) 任意の $x \in \pi$ について $\theta(x) \equiv 1 + [x] \pmod{\widehat{T}_{\geq 2}}$ である。

(2) 任意の $x, y \in \pi$ について $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$ である。

をみたすことをいう。

[1] テンソル代数ではなく完備テンソル代数をとる理由はこの事実と、log および exp の使用にある。

（一般化された）Magnus 展開の存在は自由群の普遍性から直ちにわかる。このとき、θ の線型拡張

$$\theta : \mathbb{Q}\pi \to \widehat{T}, \quad \sum_{x\in\pi} a_x x \mapsto \sum a_x \theta(x)$$

は代数準同型である。この代数準同型は完備群環 $\widehat{\mathbb{Q}\pi}$ と $\widehat{T}$ の同型を与える。ここで、完備群環 $\widehat{\mathbb{Q}\pi} := \varprojlim_{p\to\infty} \mathbb{Q}\pi/(I\pi)^p$ は、添加写像 $\varepsilon : \mathbb{Q}\pi \to \mathbb{Q}, \sum a_x x \mapsto \sum a_x$, の核である添加 ideal $I\pi := \mathrm{Ker}\,\varepsilon$ による完備化である。各 $p \geq 1$ について $\theta((I\pi)^p) \subset \widehat{T}_{\geq p}$ がなりたつことから得られる代数準同型は同型である

$$\theta : \widehat{\mathbb{Q}\pi} \xrightarrow{\cong} \widehat{T}.$$

この同型は自由群の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\pi)$ から代数 $\widehat{T}$ の自己位相同型群 $\mathrm{Aut}(\widehat{T})$ への単射準同型

$$T^\theta : \mathrm{Aut}(\pi) \to \mathrm{Aut}(\widehat{T}), \quad \varphi \mapsto T^\theta(\varphi) := \theta \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$$

を定める。これを total Johnson map とよぶ [9]。これは北野 [14] の構成を整理し一般化したものであり、とくに通常の Johnson 準同型 [7] の拡張になっている。

以下では主に T^θ の対数を考えたい。しかし、$T^\theta(\mathrm{Aut}(\pi))$ 全体では対数は収束しない。そこで IA-自己同型群 $IA(\pi)$ を $\mathrm{Aut}(\pi)$ の $\pi/[\pi,\pi]$ への自然な作用の核として定義する。これは $IA(\pi) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Aut}(\pi) \to GL(H))$ とも定義できる。対応して $IA(\widehat{T}) := \{U \in \mathrm{Aut}(\widehat{T});\ U(H) \subset \widehat{T}_{\geq 1},\ U = 1_H \text{ on } H = \widehat{T}_{\geq 1}/\widehat{T}_{\geq 2}\}$ および $\mathrm{Der}^+(\widehat{T}) := \{D : \widehat{T} \to \widehat{T};\text{連続導分},\ D(H) \subset \widehat{T}_{\geq 2}\}$ と定義する。

$$\exp : \mathrm{Der}^+(\widehat{T}) \to IA(\widehat{T}), \quad D \mapsto \exp(D) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} D^m, \quad \text{および}$$
$$\log : IA(\widehat{T}) \to \mathrm{Der}^+(\widehat{T}), \quad U \mapsto \log(U) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} (U-1)^m$$

が定義されて互いに逆になっている。

$$\log \circ T^\theta : IA(\pi) \to IA(\widehat{T}) \to \mathrm{Der}^+(\widehat{T})$$

を Massuyeau の total Johnson map と呼ぶ。

さて、代数 $\mathbb{Q}\pi$ および $\widehat{T}$ は Hopf 代数の構造を持っていることを思い出す。実際、群環 $\mathbb{Q}\pi$ の余積 $\Delta : \mathbb{Q}\pi \to \mathbb{Q}\pi \otimes \mathbb{Q}\pi$ は、各 $x \in \pi$ について $\Delta(x) = x \otimes x$ となる代数準同型として定義され、完備群環上の余積 $\Delta : \widehat{\mathbb{Q}\pi} \to \widehat{\mathbb{Q}\pi} \widehat{\otimes} \widehat{\mathbb{Q}\pi}$ に拡張する。また、完備テンソル代数 $\widehat{T}$ の余積 $\Delta : \widehat{T} \to \widehat{T} \widehat{\otimes} \widehat{T}$ は、各 $X \in H$ について $\Delta(X) = X \widehat{\otimes} 1 + 1 \widehat{\otimes} X$ をみたす連続な代数準同型として定義される。$\widehat{\mathbb{Q}\pi}$ および $\widehat{T}$ は、これらの余積により完備 Hopf 代数となる。完備 Hopf 代数 $\widehat{T}$ の Lie-like 元全体の集合 $\widehat{\mathcal{L}} := \{u \in \widehat{T};\ \Delta(u) = u \widehat{\otimes} 1 + 1 \widehat{\otimes} u\}$ は Lie 代数をなし、ベクトル空間 H 上の完備自由 Lie 代数と呼ばれる。完備 Hopf 代数の一般論 [23] により $\exp(\widehat{\mathcal{L}}) = \{g \in \widehat{T};\ g \neq 0, \Delta(g) = g \widehat{\otimes} g\}$ がなりたつ。$p \geq 1$ について $\widehat{\mathcal{L}}_{\geq p} := \widehat{\mathcal{L}} \cap \widehat{T}_{\geq p}$ と書く。以下のように Hopf 代数の構造と適合する Magnus 展開は group-like 展開と呼ばれる。

定義 1.2. （一般化された）*Magnus* 展開 $\theta : \pi \to \widehat{T}$ が *group-like* 展開であるとは、条件 $\theta(\pi) \subset \exp(\widehat{\mathcal{L}})$ をみたすことをいう。

group-like 展開の存在も自由群の普遍性から直ちに分かる。このとき、代数同型 $\theta : \widehat{\mathbb{Q}\pi} \xrightarrow{\cong} \widehat{T}$ は完備 Hopf 代数の同型となる。また、θ が group-like 展開のとき、Massuyeau の total Johnson map の像は $\mathrm{Der}^+(\widehat{\mathcal{L}}) := \{D : \widehat{\mathcal{L}} \to \widehat{\mathcal{L}};$ 連続導分, $D(H) \subset \widehat{\mathcal{L}}_{\geq 2}\}$ に値を持つと見なすことができる。ここまでは純粋に代数的な議論であった。

ここから曲面のトポロジーを考える。S を向きづけられた連結 compact 曲面で境界 ∂S が空でないものとする。曲面の分類定理により S は種数と境界成分の個数で分類される。種数 g 境界成分数 $n+1$ の向きづけられた連結 compact 曲面を $\Sigma_{g,n+1}$ と表す。基本群 $\pi_1(S)$ は有限生成の自由群である。本報告では簡単のため、主として S が $\Sigma_{g,1}$ または $\Sigma_{0,n+1}$ の場合を考える。いずれにせよ、ここまでの議論がそのまま適用できる訳だが、group-like 展開の定義は曲面 S の位相を全く反映していない。位相を反映した group-like 展開を定義したい。

まず、$S = \Sigma_{0,n+1}$ とする。境界成分に番号をつける: $\partial S := \coprod_{k=0}^n \partial_k S$. 基点 $* \in \partial_0 S$ をとり、$1 \leq k \leq n$ について単純閉路 $\gamma_k \in \pi_1(S, *)$ を $*$ から $\partial_k S$ まで単純路で行って $\partial_k S$ を正の向きに一周して同じ道を逆に戻ってくるものであって、$\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n$ が $\partial_0 S$ を負の向きに一周する単純閉路であるようにとる。$x_k := [\gamma_k] \in H = H_1(S;\mathbb{Q})$, $1 \leq k \leq n$, とおき、$x_0 := -\sum_{k=1}^n x_k \in H$ とおく。言うまでもなく $\{x_k\}_{k=1}^n$ は H の基底である。

定義 1.3. *group-like* 展開 $\theta : \pi_1(S, *) \to \widehat{T} = \widehat{T}(H_1(S;\mathbb{Q}))$ が特殊展開（*special expansion*）であるとは、各 $1 \leq k \leq n$ についてある $g_k \in \exp(\widehat{\mathcal{L}})$ が存在して $\theta(\gamma_k) = {g_k}^{-1} e^{x_k} g_k$ をみたし、$\theta(\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n) = e^{-x_0}$ をみたすことを言う。

特殊展開の存在証明は非自明である。しかし、Habegger-Masbaum [6] が Kontsevich 積分を使って構成している。また、久野 [16] の方法でも構成できる。

つぎに $S = \Sigma_{g,1}$ とする。基点 $* \in \partial S$ をとり、$\zeta \in \pi_1(S, *)$ を境界を負の向きに一周する単純閉路とする。また、$\{A_i, B_i\}_{i=1}^g \subset H = H_1(S;\mathbb{Q})$ を symplectic 基底とする。Poincaré 双対性により $H^* = \mathrm{Hom}(H, \mathbb{Q})$ と H は同一視される[2]: $X \in H \mapsto (Y \mapsto (Y \cdot X)) \in H^*$. ここで $\cdot : H \otimes H \to \mathbb{Q}$ は（代数的）交叉数である。symplectic 形式 $\omega := \sum_{i=1}^g A_i B_i - B_i A_i \in H^{\otimes 2} \subset \widehat{\mathcal{L}}$ は[3] symplectic 基底 $\{A_i, B_i\}_{i=1}^g$ の取り方によらない。Massuyeau [18] は以下のように symplectic 展開の概念を導入した。

定義 1.4. *group-like* 展開 $\theta : \pi_1(S, *) \to \widehat{T} = \widehat{T}(H_1(S;\mathbb{Q}))$ が *symplectic* 展開（*symplectic expansion*）であるとは、*symplectic* 条件 $\theta(\zeta) = \exp(\omega) = \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!}\omega^m$ をみたすことをいう。

symplectic 展開の存在証明も非自明である。実係数の場合は調和的 Magnus 展開 [10] が symplectic 展開である。Massuyeau [18] は Le-Murakami-Ohtsuki 函手を使って symplectic 展開を構成している。さらに、久野 [16] は自由群 $\pi_1(S, *)$ の（symplectic とは限らない）自由生成系を一つ固定するごとに symplectic 展開を組合せ的に構成する方法を与えている。

Massuyeau [18] は symplectic 展開 θ にともなう Massuyeau の total Johnson map $\log \circ T^\theta$ による Torelli 群の像が $\mathrm{Der}^+_\omega(\widehat{\mathcal{L}}) := \{D \in \mathrm{Der}^+(\widehat{\mathcal{L}});\ D(\omega) = 0\}$ に含まれることを観察した。H への制限写像 $\mathrm{Der}^+(\widehat{\mathcal{L}}) \to \mathrm{Hom}(H, \widehat{\mathcal{L}}_{\geq 2}) = H^* \otimes \mathrm{Der}^+(\widehat{\mathcal{L}})$ と Poincaré 双対性による同一視 $H = H^*$ によって、Lie 代数 $\mathrm{Der}^+_\omega(\widehat{\mathcal{L}})$ は $\mathrm{Ker}([\ ,\ ] : H \otimes \widehat{\mathcal{L}}_{\geq 2} \to \widehat{\mathcal{L}})$ と同一視される。後者は森田の Lie 代数および Kontsevich [15] の 'Lie' の正の部分（の次数完備化）であって、この観察は森田の一結果 [20] の拡張になっている。

---

[2] H^* と H の同一視の仕方には、ここでのやり方と符号が反対のものも考えられる。その場合は、後述する Lie 代数同型 $-N\theta$ は $N\theta$ となる。

[3] ここで $A_i B_i = A_i \otimes B_i$ においてテンソル積の記号 $\otimes$ を省略した理由は $\widehat{T}$ の積と考えたいからである。以下、同様に $\widehat{T}$ の積としてのテンソル積は $\otimes$ を省略する。

2 完備 Goldman Lie 代数と写像類群

S を向きづけられた連結 compact 曲面で境界 ∂S が空でないものとする。ある非負整数 g と n について $S \cong \Sigma_{g,n+1}$ である。境界成分に番号をつけ $\partial S := \coprod_{k=0}^{n} \partial_k S$、各 $\partial_k S$ から一点づつ点 $*_k \in \partial_k S$ をとる。また、$\xi_k \in \pi_1(S, *_k)$ を正の向きに $\partial_k S$ を一周する based loop とする。$E := \{*_k\}_{k=0}^{n} \subset \partial S$ とおく。S の基本亜群 ΠS の E への制限を $\Pi S|_E$ と書く。つまり、$\Pi S|_E$ は、E を対象全体の集合とし、$0 \leq a, b, \leq n$ について $*_a$ から $*b$ への射の全体の集合が、 homotopy 集合 $\Pi S(*_a, *_b) = [([0,1], 0, 1), (S, *_a, *_b)] = \pi_1(S, *_a, *_b)$ である亜群である。いま、$\mathcal{M}(S)$ を S の写像類群とする。つまり、向きを保つ微分同相 $\varphi : S \to S$ であって $\varphi|_{\partial S} = 1_{\partial S}$ をみたすもの全体のなす群の、境界 ∂S を点毎に固定する isotopy による商群である。このとき Dehn-Nielsen 型の群の埋め込み

$$\mathsf{DN} : \mathcal{M}(S) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\Pi S|_E)$$

が考えられる [12]。

以下の構成の鍵は Goldman Lie 代数が $\mathbb{Z}\Pi S|_E$ に導分として作用していることを発見した [11] ことにある。まず、Goldman Lie 代数 [5] の定義を思い出す。$\hat{\pi}(S) := [S^1, S]$ を曲面 S 上の自由 loop の自由 homotopy 類全体の集合とする。基本群 $\pi_1(S)$ の共役類全体の集合とも見ることが出来るから、商写像 $|\ | : \pi_1(S) \to \hat{\pi}(S)$ がとれる。これは基点を忘れる写像と言ってもよい。以下、 loop とその homotopy 類は同じ記号で表す。α と $\beta \in \hat{\pi}$ の代表元を一般の位置にとる。このとき、交叉 $\alpha \cap \beta$ は有限集合である。α と β の Goldman 括弧積 $[\alpha, \beta]$ は

$$[\alpha, \beta] := \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon_p(\alpha, \beta) |\alpha_p \beta_p| \in \mathbb{Z}\hat{\pi}(S)$$

によって定義される。ここで $\varepsilon_p(\alpha, \beta) \in \{\pm 1\}$ は横断的な交点 p における α と β の局所交点数であり、α_p および $\beta_p \in \pi_1(S, p)$ は p を基点とし、それぞれ α と β を一周する based loops である。$|\alpha_p \beta_p|$ は基本群 $\pi_1(S, p)$ において α_p と β_p の積をとった上で基点 p を忘れて自由 loop と見なすということである。

Goldman [5] はこの括弧積が well-defined であって、$\mathbb{Z}\hat{\pi}$ に Lie 代数の構造を定めることを示した。$\mathbb{Z}\hat{\pi}$ を曲面 S の Goldman Lie 代数とよぶ。なお、定数 loop $\mathbf{1} := |1| \in \hat{\pi}(S)$ は Goldman Lie 代数 $\mathbb{Z}\hat{\pi}(S)$ の中心に含まれるから、商 $\mathbb{Z}\hat{\pi}'(S) := \mathbb{Z}\hat{\pi}(S)/\mathbb{Z}\mathbf{1}$ には Lie 代数の構造が誘導される。

Goldman Lie 代数 $\mathbb{Z}\hat{\pi}(S)$ は以下のように亜群 $\Pi S|_E$ に作用する。$\alpha \in \hat{\pi}(S)$ と $\gamma \in \Pi S(*_a, *_b)$, $0 \leq a, b, \leq n$, について、代表元を一般の位置にとる。

$$\sigma(\alpha)(\gamma) := \sum_{p \in \alpha \cap \gamma} \varepsilon_p(\alpha, \gamma) \gamma_{*_a p} \alpha_p \gamma_{p *_b} \in \mathbb{Z}\Pi S(*_a, *_b)$$

と定める。ここで $\varepsilon_p(\alpha, \gamma) \in \{\pm 1\}$ は局所交点数、$\gamma_{*_a p} \in \Pi S(*_a, p)$ および $\gamma_{p *_b} \in \Pi S(p, *_b)$ はそれぞれ γ の始点 $*_a$ から p までおよび、p から終点 $*_b$ までの segments である。久野・河澄 [11][12] は、この σ が well-defined であって、Lie 代数準同型

$$\sigma : \mathbb{Z}\hat{\pi}(S) \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathbb{Z}\Pi S|_E)$$

を定めることを示した。ここで σ の像が Lie 部分代数 $\mathrm{Der}_\partial(\mathbb{Z}\Pi S|_E) := \{D \in \mathrm{Der}(\mathbb{Z}\Pi S|_E);\ 0 \leq \forall k \leq n,\ D(\xi_k) = 0\}$ に含まれることに注意する。$\hat{\pi}(S)$ の各元は $S \setminus \partial S$ に含まれる代表元をもつからである。同様に考えて、$\sigma(\mathbf{1}) = 0$ である。以下、有理数係数で考える。こうして得られた Lie 代数準同型

$$\sigma : \mathbb{Q}\hat{\pi}'(S) = \mathbb{Q}\hat{\pi}(S)/\mathbb{Q}\mathbf{1} \longrightarrow \mathrm{Der}_\partial(\mathbb{Q}\Pi S|_E)$$

を考える。事実としてこれは単射であるが、全射ではない。たとえば、homology 類 $u \in H_1(S;\mathbb{Q})$ をとり、交叉数 $\cdot$ を使って、写像 $\gamma \in \Pi S(*_a, *_b) \mapsto ([\gamma]\cdot u)\gamma \in \Pi S(*_a, *_b)$ を考えると、$\mathrm{Der}_\partial(\mathbb{Q}\Pi S|_E)$ の元を定めるが、$\sigma(\mathbb{Q}\hat{\pi}'(S))$ には含まれない。しかし、以下のようにすべてを完備化すると σ は同型写像を与える。

一点 $q \in S$ と $\gamma_k \in \Pi S(*_a, q)$, $0 \le k \le n$, をとる。$0 \le a, b \le n$ について $\Pi S(*_a, *_b) = \gamma_a \pi_1(S,q){\gamma_b}^{-1}$ だから $\mathbb{Q}\Pi S(*_a, *_b) = \gamma_a(\mathbb{Q}\pi_1(S,q)){\gamma_b}^{-1}$ である。そこで

$$\widehat{\mathbb{Q}\Pi S}(*_a, *_b) := \varprojlim_{p\to\infty} \mathbb{Q}\Pi S(*_a, *_b)/\gamma_a(I\pi_1(S,q))^p{\gamma_b}^{-1}$$

と定める。filtration $\gamma_a(I\pi_1(S,q))^p\gamma_b$ によって位相が入っている。これは q および γ_k たちの取り方によらない。対象全体の集合を $E = \{*_k\}_{k=0}^n$ とし、$*_a$ から $*_b$ への射の全体が $\widehat{\mathbb{Q}\Pi S}(*_a, *_b)$ である $\mathbb{Q}$ 線型小圏 $\widehat{\mathbb{Q}\Pi S}|_E$ を考えることが出来る。同様に、

$$\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S) := \varprojlim_{p\to\infty} \mathbb{Q}\hat{\pi}/|\mathbb{Q}1 + (I\pi_1(S,q))^p|$$

と定めると、 q の取り方によらず、$\mathbb{Q}\pi'(S)$ から完備 Lie 代数の構造が誘導される。これを完備 Goldman Lie 代数とよぶ。$\mathrm{Der}(\widehat{\mathbb{Q}\Pi S}|_E)$ を $\widehat{\mathbb{Q}\Pi S}|_E$ の連続導分全体のなす Lie 代数とし、Lie 部分代数 $\mathrm{Der}_\partial(\widehat{\mathbb{Q}\Pi S}|_E) := \{D \in \mathrm{Der}(\widehat{\mathbb{Q}\Pi S}|_E);\ 0 \le \forall k \le n,\ D(\xi_k) = 0\}$ を考える。このとき、次がなりたつ

定理 2.1 (久野・河澄). *σ は Lie 代数の同型*

$$\sigma : \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_\partial(\widehat{\mathbb{Q}\Pi S}|_E)$$

を誘導する。

証明は次節で述べる Goldman Lie 代数のテンソル表示からえられる[4]。たとえば、$\alpha \in \hat{\pi}$ について $\alpha = |x|$ なる $x \in \pi_1(S)$ をとる。$\log\alpha := |\log x| \in \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S)$ と定めると、任意の $\gamma \in \Pi S(*_a, *_b)$ について $\sigma(\log\alpha)(\gamma) = (\alpha\cdot\gamma)\gamma$ となる。このように $\log\alpha$ は α の homology 類にしか依存しない。しかし、後述する $(\log\alpha)^2 := |(\log x)^2|$ はより多くの乗法を含んでいる。そもそも $\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S)$ には乗法が定義されていないことに注意する。

この定理から Johnson 準同型の幾何学的再構成が以下のようにしてできる。まず、Dehn-Nielsen 型の群の埋め込み写像 $\mathsf{DN} : \mathcal{M}(S) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{Q}\Pi S}|_E)$ を考える。$\log \mathsf{DN}(\varphi) := \sum_{m=1}^\infty \frac{(-1)^{m-1}}{m}(\mathsf{DN}(\varphi)-1)^m$ が $\mathrm{Der}_\partial(\widehat{\mathbb{Q}\Pi S}|_E)$ の元として収束する写像類 $\varphi \in \mathcal{M}(S)$ の全体の集合を $\mathcal{M}(S)^\circ$ と表す。たとえば、任意の単純閉曲線 C について右手 Dehn twist $t_C \in \mathcal{M}(S)$ は $\mathcal{M}(S)^\circ$ の元である。また、Putman [22] の意味での最大 Torelli 群は $\mathcal{M}(S)^\circ$ に含まれる。定理 2.1 により合成写像

$$\tau := \sigma^{-1} \circ \log \circ \mathsf{DN} : \mathcal{M}(S)^\circ \longrightarrow \mathrm{Der}_\partial(\widehat{\mathbb{Q}\Pi S}|_E) \longrightarrow \widehat{\mathbb{Q}\Pi S}$$

が定義できる。これを幾何学的 Johnson 準同型とよぶ [12]。実際、$S = \Sigma_{g,1}$ の場合は、τ の Torelli 群への制限は Massuyeau の total Johnson map に同値である。

Dehn twist での具体的な値は次で与えられる。

[4]次節では $\Sigma_{g,1}$ と $\Sigma_{0,n+1}$ についてしか述べないが、すべての $\Sigma_{g,n+1}$, $g, n \ge 0$ について Goldman Lie 代数の具体的なテンソル表示が出来て、それを使うと定理は直接計算で証明できる。

定理 2.2 (久野・河澄, Massuyeau-Turaev)**.** S を向きづけられた連結 *compact* 曲面で境界が空でないものとする。単純閉曲線 $C = |x| \subset S \setminus \partial S$, $x \in \pi_1(S)$, について $\frac{1}{2}(\log C)^2 := |\frac{1}{2}(\log x)^2| \in \widehat{\mathbb{Q}\Pi S}$ と定める。このとき $\tau(t_C) = \frac{1}{2}(\log C)^2 \in \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}$ がなりたつ。つまり、$\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{Q}\Pi S}|_E)$ の元として

$$(t_C)_* = \exp(\sigma(\frac{1}{2}(\log C)^2))$$

がなりたつ。

この定理は $S = \Sigma_{g,1}$ の場合に久野・河澄 [11] がはじめて証明した。一般の S への拡張は 久野・河澄 [12] と Massuyeau-Turaev [19] が独立に証明した。この公式を見ると、単純ではない閉曲線に沿う Dehn twist というものが $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{Q}\Pi S}|_E)$ の元としては定義できる [17]。これらの殆どは微分同相で実現できないと思われる [13]。なお、最近、辻俊輔はこの定理の「量子化」として、S の完備化された Kauffman skein 加群への Dehn twist t_C の作用がつぎで与えられることを証明した

$$(t_C)_* = \exp\left(\frac{(\cosh^{-1}(-C/2))^2}{4\log(-A)}\right).$$

3 Goldman Lie 代数のテンソル表示

つぎに、Goldman 括弧積と作用 σ のテンソル表示を $S = \Sigma_{g,1}$ および $\Sigma_{0,n+1}$ の場合に述べる。一般の S についても同様の結果が成り立つが主張を述べるだけでかなり複雑なので割愛する。

最初に、代数的な準備を行う。cyclic symmetrizer (cyclicizer) $N : \widehat{T} \to \widehat{T}$ を $N|_{H^{\otimes 0}} := 0$ [5] および $N(X_1X_2\cdots X_m) := \sum_{i=1}^m X_i \cdots X_m X_1 \cdots X_{i-1}$, $(X_j \in H)$, をみたす連続線型写像として定義する。$N(\widehat{T}) = N(\widehat{T}_{\geq 1})$ であり、任意の $u, v \in \widehat{T}$ について $N(uv) = N(vu)$ がなりたつ。次の観察の証明はたやすい。

補題 3.1 (久野・河澄)**.** 任意の（一般化された）*Magnus* 展開 θ について、$|x| \in \hat{\pi}$, $x \in \pi_1(S, *)$, に $N(\theta(x)) \in N(\widehat{T}_{\geq 1})$ を対応させる写像は次の位相的線型同型を誘導する

$$N\theta : \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S) \xrightarrow{\cong} N(\widehat{T}_{\geq 1}).$$

我々は、この同型を通して Goldman 括弧積（および Turaev 余括弧積）を $N(\widehat{T}_{\geq 1})$ 上で具体的なテンソルの演算として表すことをテンソル表示と言っている。

それでは、$S = \Sigma_{g,1}$ の場合を述べる。$\widehat{T}$ の連続導分の全体のなす Lie 代数を $\mathrm{Der}(\widehat{T})$ と表す。また、symplectic 形式 ω について Lie 部分代数 $\mathrm{Der}_\omega(\widehat{T}) := \{D \in \widehat{T};\ D(\omega) = 0\}$ を考える。これは Kontsevich [15] の 'associative' を Lie 部分代数として含んでいる。H への制限写像は位相線型同型 $\mathrm{Der}(\widehat{T}) \cong \mathrm{Hom}(H, \widehat{T}) = H^* \otimes \widehat{T}$, $D \mapsto D|_H$, を与える。既に述べたように $H = H_1(S; \mathbb{Q})$ は Poincaré 双対性により $H^* = \mathrm{Hom}(H, \mathbb{Q})$ と同一視される。そこで $\mathrm{Der}(\widehat{T}) \subset H \otimes \widehat{T} = \widehat{T}_{\geq 1}$ と見なすとき、直接計算によって対応 $\mathrm{Der}_\omega(\widehat{T}) = N(\widehat{T}_{\geq 1})$ が成り立つことが分かる。これによって同一視すると、補題 3.1 の同型写像は $N\theta : \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_\omega(\widehat{T})$ と見なすことができる。このとき次が成り立つ。

[5] これは monogon を潰すことに対応する。

定理 3.2 (久野・河澄 [11]). *θ を symplectic 展開とするとき、*

$$-N\theta : \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_\omega(\widehat{T})$$

は Lie 代数の同型であって、可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S) \otimes \widehat{\mathbb{Q}\pi_1(S,*)} & \xrightarrow{\sigma} & \widehat{\mathbb{Q}\pi_1(S,*)} \\
{\scriptstyle -(N\theta)\otimes\theta}\downarrow & & {\scriptstyle \theta}\downarrow \\
\mathrm{Der}_\omega(\widehat{T}) \otimes \widehat{T} & \longrightarrow & \widehat{T}
\end{array}$$

がなりたつ。ここで下の横の矢印は導分を施す写像である。

この定理は Massuyeau-Turaev [19] によって別証が与えられた。その際、彼らはもっと強力な Papakyriakopoulos-Turaev homotopy 交叉形式のテンソル表示を与えている。これはあとで Turaev 余括弧積のテンソル表示の最低次部分の計算を可能にする。

Massuyeau-Turaev と久野・河澄は独立に定理 3.2 を、一般の S に拡張した。しかし、定理を述べるだけでもかなり面倒なので $S = \Sigma_{0,n+1}$ の場合のみを述べておく。以下 $S = \Sigma_{0,n+1}$ とする。上述のように $x_k \in H = H_1(S;\mathbb{Q})$, $0 \le k \le n$, を $\partial_k S$ を正の向きに一周する homology 類とする。次のようにすると $N(\widehat{T}_{\ge 1})$ に Lie 代数の構造が入る: 任意の $u = \sum_{k=1}^n x_k u_k$ および $v = \sum_{k=1}^n x_k v_k \in N(\widehat{T}_{\ge 1}) \subset H \otimes \widehat{T}$, $u_k, v_k \in \widehat{T}$, について

$$[u,v] := -N(\sum_{k=1}^n x_k(u_k v_k - v_k u_k)) \in N(\widehat{T}_{\ge 1})$$

と定める。さきと同様に、$\widehat{T}$ の連続導分の全体のなす Lie 代数を $\mathrm{Der}(\widehat{T})$ と表す。$\sigma(u) \in \mathrm{Der}(\widehat{T})$ を $1 \le k \le n$ について $\sigma(u)(x_k) := [x_k, u_k] = x_k u_k - u_k x_k$ となるように定義する。このとき、写像

$$\sigma : N(\widehat{T}_{\ge 1}) \to \mathrm{Der}(\widehat{T}), \quad u \mapsto \sigma(u)$$

は Lie 代数準同型であり、その像は Lie 部分代数 $\mathfrak{sder}_n := \{D \in \mathrm{Der}(\widehat{T});\ 1 \le \forall k \le n, \exists u_k \in \widehat{T},\ D(x_k) = [x_k, u_k],\ D(x_0) = 0\}$ に含まれる。これは絶対 Galois 群の研究にあらわる (normalized) special derivation Lie algebra そのものである。定理 2.1 と比較して、この σ が単射ではないことに注意する。$\partial_0 S$ 以外の境界成分のことを考えていないからである。

定理 3.3 (Massuyeau-Turaev, 久野・河澄). *θ を特殊展開とするとき、*

$$-N\theta : \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S) \xrightarrow{\cong} N(\widehat{T}_{\ge 1})$$

は Lie 代数の同型であって、可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S) \otimes \widehat{\mathbb{Q}\pi_1(S,*_0)} & \xrightarrow{\sigma} & \widehat{\mathbb{Q}\pi_1(S,*_0)} \\
{\scriptstyle -(N\theta)\otimes\theta}\downarrow & & {\scriptstyle \theta}\downarrow \\
N(\widehat{T}_{\ge 1}) \otimes \widehat{T} & \xrightarrow{\sigma} & \widehat{T}
\end{array}$$

がなりたつ。

4 Turaev 余括弧積と写像類群

次に Turaev 余括弧積を考える。幾何的 Johnson 準同型 $\tau : \mathcal{M}(S)^\circ \to \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S)$ の像は Turaev 余括弧積の核に含まれる。これによって Johnson 準同型の像の上からの幾何的な評価が得られる。$S = \Sigma_{g,1}$ の場合、Turaev 余括弧積のテンソル表示の最低次項から森田 trace [20] が得られ、正則（homotopy 版の）Turaev 余括弧積のテンソル表示の最低次項から榎本佐藤 trace [4] が得られる。

まず、定数 loop $\mathbf{1} \in \hat{\pi}$ が Goldman Lie 代数 $\mathbb{Z}\hat{\pi}$ の中心に含まれるため、商 $\mathbb{Z}\hat{\pi}'(S) = \mathbb{Z}\hat{\pi}(S)/\mathbb{Z}\mathbf{1}$ には Lie 代数の構造が誘導されることを思い出す。合成写像 $|\ |' : \mathbb{Z}\pi_1(S) \xrightarrow{|\ |} \mathbb{Z}\hat{\pi}(S) \xrightarrow{\text{quotient}} \mathbb{Z}\hat{\pi}'(S)$ を考える。Turaev 余括弧積 $\delta : \mathbb{Z}\hat{\pi}'(S) \to \mathbb{Z}\hat{\pi}'(S) \otimes \mathbb{Z}\hat{\pi}'(S)$ は以下のように定義される。$\alpha \in \hat{\pi}(S)$ の代表元を一般の位置にとる。$D_\alpha := \{(t_1, t_2) \in S^1 \times S^1;\ \alpha(t_1) = \alpha(t_2),\ t_1 \neq t_2\}$ とおき、

$$\delta(\alpha) := \sum_{(t_1,t_2)\in D_\alpha} \varepsilon(\dot{\alpha}(t_1), \dot{\alpha}(t_2)) |\alpha_{t_1t_2}|' \otimes |\alpha_{t_2t_1}|' \in \mathbb{Z}\hat{\pi}'(S) \otimes \mathbb{Z}\hat{\pi}'(S)$$

と定める。ここで $\varepsilon(\dot{\alpha}(t_1), \dot{\alpha}(t_2)) \in \{\pm 1\}$ は $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ における局所交点数であり、$\alpha_{t_1t_2}$ および $\alpha_{t_2t_1}$ は、それぞれ、S^1 上の正の向きに t_1 から t_2 まで動いた区間への α の制限および正の向きに t_2 から t_1 まで動いた区間への α の制限を表す。これらは $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ を基点とする loops とみることができる。Turaev [26] はこの δ が well-defined であり、$(\mathbb{Z}\hat{\pi}'(S), [\ ,\ ], \delta)$ が（Drinfeld の意味での） Lie 双代数になることを示した。これを曲面 S の Goldman-Turaev Lie 双代数とよぶ。とくに、$\operatorname{Ker}\delta$ は $\mathbb{Z}\hat{\pi}'(S)$ の Lie 部分代数である。商 $\mathbb{Z}\hat{\pi}'(S) = \mathbb{Z}\hat{\pi}(S)/\mathbb{Z}\mathbf{1}$ をとらなければならない理由は monogon の生成消滅で不変であるようにするためである。Turaev 余括弧積 δ は $\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S)$ に余括弧積を誘導する。その意味で $\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S)$ を完備 Goldman-Turaev Lie 双代数とよぶ。

$\widehat{\mathbb{Q}\Pi S}(*_a, *_b)$, $0 \leq a, b, \leq n$, には $\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S)$ 余加群の構造

$$\mu : \widehat{\mathbb{Q}\Pi S}(*_a, *_b) \to \widehat{\mathbb{Q}\Pi S}(*_a, *_b) \widehat{\otimes} \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S)$$

が入る。$*$ および $*'$ を境界 ∂S 上の相異なる二点とする。$\gamma \in \Pi S(*, *')$ の代表元を一般の位置にとる。γ の二重点全体の集合を Γ_γ とする。各 $p \in \Gamma_\gamma$ について $\gamma^{-1}(p) = \{t_1^p, t_2^p\} \subset [0, 1]$, $t_1^p < t_2^p$, となる。

$$\mu(\gamma) := -\sum_{p\in\Gamma_\gamma} \varepsilon(\dot{\gamma}(t_1^p), \dot{\gamma}(t_2^p)) (\gamma_{0t_1^p}\gamma_{t_2^p1}) \otimes |\gamma_{t_1^pt_2^p}|' \in \mathbb{Z}\Pi S(*, *') \otimes \mathbb{Z}\hat{\pi}'(S)$$

と定義する。これは Turaev [25] に inspire された定義である。また、$* = *'$ のときは、終点を $*$ から正の方向に少しだけずらしたもの $*_+$ にとる。いずれにせよ、この μ が well-defined で $(\mathbb{Z}\Pi S(*, *'), \sigma, \mu)$ が $\mathbb{Z}\hat{\pi}'(S)$ 双加群となることが証明できる [13]。μ は $\widehat{\mathbb{Q}\Pi S}(*_a, *_b)$, $0 \leq a, b, \leq n$, に $\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S)$ 双加群の構造を誘導する。

写像類群との関係を述べる。任意の $\varphi \in \mathcal{M}(S)^\circ$ は μ を保つことに注意する。つまり、任意の $n \in \mathbb{Z}$ と任意の $v \in \widehat{\mathbb{Q}\Pi S}(*_a, *_b)$ について $\mu(e^{n\sigma\tau(\varphi)}v) = (e^{n\sigma\tau(\varphi)} \widehat{\otimes} e^{n\sigma\tau(\varphi)})\mu(v)$ となる。n についての線型項をとって $\mu(\sigma\tau(\varphi)v) = (\sigma\tau(\varphi) \widehat{\otimes} 1 + 1 \widehat{\otimes} \operatorname{ad}\sigma\tau(\varphi))\mu(v)$ となる。双加群の compatibility axiom を使うと $(\overline{\sigma} \widehat{\otimes} 1_{\widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}})(v \widehat{\otimes} \delta\sigma(\varphi)) = 0$ がえられる。ここで $\overline{\sigma} : \widehat{\mathbb{Q}\Pi S} \widehat{\otimes} \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}} \to \widehat{\mathbb{Q}\Pi S}$, $v \otimes u \mapsto -\sigma(u)(v)$, である。いま、定理 2.1 により $\sigma : \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}} \to \operatorname{Der}(\widehat{\mathbb{Q}\Pi S})$ は単射だから、$\delta\sigma(\varphi) = 0$ である。以上で次の定理が証明された。

定理 4.1 (久野・河澄 [13]).

$$\delta \circ \tau = 0 : \mathcal{M}(S)^\circ \to \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S) \to \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S) \widehat{\otimes} \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S).$$

5 Turaev 余括弧積のテンソル表示

再び、Magnus 展開 θ について同型 $-N\theta : \widehat{\mathbb{Q}\hat{\pi}}(S) \cong N(\widehat{T}_{\geq 1})$ が成り立つことを思い出す。この同型を通して、Turaev 余括弧積のテンソル表示

$$\delta^\theta := ((-N\theta)\widehat{\otimes}(-N\theta)) \circ \delta \circ (-N\theta) : N(\widehat{T}_{\geq 1}) \to N(\widehat{T}_{\geq 1})\widehat{\otimes}N(\widehat{T}_{\geq 1})$$

が定義される。δ^θ の具体的な値は未解明である。また、$S = \Sigma_{g,1}$ の場合、久野により θ が symplectic 展開であっても θ の取り方に依存することがわかっている。ただし、$N(\widehat{T}_{\geq 1}) = \prod_{m=1}^\infty N(H^{\otimes m})$ には次数が入っているから、δ^θ の次数展開が出来る。以下の定理 5.1 および定理 5.2 はいずれも Massuyeau-Turaev による homotopy 交叉形式のテンソル表示からえられる。

定理 5.1 (Massuyeau-Turaev, 久野・河澄). $S = \Sigma_{g,1}$ のとき、*symplectic* 展開 θ による δ^θ の次数展開は -2 次から始まり、その -2 次成分 $\delta^\theta_{(-2)}$ は *Schedler* 余括弧積 *[24]* に等しい。つまり、任意の $X_j \in H$, $1 \leq j \leq m$, について

$$\begin{aligned}\delta^\theta_{(-2)}(N(X_1 \cdots X_m)) = \sum_{j-i\geq 2} (X_i \cdot X_j)(&N(X_{i+1}\cdots X_{j-1})\widehat{\otimes}N(X_{j+1}\cdots X_m X_1 \cdots X_{i-1}) \\ &- N(X_{j+1}\cdots X_m X_1\cdots X_{i-1})\widehat{\otimes}N(X_{i+1}\cdots X_{j-1}))\end{aligned}$$

となる。ここで $(X_i \cdot X_j) \in \mathbb{Q}$ は交叉数である。

直接計算で $\delta^\theta_{(-2)}$ には森田 trace [20] が含まれていることがわかる [13]。したがって、森田 trace は Turaev 余括弧積という幾何学的な意味をもつことが分かる。しかしながら、榎本 [3] によると $\delta^\theta_{(-2)}$ には榎本佐藤 trace [4] が含まれない。それは monogon を潰しているために $N1 = 0$ となり、定理の総和記号が $j - i = 1$ を走らないことによる。$j - i = 1$ の部分は榎本佐藤 trace そのものである。他方、monogon の生成消滅は正則 homotopy では起こりえない。これが正則 homotopy 版の Turaev 余括弧積を考える理由の第一である。他方、榎本佐藤 trace の一次の項は写像類群の Earle, Chillingworth, 森田らによって構成された非自明なねじれ準同型である。これは古田によって framing の言葉でも定式化されている [21]。framing を考えることと正則 homotopy を考えることはほぼ等価である。これが正則 homotopy 版の Turaev 余括弧積を考える理由の第二である。

さて、種数 0 つまり $\Sigma_{0,n+1}$ を考えるためには、Massuyeau-Turaev [19] が導入した結合的乗法

$$\dot{\leadsto} : \widehat{T}_{\geq 1} \times \widehat{T}_{\geq 1} \to \widehat{T}_{\geq 1}, \quad x_{i_1}\cdots x_{i_l} \dot{\leadsto} x_{j_1}\cdots x_{j_m} := -\delta_{i_l j_1} x_{i_1}\cdots x_{i_{l-1}} x_{j_1} x_{j_2}\cdots x_{j_m}$$

を使う必要がある。 $x_0 = -\sum_{k=1}^n x_k$ が単位元である。

定理 5.2 (Massuyeau-Turaev, 久野・河澄). $S = \Sigma_{0,n+1}$ のとき、*symplectic* 展開 θ による δ^θ の次数展開は -1 次から始まり、その -1 次成分 $\delta^\theta_{(-1)}$ は、任意の $X_j \in H$, $1 \leq j \leq m$, について

$$\begin{aligned}\delta^\theta_{(-1)}(N(X_1\cdots X_m)) = \sum_{j-i\geq 2} &N(X_i \dot{\leadsto} X_j X_{j+1}\cdots X_m X_1 \cdots X_{i-1})\widehat{\otimes}N(X_{i+1}\cdots X_{j-1}) \\ &+ N(X_j \dot{\leadsto} X_i X_{i+1}\cdots X_{j-1})\widehat{\otimes}N(X_{j+1}\cdots X_m X_1\cdots X_{i-1}) \\ &- N(X_{i+1}\cdots X_{j-1})\widehat{\otimes}N(X_i \dot{\leadsto} X_j X_{j+1}\cdots X_m X_1\cdots X_{i-1}) \\ &- N(X_{j+1}\cdots X_m X_1\cdots X_{i-1})\widehat{\otimes}N(X_j \dot{\leadsto} X_i X_{i+1}\cdots X_{j-1})\end{aligned}$$

となる。

ここでも $j-i=1$ の部分に柏原 Vergne 問題の発散 cocycle が現れている。そこで正則 homotopy 版の Turaev 余括弧積を考えると柏原 Vergne 問題の発散 cocycle [2] が出てくるのである。

Alekseev-Torossian [2] による定式化では柏原 Vergne 問題とは、pants 曲面 $\Sigma_{0,3}$ の特殊展開であって、発散 cocycle と適合しているものを求める問題に他ならない。柏原 Vergne 問題の解の存在は Alekseev-Meinrenken [1] によって証明されている。以上を勘案すると θ を柏原 Vergne 問題の解による特殊展開とするとき δ^θ はキレイな形、ひょっとすると $\delta^\theta_{(-1)}$ に一致するかもしれない。他方、久野および Massuyeau-Turaev によって μ^θ については $\delta^\theta_{(-1)}$ よりは複雑な形をとらなければならないことが観察されていて、彼らは独立に μ^θ の形について同一の作業仮説をたてている。現在の私の研究課題は柏原 Vergne 問題の解による δ^θ を何らかの形で書き下すことである。もし、それが $\delta^\theta_{(-1)}$ に一致するならば、Grothendieck-Teichmüller Lie 代数と Johnson 準同型の理論が直結することになるし、δ^θ が Schedler 余括弧積 $\delta^\theta_{(-2)}$ に一致する symplectic 展開 θ を求める問題こそが「正種数柏原 Vergne 問題」ということになる。他方で、 $\delta^\theta_{(-1)}$ に一致しないことがはっきりするのならば、Johnson 準同型像について新たな制約条件が見いだされることになる。道のりは平坦ではないが、どちらに転ぶにせよ一日も早く結果を出したいと思っている。

References

[1] A. Alekseev and E. Meinrenken, On the Kashiwara-Vergne conjecture, Invent. math. **164**, 615-634 (2006).

[2] A. Alekseev and C. Torossian, The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld's associators, Ann. of Math. **175**, 415-463 (2012)

[3] N. Enomoto, private communication.

[4] N. Enomoto and T. Satoh, New series in the Johnson cokernels of the mapping class groups of surfaces, Algebr. Geom. Topol. **14**, 627-669 (2014)

[5] W. M. Goldman, Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface groups representations, Invent. Math. **85**, 263-302 (1986)

[6] N. Habegger and G. Masbaum, The Kontsevich integral and Milnor's invariants, Topology **39**, 1253 - 1289 (2000).

[7] D. Johnson, A survey of the Torelli group, Contemporary Math. **20**, 165-179 (1983)

[8] D. Johnson, The structure of the Torelli group - II: A characterization of the group generated by twists on bounding curves, Topology **24**, 113-126 (1985)

[9] N. Kawazumi, Cohomological aspects of Magnus expansions, preprint, math.GT/0505497 (2005)

[10] N. Kawazumi, Harmonic Magnus Expansion on the Universal Family of Riemann Surfaces, preprint, arXiv: math.GT/0603158(2006)

[11] N. Kawazumi and Y. Kuno, The logarithms of Dehn twists, to appear in: Quantum Topology, available at arXiv:1008.5017 (2010)

[12] N. Kawazumi and Y. Kuno, Groupoid-theoretical methods in the mapping class groups of surfaces, preprint, arXiv: 1109.6479 (2011).

[13] N. Kawazumi and Y. Kuno, Intersections of curves on surfaces and their applications to mapping class groups, preprint, arXiv: 1112.3481 (2011).

[14] T. Kitano, Johnson's homomorphisms of subgroups of the mapping class group, the Magnus expansion and Massey higher products of mapping tori, Topology Appl. **69**, 165 - 172 (1996)

[15] M. Kontsevich, Formal (non)-commutative symplectic geometry, in: "The Gel'fand Mathematical Seminars, 1990-1992, Birkhäuser, Boston, 173-187 (1993)

[16] Y. Kuno, A combinatorial construction of symplectic expansions, Proc. Amer. Math. Soc. **140**, 1075-1083 (2012)

[17] Y. Kuno, The generalized Dehn twist along a figure eight, J. Topol. Anal. **5**, 271-295 (2013)

[18] G. Massuyeau, Infinitesimal Morita homomorphisms and the tree-level of the LMO invariant, Bull. Soc. Math. France **140**, 101-161 (2012)

[19] G. Massuyeau and V. Turaev, Fox pairings and generalized Dehn twists, Ann. Inst. Fourier **63**, 2403-2456 (2013)

[20] S. Morita, Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces, Duke Math. J. **70**, 699-726 (1993)

[21] S. Morita, Casson invariant, signature defect of framed manifolds and the secondary characteristic classes of surface bundles, J. Diff. Geom., **47** (1997) 560–599.

[22] A. Putman, Cutting and pasting in the Torelli group, Geometry and Topology **11**, 829-865 (2007)

[23] D. Quillen, Rational homotopy theory, Ann. Math. **90**, 205-295 (1969)

[24] T. Schedler, A Hopf algebra quantizing a necklace Lie algebra canonically associated to a quiver, Int. Math. Res. Not. **2005**, 725-760 (2005)

[25] V. G. Turaev, Intersections of loops in two-dimensional manifolds, (Russian) Mat. Sb. **106(148)**, 566-588 (1978). English translation: Math. USSR-Sb.**35**, 229–250 (1979).

[26] V. G. Turaev, Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces, Ann. sci. École Norm. Sup. (4) **24**, 635-704 (1991)

Nariya Kawazumi
Department of Mathematical Sciences,
University of Tokyo,
3-8-1 Komaba Meguro-ku Tokyo 153-8914 JAPAN
E-mail address: kawazumi@ms.u-tokyo.ac.jp