

集中講義「数学史」(2015年1月5日-9日)の概要

主題：解析学への歴史の試み：代数解析の新系譜

講義のねらい：Pascal のいう「幾何学が解析と呼んでいるもの」[1]は何か?…「解析」にも歴史がある。解析学が形成されていく様子を、「代数解析」という術語にしながら考察していく。¹

- 講義の骨子は本文に、講義に関連して指摘した事柄は脚注にした。
- [] 内に対応する配布資料の番号を付した。

予備的な説明

- 数学史の時代区分 [3]・数学全体の歴史的な流れ [4]

I. 代数解析前史

1. 古代ギリシアにおける解析

(準備)：古代ギリシア数学の定義と全体像 [5]・「数学」の語源・量について [6-9]²

1-1. Pappus (of Alexandria) による「解析」の理解

- Pappus は『集成』第7巻で、解析とは数学的命題やその証明の「発見法」・これを Euclid 『原論』(の証明)に見られる総合と対象させた。[10]:
- 解析は時には消されているが、ギリシア数学ではしばしば見かける、との指摘。

1-2. Archimedes の『球と円柱について』に見られる解析 [14]

- 「第2巻命題3」は、「それが解けたと仮定する」として始まっている。そのあと、総合による証明が提示される。[11-13]

1-3. 古代ギリシアの求積³

- 無限を含む手続きを入れない。2重帰謬法と取りつくし法により、予想された結果を証明。[15-16]
- 円錐曲線が多くの問題を提起した。[17]

2. 「代数」の起源 [18]

2-1. アル=フワリーズミー (780年-850年頃)

『ジャブルとムカーバラの計算法についての簡約な書』での記述⁴

- アル=ジャブル(復元する)・ムカーバラ(向かい合わせにする)ことによって、2次方程式を標準形にし、その解き方を提示。
- 未知の量は、「マール」「シャイ」など書かれていた。⁵

2-2. オマル・ハイヤーム (1048 - 1131)

『ジャブルとムカーバラに関する諸問題の証明』(1069-74年頃?)での記述

- 「アル・ジャブルの技法により、未知の数や計量可能な未知の大きさ(線・面、立体、時間)が既知のものと結びつける。それを見つけ出すことが、アル・ジャブラの目的である」とする。[19-20]

¹ 数学史での表現に注意。[2]

² ユークリッド『原論』の重要性。

³ 「写本」に注意。[15-16]

⁴ イスラームを経て、インドからヨーロッパへ伝えられた最大の成果は、位取り記数法である。記数法にインド数字を使うことを「アルゴリズム」というようになる。

⁵ これが記号化されていく過程は [21] にある。

- この書では、3 次方程式の解法を扱っていた。

II. 代数解析から無限小解析へ

1. Viète・Descartes による代数 = 解析の捉え方

1-1. François Viète (1540-1603) の寄与⁶

1591 年の著書 *In Artem Analyticem Isagoge* (『解析法序説』: 副題「復元された数学解析の作品の一部より取り出されたもの、すなわち新しい代数」) にみられる記述。[22]

- species とは、量をあらわす文字記号のことで、Viète 自身が使った術語。Viète は、未知数のみならず、既知数も文字化した。⁷ ただし、「同次の法則」が要請されている。
- 彼は「数計算」に対して、文字による演算を「記号計算」と称した。
- ギリシアでは、幾何学に対して行った解析という「発見法」を、Viète は species に対して行なった (= 未知量があたかもわかっているかのように式を変形する)。それゆえ、数学史家 (たとえば Jacob Klein) は、この手法を「代数解析」(Algebraic analysis) と称した。

1-2. René Descartes (1596-1650) の寄与

1637 年の著作 *La geometrie* (『幾何学』 = 『方法序説』の本体の一部) に見られる記述

- この準備段階でかかれたと思われる『精神指導の規則』では、「古代人が図形について行ったこと (解析) を数について遂行しようとして、代数学と称する、一種の算術が栄えている」とする。[23]
- 『幾何学』では、同次の法則を廃止した上で、文字式が使われる。
- 直線や曲線を方程式で表わす。また、方程式の解をそれらの交点として捉える。ただし、Descartes 自身が扱った曲線は、多項式で表せる曲線のみである。
- Descartes の方法により、幾何学の問題は、方程式を解くこと (= 解析) に帰着される。また、Descartes はたとえば法線を求めるとき、「問題がすでに解かれたと仮定し」として考察を始めていた。ただし、総合による証明はない。[24]
- Descartes の方法は、解析という問題解決の手法を強調すると「解析幾何」、方程式を使っていることを強調すると「代数幾何」ということができる。(ただしこのとき、「代数とは方程式を扱うもの」と私たちは理解している。)
- Descartes は、互いに直交する二つの線分の長さを x, y とおいている。これをデカルト座標とみなしてよいかは検討の余地がある。ただし、基準にとる一つの軸はある。[24]

2. 17 世紀-18 世紀前半の無限小解析の形成

2-1. Newton と Leibniz への過程 [27-29]

- Descartes と同時期に、Pierre de Fermat (1601?-1665) も、一つの軸を基準として、直線・円・円錐曲線の方程式を与えている。⁸
- 求積に際し、図形に即して、無限に小さい部分やその無限和を考えるとということがなされ始めた。
- サイクロイドが発見された。Descartes の手法では扱えない、この曲線は、数学者たちの関心を惹きつけた。[30-31]

⁶ 中世ヨーロッパでの大学の制度に注意。「大卒数学者」は、神学部か法学部か医学部の出身である。算数教師といった「大学の先生」以外の人々も数学の発展を担っている。[25]

⁷ 「カルダーノの公式」と呼ばれる 3 次方程式の解の公式を Cardano が提示した時点では、既知数は文字化されていない。「解を求める手続きを説明したもの」であった。

⁸ 当時の研究交流に大きな役割をはたしたのは、Mersenne だった。[25-26]

2-2. Issac Newton (1642-1727) の流率法 [32-33]⁹

- Newton は指数が有理数や負の数となる場合にまで含めた二項展開を実行した。式を展開して項別積分するのが基本的な方針だった。
- 時間に依存する量 x (= 流量という。fluent : 英語) の流率 (fluxion : 英語) \dot{x} は、 x がその生成運動によって増加する速さであると理解する。また o (= オミクロン) を微小量としたとき、 $\dot{x}o$ を流量のモーメントといい、無限に小さい時間間隔内に増加する量をイメージしている。
- 流量の関係式から流率の関係式を求める、その逆をやるという計算を示した後、流率や流量を使って極大極小や面積の問題を扱う。[36]
- Newton の技法では、消滅していく o を含む諸量の比を扱い、最後にはその o をゼロとして扱う。¹⁰ そこで、「比の極限」という概念がでてくる。[38-41]

2-3. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) の微分算・和分算 [42]

- Newton に比して短い草稿が沢山あり、1990年代にも新たな草稿が公刊されている。着想を得たのは Newton のほうが早く、彼の草稿類はまわし読みされてはいた。しかし公刊は Leibniz のほうが早かったため、先取権論争が起きる。[43]
- 差と和の考え方が根本に据えられる。微小な図形を使って考察を進めている。
- 1673 - 75年頃に導いた面積変換定理が求積にかかわる初期の仕事である。[44]
- 「 \int が次元を増すように、 d は次元を減らす。ところで \int は和を、 d は差を意味する」と考える。今日習うような微積分の計算法則に達し、これらを用いて極値や変曲点を求め、逆接線問題を解く。[45-48]
- Descartes の方法では扱えない曲線にも言及する。サイクロイドの方程式を、 \int 記号とともに導く。

2-4. Newton と Leibniz の「代数解析」¹¹

- Viète・Descartes 以来の「代数 = 解析」は受け入れている。
- Newton の「解析について」では、方程式を扱う発見法を代数、すなわち解析といい、それは通常有限個の項を持つ方程式でなされるが、無限個の項を持つ方程式についても、「解析」と呼んでいいだろうとする。¹²
- Leibniz については
 - (1) 記号でかかれた方程式を扱って問題を考察することを代数としたり解析としたりしていた。ある時から、多項式でかける方程式をもつ曲線を代数的、そうでないものを超越的というようになり、超越曲線に伴う式の操作については、「解析」と称している。
 - (2) 方程式の中に無限小量が入ってきたり、項の数が無限個になると、代数ではなく「解析」と称している。

2-5. 「無限小解析」の登場

- Leibniz の微分算・和分算を用いて、さまざま問題を解きつつ、この分野を発展させた人々として Bernoulli 一族が挙げられる。[52-54]

⁹ Newton の流率法に関する記述をよむとき、混乱しがちな事柄を [34-35] にまとめた。

¹⁰ Newton の主著書『プリンキピア』は、幾何学の言葉でかかれている。また、ニュートンの運動方程式なるものは、かかれていない。[37]

¹¹ Newton と Leibniz は、数学のみならず、さまざまな方面に影響を与えている。フランスを革命へと導いた社会思想の形成に、Newton は大きな影響を果たした。[49-51]

¹² 数学史では、イギリスと称することはあまりない。文化の異なる イングランド・スコットランド・ウエールズ・アイルランドを区別して扱う場合が多い。

○ Johan Bernoulli (1667-1748) が、Leibniz の成果をまとめた講義をしている。1696 年出版の Guillaume François Antoine Marquis de L'Hôpital (1661 - 1704) による教科書 *Analyse des Infiniment Petit sur l'Intelligence des Lignes Courbes* (『曲線理解のための無限小解析』) は、Johan の L'Hôpital への講義録である。また、Euler は Johan の指導を受けた。

○ L'Hôpital への講義録は「無限小解析」と称されている。解析は通常有限な大きさを扱ってきたが、ここでは、無限小が入ってきていること、それによって、曲線の考察ができることを指摘。

… 方程式を扱うとき、項の個数が無限個になったり無限小が入ってきたりすると、代数ではなく解析と称する傾向が見える。

17-18 世紀における、微積分にかかわる言葉使いのまとめ

Newton: 流率法

Leibniz: 微分算・和分算

Johan Bernoulli: 和分算を積分算と称することを Leibniz に提案。

L'Hôpital (への講義): 無限小解析

III. 「代数解析」という術語の登場¹³

1. Leonhard Euler (1707 - 1783) と解析学の確立 [55-56]¹⁴

○ Euler の無限小解析にかかわる代表的な著作として

1748 年 *Introductio in analysin infinitorum* 『無限解析序説』

1755 年 *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum* 『微分学教程：微分算の基礎・有限解析と級数への応用とともに』

1768 年-70 年 *Institutiones calculi integralis* 『積分学教程』(全4巻)

があげられる。17 世紀に登場した、座標幾何・関数概念・微分法を一つにまとめ、幾何学・代数学・解析学という体制にしたのは、Euler の成果であると数学史では評価される。

¹⁵

○ *Introduction in analysin infinitorum* で注目すべき点 [57-58]

(1) 無限解析に必要な代数の教程を作ることを目的とした。

(2) 無限解析の対象を関数とした。

(3) Euler の関数とは、「解析的表現」で、式でかけるものと判読できる。曲線を表現した

¹³ この頃、研究活動の場として科学アカデミーができる。作成したプリントを講義時に配布するのを忘れたため、Web から落としてください。

¹⁴ Euler は数学史上、もっとも多産な研究者として知られている。一番影響力があったのは、1760 年から 1762 年にかけて、ブランデンブルグ-シュヴェート大公妃ゾフィー・シャルロッテにあてて書いた *Lettres à une Princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie* (『ドイツの王女あて書簡』) といわれる。当時のヨーロッパのすべての文明国の原語に翻訳され、234 通の書簡では、音楽理論・哲学・力学・光学・天文学・神学・倫理学がほとんど同じ比重で扱われ、一般向け自然科学的・哲学的教養の概説書として、当時のヨーロッパのすべての文明国の言語に翻訳され最も広く流布した。

¹⁵ デカルト座標がいつ確立したかを特定するのは、困難である。しかし、Euler は 1747 年に書いた論文 “Reserches sur le mouvement des corps célestes en général” において、3次元デカルト座標での力の成分を (X, Y, Z) 、質量を M 、時間を t として、運動方程式を

$$\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{X}{M}, \quad \frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Y}{M}, \quad \frac{2ddz}{dt^2} = \frac{Z}{M}$$

と記しているのが、少なくともこの時点では、デカルト座標が確立しているといっていよう。なお、2 が付いているのは、当時の単位系にしたがっていたためである。

ものではなく、式そのものである。代数関数と超越関数の区別し、多価関数・逆関数を定義する。また、指数関数・対数関数・三角関数も定義する。

(4) そのような関数のべき級数展開（二項展開）を提示する。

○ Euler の微分・積分

(1) 無限小解析とは、前に有限である仮定された差分を無限小としたときに生じるものであるとする。さまざまな関数のべき級数展開を利用して、微分の公式を求める。

(例) $y = x^n$

$$dy = (x + dx)^n - x = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}dx^2 + \dots$$

dx^2 以上は dx に比べて高次の無限小なので、無視できる。よって

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx.$$

(2) 微分の逆演算として積分を規定する。

○ Euler は Viète・Descartes 以来の「代数 = 解析」は受け入れている。

2. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) と「代数解析」の登場

○ 1797 年に Lagrange は、エコール・ポリテクニーク¹⁶ [26] での講義にもとづいて

Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies (『すべての考察を無限小、消えゆく量、極限および流率から解放し、有限量の代数解析に帰着するような微分計算の原理を含む、解析関数の理論』) [61]

を出版。「代数解析」という表現が数学書に登場する。

○ *Théorie des fonctions analytiques* で注目すべき点

(1) 解析という語で、Newton 派の流率法・Leibniz 派の無限小解析を指していた。

(2) Lagrange は、無限小量や極限の概念を避けて微分法を展開しようとした。関数 $f(x+i)$ (i は不定量) は、所定の方法で

$$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 \dots \quad (p, q, r, \dots \text{ は } x \text{ のみの関数.})$$

と一意的に展開できるとし、 $p(x)$ を $f(x)$ の「導関数」(la fonction dérivée) と呼び、 $f'(x)$ と記す。さらに

$$q = \frac{1}{2!}f^{(2)}(x), r = \frac{1}{3!}f^{(3)}(x), \dots$$

とする。ただし、極限概念は暗黙の裡に導入されていた。[62-65, 67]

(3) 導関数に対してもとの関数を fonction primitive といい、それを求めることもしている。Lagrange も積分を微分の逆と規定している。

(4) Lagrange のいう解析関数とは、 x^m , a^x , $\log x$, $\sin x$, $\cos x$ とこれらの加減乗除、逆関数や合成関数、それらの関数の原始関数や導関数で、これで関数のすべてが尽くされると考えていた模様。[65]

(5) Lagrange は、常微分方程式・偏微分方程式を考察した後、第 2 部では、幾何学への応用：接線・曲率・極大/極小、力学への応用を取り上げている。

(6) Lagrange は「代数とは操作の体系」という見方をとっている。すると、代数的 (Algebraic) とは多項式を形式的に扱うこととみなすことができる。¹⁷ 解析とは関数に関する

¹⁶ 創立期のエコール・ポリテクニークに在籍した、小説『赤と黒』などで知られるスタンダールの自伝『アンリ・ブリュラルの生涯』には、当時の状況が記されている。[70-73]

¹⁷ Lavoisier は、『化学原論』(1789)において、代数という語を使っている。[68-69]

考察であるから、関数をべき級数展開して、多項式の加減乗除で扱う手法を「代数解析」と称している。

○1806年、続編ともいふべき、*Leçons sur le calcul des fonctions* (『関数計算講義』) を出版する。ここでは、「この講義は『関数解析の理論』の第一部を補うもので、普通、無限小計算や超越的計算、それは関数計算 (le Calcul des fonctions) に他ならないが、と呼ばれる部分に関する解析教程 (un cours d'Analyse) を供する」との記述がみられる。[66]

(1) この本では、前著で扱った偏微分方程式の理論を深め、また多変数関数や変分法を取り上げている。前著と併せると、Lagrange のいう「解析教程」の概略がうかがえる。

(2) 微分算・積分算・変分(計)算 (calculus variationum=Euler の命名、1760) をまとめて、関数(計)算としたのが Lagrange の考え方であった。

3. Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) による「代数解析」

○1821年に Cauchy は：*Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique; I.re Partie. Analyse algébrique* 『エコール・ポリテクニークの解析(学)教程：第I部・代数解析』を出版。

(1) 「「解析教程」の第1部として、「代数解析」(*d'Analyse algébrique*) といわれている事柄、つまりそこでは、実および複素関数の様々な種類、収束・発散する級数、方程式の解法、有理関数の分解を行う」とする。すなわち「代数解析」とは微分積分学の予備知識を与える教育課程となっている。[74-80]

(2) 微積分学の準備コースの起源は、Euler の『無限解析序説』である。それゆえ、「代数解析の起源は Euler」といわれる。¹⁸ Lagrange が意図した代数解析とは、まったく異なる意味を持つ。

(3) 17世紀以来の代数と解析の関係を考えれば、普通名詞として「代数解析」が出てくるのは、自然である。たとえば、Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet (1743-1794) は、Euler の追悼文の中で、この術語を使っている。そこでは、代数という抽象的な記号計算のなかに、Euler らが超越量や超越関数を持ち込んだことを指して、「代数解析」と称している。超越量を持ち込んだ方程式論は Cauchy が教えようとしたものの一部であるとみなせる。Cauchy が「いわれている」というのは、このような形で言及された「代数解析」であろう。

(4) なお、個人的に知るかぎりでは、Euler 自身が自らの理論を「代数解析」と称したこととははない。

IV. 今日の微分積分学の起源

1. Cauchy の成果と限界

○Cauchy の *Cours d'Analyse*[59] は、第I部しか出版されなかった。しかし、続編に相当すると察せられる内容が

• *Résumé des leçons données à sur l'école royale polytechnique sur le calcul infinitesimal* (1823) 『エコール・ポリテクニークで講義した無限小解析概要』

• *Leçons sur le calcul différentiel* (1829) 『微分学講義』

に見られる。

1-1. Cauchy の斬新な部分

○*Cours d'Analyse* の序文では、幾何学で要求するような完全な厳密さを与え、代数学の一般性から引き出された論拠に頼るようには決してないとする態度が見られる。これが級数の収束・発散の定義につながる。

¹⁸ ドイツ圏でも、同様に考えられている。

○ 極限を基礎においた、微積分学の展開：多くの定義は、今日とほぼ同様。

(1) 近づいてくるといふ状況を不等式の言葉で表現して、極限を定義する。0 を極限とする変量を無限小と定義する (1821)。[81]

(注) 以降、極限に伴う議論は不等式でかかれることになる。数学史では、Euler や Lagrange にみる、多項式に基礎付けた考察を algebraic といい、Cauchy 以降の不等式を使った考察を Arithmetic という。

(2) 関数の連続性を極限概念を使って定義する (1821)。[81][102] その際、無限小と無限小の間の対応関係がでてくるが、これは ε - δ 不等式で表現できる (1821)。全著作を通じて、Cauchy は、多くの部分を無限小と無限小ないしは無限大と無限小の間の対応を表す言葉で記述しているが、必要と判断した場合は、 ε - δ 不等式で書き換えて考察している。[5 日め追加資料]

(3) 級数の収束・発散を極限の概念で定義する。級数

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (*)$$

が、 $|x| < 1$ ならば収束し、その和は $\frac{1}{1-x}$ となるが、そうでない場合は発散し、この無限級数は和を持たないとした (1821)。18 世紀まで、ある範囲でしか成り立たないと認識しつつ、割り算が正しいから $(*) = \frac{1}{1-x}$ としていたことからすれば、画期的な概念で、代数学の一般性から引き出された論拠に頼らないことが例示されている。[82]

(4) 導関数を極限の言葉で定義する。[83] また、定積分を区分求積法で定義する。[84-85] (1823)

1-2. Cauchy の限界

(1) 「各項が点 x 付近で連続関数である数列 $u_n(x)$ からなる無限級数とその点付近で収束すれば、その和は、その点付近で連続関数となる」としている。[86] 正しい定理にするには、収束を一樣連続にかえる必要がある。

(2) 一樣連続関数に対して定積分を定義する必要があるが、連続関数に対して定義している。また特異積分を考えるため、 $y = \frac{1}{x}$ の原点付近に注目しながら、そのことに気がついていない。

2. Cauchy の問題の克服から見えること

2-1. 問題点の克服

○ 1826 年、Niels Henrik Abel (1802-1829) が Fourier 級数からの反例を挙げる。[89]¹⁹ 近しい人々からも類似の反例が挙げられ、Cauchy は 1853 年に、先の定理を修正した。[90-92]

○ 1854 年、Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) が、積分論を講義するなかで、連続関数は閉区間では一樣連続になることに相当することを証明する。このとき、Dirichlet は関数 $y = \sin(x^2)$ を例に挙げて考察している。[93-B]

2-2. 厳密な数学の理論の構築に向けて [94]²⁰

○ 1840 年代に、何人かの数学者により、一樣収束する級数の性質に関する考察がなされた。一樣収束という術語を導入した Weierstrass もまた、Cauchy の定義や定理を受け入

¹⁹ この論文はクレレ誌に掲載された。[87-88] 当時の論文の分類にも注目。

²⁰ 一樣連続性と多変数関数の連続性については、時間の制約で触れられなかったが、[94] とあわせて [103-106] を参照のこと。

れている。Cauchy 自身、反例を知って、証明を修正している。Cauchy の ε - δ 不等式の使い方が未熟だったから、一様性にかかわる概念が把握できなかったとは考えがたい。

○ 1821 年の時点で、Cauchy が念頭においていたのはべき級数である。普通収束するべき級数は一様収束するから、Cauchy がこの両者を区別したとは考えがたい。反例に出会ったことが本質的である。

○ 1822 年に、Jean Baptiste Joseph Fourier(1768-1830) が発表した、*Théorie analytique de la chaleur* (『熱の解析的理論』) で展開された Fourier 級数の理論は、一様性にかかわる考察や関数概念を見直していく多くの材料を与えた。

○ 一様性を把握するための技法が Cauchy の時点でできていたとすると、微分学を全面的に ε - δ 不等式でかいたという、Weierstrass の仕事の意義は何か。

3. Weierstrass の講義録 *Differentialrechnung* (『微分算』) 位置づけ

3-1. Cauchy の成果の再確認

○ 「Cauchy が ε - δ 不等式で全面的に議論を展開していない」とは

(1) ε - δ 不等式ではなく、無限小の対応をつかった表現が大半を占めている。

(2) Cauchy の極限と無限小の定義は ε - δ 不等式で書くことができない。極限の定義は、幾何学的な描像を不等式で表現したものである。

3-2. *Differentialrechnung* (微分算) の内容

○ H.A.Schwarz によるタイプ原稿が残っている。一部を数学史家 Dugac が活字に起こす。

○ ε - δ 不等式で全面的に展開された微分算の基本概念は以下のようなものである。[95-98]

(1) 関数を対応で定義する。 ε - δ 不等式を使って、変数の無限小の変化が関数の無限小の変化に対応することを定義する。これによって、 ε - δ 不等式による連続関数の定義に達する。

(2) h が十分小さいとし、 $p(x)$ を h に関しては一定となる関数とすると

$$f(x+h) - f(x) = p \cdot h + o(h)h$$

となるとき $p(x)$ が Weierstrass の導関数の定義である。ここで、関数 $o(h)$ は、 h が 0 に近づくと、0 に近づく量で、 ε - δ 不等式で定義される。

(3) そのあとで「関数の極限」が ε - δ 不等式で定義されており、Cauchy の極限と異なる。この部分は公刊されていない。[100-101]

○ Weierstrass の成果

(1) 微積分学で必要とされるのは、Cauchy の無限小それ自体ではなく、無限小を含む対応関係で、これらは ε - δ 不等式で定義できる。Weierstrass はこのことに着目し、Cauchy の成果を整理した。

(2) 「無限小の対応」を ε - δ 不等式で「定義」している。この時点で幾何学的なイメージがまったく払しょくされた微積分学が完成した。

(3) 17 世紀から今日までを通して見ると、極限や無限小の意味が変化していることがわかる。[101]

3-3. 今日の定式化に向けて

○ Weierstrass は、今日あるような極限の定義を与えたが、それに基礎付けて、微積分学を展開していない。

○ そのようにかかれた最も初期の教科書が、1878 年に出版された Ulisse Dini (1845 - 1918) による *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* (『一変数実関数論の基礎』) である。この本では、微積分の議論に先立って実数の構成を論じているが、そこで

は基本列によって無理数を定義している。

エピローグ

今日の「代数解析学」と Euler

- 今日の代数学と解析学の性格を考えれば、佐藤幹夫氏の理論を「代数解析学」と名付けることは、自然である。しかし、Euler がやったとする「代数解析」とは全く異なるものである。
- 金子晃「佐藤超関数論の歴史」(数学セミナーリーディングス『現代数学のあゆみ3』、1990)によれば、この種の数学は当初、「コホモロジー解析」と呼ばれていたが、金子氏自身が思いついた「代数解析」という語を関係者が気に入って、1971年頃、その名称が受け入れられた。
- 佐藤氏は、1983年に、Euler の仕事が好きで、Euler の言葉を借用して「代数解析」と言っている。また、Euler の数学がいい、とさまざまな機会に発言している。
- 金子氏は、杉浦光夫氏から「Euler が代数解析という言葉を使っていた」と聞いた。そして、1969年に佐藤氏が「代数解析」という術語を使っている(「関数解析放談会」数理科学7-4, 1969)ことに気づき、佐藤氏は、尊敬する Euler に遠慮して、自分の理論を代数解析といわなかったと考えた。
- ところが、金子氏は思い違いに気付いた。杉浦氏は「Cauchy が使った」と言っていた。しかし、そうすると佐藤氏の思想の説明ができないから、Euler が使ったとして、金子氏は「佐藤超関数の歴史」をまとめた。
- 1941年の著書『微分積分学第1巻』で、藤原松三郎は、微積分の準備教程を「代数解析」と称している。すなわち、Cauchy 流の代数解析の理解が日本でもとられていた。佐藤氏は、微積分学の教科書の導入部で、Euler と「代数解析」を関連づけを知ったのかもしれない。