⑳

Cauchy による 極限・無限小の定義

(1821)

On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On désigne une semblable quantité par une lettre prise ordinairement parmi les dernières de l'alphabet. On appelle au contraire quantité *constante,* et l'on désigne ordinairement par une des premières lettres de l'alphabet toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En Géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus, etc.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit* ou une quantité *infiniment petite.* Une variable de cette espèce a zéro pour limite.

Cauchy による 連続関数の定義

(1821)

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence

$$f(x+\alpha)-f(x),$$

qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

décroît indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, *la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

(注) ひき続く教科書では イタリックの部分のみが 示されている。
(1823, 1829)

Cauchy による 収束・発散の定義

(1821)

CHAPITRE VI.

DES SÉRIES CONVERGENTES ET DIVERGENTES. RÈGLES SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES. SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES CONVERGENTES.

---

§ I. — *Considérations générales sur les séries.*

On appelle *série* une suite indéfinie de quantités

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différents termes de la série que l'on considère. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la *somme* de la série. Au contraire, si, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente* et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme qui correspond à l'indice n, savoir u_n, sera ce qu'on nomme le *terme général.* Il suffit que l'on donne ce terme général en fonction de l'indice n, pour que la série soit complètement déterminée.

L'une des séries les plus simples est la progression géométrique

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \ldots,$$

qui a pour terme général x^n, c'est-à-dire la puissance $n^{\text{ième}}$ de la quantité x. Si dans cette série on fait la somme des n premiers termes, on trouvera

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x};$$

et, comme pour des valeurs croissantes de n, la valeur numérique de la fraction $\frac{x^n}{1-x}$ converge vers la limite zéro, ou croît au delà de toute limite, suivant qu'on suppose la valeur numérique de x inférieure ou supérieure à l'unité, on doit conclure que, dans la première hypothèse, la progression

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \ldots$$

est une série convergente qui a pour somme $\frac{1}{1-x}$, tandis que, dans la seconde hypothèse, la même progression est une série divergente qui n'a plus de somme.

83 Cauchy による導関数の定義 (1823)

Lorsque la fonction $y=f(x)$ reste continue entre deux limites données de la variable x, et que l'on assigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Par conséquent, si l'on pose alors $\Delta x = i$, les deux termes du *rapport aux différences*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i} \tag{1}$$

seront des quantités infiniment petites. Mais, tandis que ces deux termes s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, le rapport lui-même pourra converger vers une autre limite, soit positive, soit négative. Cette limite, lorsqu'elle existe, a une valeur déterminée pour chaque valeur particulière de x; mais elle varie avec x. Ainsi, par exemple, si l'on prend $f(x)=x^m$, m désignant un nombre entier, le rapport entre les différences infiniment petites sera

$$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = m x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} i + \ldots + i^{m-1},$$

et il aura pour limite la quantité mx^{m-1}, c'est-à-dire une nouvelle fonction de la variable x. Il en sera de même en général; seulement la forme de la fonction nouvelle qui servira de limite au rapport $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dépendra de la forme de la fonction proposée $y=f(x)$. Pour indiquer cette dépendance, on donne à la nouvelle fonction le nom de *fonction dérivée*, et on la désigne, à l'aide d'un accent, par la notation

$$y' \quad \text{ou} \quad f'(x).$$

※ elle-même renfermée entre les limites $A-\varepsilon$, $B+\varepsilon$, et, comme cette conclusion subsiste quelque petit que soit le nombre ε, on peut affirmer que l'expression (4) sera comprise entre A et B.

Cauchy と ε-δ 論法 (1823)

THÉORÈME. — *Si, la fonction $f(x)$ étant continue entre les limites $x=x_0$, $x=X$, on désigne par A la plus petite, et par B la plus grande des valeurs que la fonction dérivée $f'(x)$ reçoit dans cet intervalle, le rapport aux différences finies*

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0} \tag{4}$$

sera nécessairement compris entre A *et* B.

Démonstration. — Désignons par δ, ε deux nombres très petits, le premier étant choisi de telle sorte que, pour des valeurs numériques de i inférieures à δ, et pour une valeur quelconque de x comprise entre les limites x_0, X, le rapport

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

reste toujours supérieur à $f'(x)-\varepsilon$ et inférieur à $f'(x)+\varepsilon$. Si, entre les limites x_0, X, on interpose $n-1$ valeurs nouvelles de la variable x, savoir

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1},$$

de manière à diviser la différence $X-x_0$ en éléments

$$x_1-x_0, \quad x_2-x_1, \quad \ldots, \quad X-x_{n-1},$$

qui, étant tous de même signe, aient des valeurs numériques inférieures à δ, les fractions

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}, \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{f(X)-f(x_{n-1})}{X-x_{n-1}}, \tag{5}$$

se trouvant comprises, la première entre les limites $f'(x_0)-\varepsilon$, $f'(x_0)+\varepsilon$, la seconde entre les limites $f'(x_1)-\varepsilon$, $f'(x_1)+\varepsilon$, ..., seront toutes supérieures à la quantité $A-\varepsilon$, et inférieures à la quantité $B+\varepsilon$. D'ailleurs, les fractions (5) ayant des dénominateurs de même signe, si l'on divise la somme de leurs numérateurs par la somme de leurs dénominateurs, on obtiendra une fraction *moyenne*, c'est-à-dire comprise entre la plus petite et la plus grande de celles que l'on considère (*voir* l'*Analyse algébrique*, Note II, théorème XII).

Cauchy による 定積分の定義 ①

(1823年)

Supposons que, la fonction $y=f(x)$ étant continue par rapport à la variable x entre deux limites finies $x=x_0$, $x=X$, on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de nouvelles valeurs de x interposées entre ces limites, et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde. On pourra se servir de ces valeurs pour diviser la différence $X-x_0$ en éléments

$$(1) \qquad x_1-x_0, \quad x_2-x_1, \quad x_3-x_2, \quad \ldots, \quad X-x_{n-1}$$

qui seront tous de même signe. Cela posé, concevons que l'on multiplie chaque élément par la valeur de $f(x)$ correspondante à l'*origine* de ce même élément, savoir l'élément x_1-x_0 par $f(x)$, l'élément x_2-x_1 par $f(x_1), \ldots$, enfin l'élément $X-x_{n-1}$ par $f(x_{n-1})$; et soit

$$(2) \qquad S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

la somme des produits ainsi obtenus. La quantité S dépendra évidemment : 1° du nombre n des éléments dans lesquels on aura divisé la différence $X-x_0$; 2° des valeurs mêmes de ces éléments et, par conséquent, du mode de division adopté. Or il importe de remarquer que, si les valeurs numériques des éléments deviennent très petites et le nombre n très considérable, le mode de division n'aura plus sur la valeur de S qu'une influence insensible. C'est, effectivement, ce que l'on peut démontrer comme il suit.

Si l'on supposait tous les éléments de la différence $X-x_0$ réduits à un seul qui serait cette différence elle-même, on aurait simplement

$$(3) \qquad S=(X-x_0)f(x_0).$$

Lorsque, au contraire, on prend les expressions (1) pour éléments de la différence $X-x_0$, la valeur de S, déterminée dans ce cas par l'équation (2), est égale à la somme des éléments multipliée par une moyenne entre les coefficients

$$f(x_0), \quad f(x_1), \quad f(x_2), \quad \ldots, \quad f(x_{n-1})$$

[*voir*, dans les préliminaires du *Cours d'Analyse*, le corollaire du théorème III (¹)]. D'ailleurs, ces coefficients étant des valeurs particulières de l'expression

$$f[x_0+\theta(X-x_0)]$$

qui correspondent à des valeurs de θ comprises entre zéro et l'unité, on prouvera, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage dans la septième Leçon, que la moyenne dont il s'agit est une autre valeur de la même expression, correspondante à une valeur de θ comprise entre les mêmes limites. On pourra donc à l'équation (2) substituer la suivante

$$(4) \qquad S=(X-x_0)f[x_0+\theta(X-x_0)],$$

dans laquelle θ sera un nombre inférieur à l'unité.

Pour passer du mode de division que nous venons de considérer à un autre dans lequel les valeurs numériques des éléments de $X-x_0$ soient encore plus petites, il suffira de partager chacune des expressions (1) en de nouveaux éléments. Alors on devra remplacer, dans le second membre de l'équation (2), le produit $(x_1-x_0)f(x_0)$ par une somme de produits semblables, à laquelle on pourra substituer une expression de la forme

$$(x_1-x_0)f[x_0+\theta_0(x_1-x_0)],$$

θ_0 étant un nombre inférieur à l'unité, attendu qu'il y aura entre cette somme et le produit $(x_1-x_0)f(x_0)$ une relation pareille à celle qui existe entre les valeurs de S fournies par les équations (4) et (3). Par la même raison, on devra substituer au produit $(x_2-x_1)f(x_1)$ une somme de termes qui pourra être présentée sous la forme

$$(x_2-x_1)f[x_1+\theta_1(x_2-x_1)],$$

θ_1 désignant encore un nombre inférieur à l'unité. En continuant de la sorte, on finira par conclure que, dans le nouveau mode de division, la valeur de S sera de la forme

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} S = &(x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] \\ &+ (x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \ldots \\ &+ (X - x_{n-1}) f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait dans cette dernière équation

$$f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] = f(x_0) \pm \varepsilon_0,$$
$$f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] = f(x_1) \pm \varepsilon_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})] = f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1},$$

on en tirera

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} S = &(x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2 - x_1)[f(x_1) \pm \varepsilon_1] + \ldots \\ &+ (X - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}], \end{aligned}\right.$$

puis, en développant les produits,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} S = &(x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \\ &\pm \varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1(x_2 - x_1) \pm \ldots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1}). \end{aligned}\right.$$

Ajoutons que, si les éléments $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $X - x_{n-1}$ ont des valeurs numériques très petites, chacune des quantités $\pm\varepsilon_0$, $\pm\varepsilon_1$, ..., $\pm\varepsilon_{n-1}$ différera très peu de zéro, et par suite il en sera de même de la somme

$$\pm\varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1(x_2 - x_1) \pm \ldots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1}),$$

qui est équivalente au produit de $X - x_0$ par une moyenne entre ces diverses quantités. Cela posé, il résulte des équations (2) et (7) comparées entre elles qu'on n'altérera pas sensiblement la valeur de S calculée pour un mode de division dans lequel les éléments de la différence $X - x_0$ ont des valeurs numériques très petites, si l'on passe à un second mode dans lequel chacun de ces éléments se trouve subdivisé en plusieurs autres.

Concevons à présent que l'on considère à la fois deux modes de division de la différence $X - x_0$, dans chacun desquels les éléments de cette différence aient de très petites valeurs numériques. On pourra comparer ces deux modes à un troisième tellement choisi que chaque élément, soit du premier, soit du second mode se trouve formé par la réunion de plusieurs éléments du troisième. Pour que cette condition soit remplie, il suffira que toutes les valeurs de x, interposées dans les deux premiers modes entre les limites x_0, X, soient employées dans le troisième, et l'on prouvera que l'on altère très peu la valeur de S en passant du premier ou du second mode au troisième, par conséquent en passant du premier au second. Donc, lorsque les éléments de la différence $X - x_0$ deviennent infiniment petits, le mode de division n'a plus sur la valeur de S qu'une influence insensible; et, si l'on fait décroître indéfiniment les valeurs numériques de ces éléments, en augmentant leur nombre, la valeur de S finira par être sensiblement constante ou, en d'autres termes, elle finira par atteindre une certaine limite qui dépendra uniquement de la forme de la fonction $f(x)$ et des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x. Cette limite est ce qu'on appelle une *intégrale définie*.

(中 略)

d'une somme de cette espèce. De plus, comme la valeur de l'intégrale définie que l'on considère dépend des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x, on est convenu de placer ces deux valeurs, la première au-dessous, la seconde au-dessus de la lettre $\int$, ou de les écrire à côté de l'intégrale, que l'on désigne en conséquence par l'une des notations

$$(10)\qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \quad \int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x_0 \\ X \end{bmatrix}, \quad \int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x = x_0 \\ x = X \end{bmatrix}.$$

La première de ces notations, imaginée par M. Fourier, est la plus simple. Dans le cas particulier où la fonction $f(x)$ est remplacée par

Cauchy の「誤った定理」

(1821)

La série

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

étant supposée convergente, si l'on désigne sa somme par s, et par s_n la somme de ses n premiers termes, on trouvera

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \ldots = s_n + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

et, par suite,

$$s - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots.$$

De cette dernière équation, il résulte que les quantités

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \ldots$$

formeront une nouvelle série convergente dont la somme sera équivalente à $s - s_n$. Si l'on représente cette même somme par r_n, on aura

$$s = s_n + r_n;$$

et r_n sera ce qu'on appelle le *reste* de la série (1) à partir du $n^{\text{ième}}$ terme.

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable x, cette série est convergente, et ses différents termes fonctions continues de x, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable,

$$s_n, \quad r_n \quad \text{et} \quad s$$

sont encore trois fonctions de la variable x, dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n, si l'on attribue à n une valeur très considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante :

Théorème I. — *Lorsque les différents termes de la série* (1) *sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.*

En vertu de ce théorème, la somme de la série (2) devra rester fonction continue de la variable x, entre les limites $x = -1$, $x = 1$; ce qu'on peut vérifier à l'inspection de la valeur de s donnée par l'équation

$$s = \frac{1}{1-x}.$$

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle

Inhaltsverzeichnifs

des ersten Bandes, nach den Gegenständen.

(1826 ?)

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

(87)

ちょっと一言：この雑誌は創刊者の名まえをとってクレレ誌と呼ばれることが多い。後継者は Borchardt なので（後には）彼の名で呼ばれたり、ひき続きクレレ誌といわれたりする。

2. Geometrie.

3. Mechanik.

II. Angewandte Mathematik.

Abel による Cauchy の定理の反例 (1826)

Hieraus folgt, daſs man m groſs genug nehmen kann, daſs $\psi(x) = \omega$, und also ebenso

$$f(x) = \varphi(x) + \omega,$$

wo ω kleiner ist, als jede angebbare Gröſse.

Es ist eben so

$$f(x - \beta) = \varphi(x - \beta) + \omega,$$

also

$$f(x) - f(x - \beta) = \varphi(x) - \varphi(x - \beta) + \omega.$$

Dem Ausdrück von $\varphi(x)$ zufolge ist aber klar, daſs man β klein genug annehmen kann, daſs

$$\varphi(x) - \varphi(x - \beta) = \omega, \text{ und}$$

also ebenso

$$f(x) - f(x - \beta) = \omega.$$

Also ist die Funktion $f(x)$ stetig *).

Lehrsatz VI. Bezeichnet man durch $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2$ u. s. w., $\varrho_0^1, \varrho_1^1, \varrho_2^1$ u. s. w. die Zahlenwerthe der resp. Glieder zweier convergenten Reihen

$$v^0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots = p \text{ und}$$
$$v_0^1 + v_1^1 + v_2^1 + \ldots\ldots = p^1,$$

so sind die Reihen

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \ldots\ldots \text{ und}$$
$$\varrho_0^1 + \varrho_1^1 + \varrho_2^1 + \ldots\ldots$$

ebenfalls noch convergent, und auch die Reihe

$$r_0 + r_1 + r_2 + \ldots\ldots + r_m,$$

deren allgemeines Glied

$$r_m = v_0 v_m^1 + v_1 v_{m-1}^1 + v_2 v_{m-2}^1 + \ldots\ldots v_m v_0^1,$$

und deren Summe

---

*) **Anmerkung.** In der oben angeführten Schrift des Herrn *Cauchy* (Seite 131) findet man folgenden Lehrsatz:

„Wenn die verschiedenen Glieder der Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots \text{ u. s. w.}$$

„Functionen einer und derselben veränderlichen Gröſse sind, und zwar stetige Functionen, „in Beziehung auf diese Veränderliche, in der Nähe eines besonderen Werthes, für welchen „die Reihe convergirt, so ist auch die Summe s der Reihe, in der Nähe jenes besonderen „Werthes, eine stetige Function von x."

Es scheint mir aber, daſs dieser Lehrsatz Ausnahmen leidet. So ist z. B. die Reihe

$$\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\sin 3\varphi - \ldots\ldots \text{ u. s. w.}$$

unstetig für jeden Werth $(2m + 1)\pi$ von x, wo m eine ganze Zahl ist. Bekanntlich giebt es eine Menge von Reihen mit ähnlichen Eigenschaften.

1821年の「誤った定理」に対する Cauchy の修正
(1853年)

Analyse mathématique. — *Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données.*

C. R., T. XXXVI, p. 454 (14 mars 1853).

En établissant, dans mon *Analyse algébrique*, les règles générales relatives à la convergence des séries, j'ai, de plus, énoncé le théorème suivant :

Lorsque les différents termes de la série

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad u_{n+1}, \quad \ldots \tag{1}$$

sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable, dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.

Comme l'ont remarqué MM. Bouquet et Briot, ce théorème se vérifie pour les séries ordonnées suivant les puissances ascendantes d'une variable. Mais, pour d'autres séries, il ne saurait être admis sans restriction. Ainsi, par exemple, il est bien vrai que la série

$$\sin x, \quad \frac{\sin 2x}{2}, \quad \frac{\sin 3x}{3}, \quad \ldots, \tag{2}$$

toujours convergente pour des valeurs réelles de x, a pour somme une fonction de x qui reste continue, tandis que x, supposée réelle, varie, dans le voisinage d'une valeur distincte d'un multiple $\pm 2n\pi$ de la circonférence 2π, et qui se réduit, en particulier, à $\frac{\pi - x}{2}$, entre les limites $x = 0$, $x = 2\pi$. Mais, à ces limites mêmes, la somme s de la série (2) devient discontinue, et cette somme, considérée comme fonction de la variable réelle x, acquiert, à la place de la valeur

$$+\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad -\frac{\pi}{2},$$

donnée par la formule

$$s = \frac{\pi - x}{2},$$

la valeur *singulière* $s = 0$, qui reparaît encore quand on suppose

$$x = \pm 2n\pi,$$

n étant un nombre entier quelconque.

Au reste, il est facile de voir comment on doit modifier l'énoncé du théorème, pour qu'il n'y ait plus lieu à aucune exception. C'est ce que je vais expliquer en peu de mots.

D'après la définition proposée dans mon *Analyse algébrique*, et généralement adoptée aujourd'hui, une fonction u de la variable réelle x sera *continue* entre deux limites données de x, si, cette fonction admettant pour chaque valeur intermédiaire de x une valeur unique et finie, un accroissement infiniment petit attribué à la variable produit toujours, entre les limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Cela posé, concevons que la série (1) reste convergente, et que ses divers termes soient fonctions continues d'une variable réelle x, pour toutes les valeurs de x renfermées entre certaines limites. Soient alors

s la somme de la série;

s_n la somme de ses n premiers termes;

$r_n = s - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots$ le reste de la série indéfiniment prolongée à partir du terme général u_n.

Si l'on nomme n' un nombre entier supérieur à n, le reste r_n ne sera autre chose que la limite vers laquelle convergera, pour des valeurs croissantes de n', la différence

$$s_{n'} - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n'-1}. \tag{3}$$

Concevons, maintenant, qu'en attribuant à n une valeur suffisamment grande on puisse rendre, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites données, le module de l'expression (3) (quel que soit n'), et, par suite, le module de r_n, inférieurs à un nombre ε aussi petit que l'on voudra. Comme un accroissement attribué à x pourra encore être supposé assez rapproché de zéro pour que l'accroissement correspondant de s_n offre un module inférieur à un nombre aussi petit que l'on voudra, il est clair qu'il suffira d'attribuer au nombre n une valeur infiniment grande, et à l'accroissement de x une valeur infiniment petite, pour démontrer, entre les limites données, la continuité de la fonction

$$s = s_n + r_n.$$

Mais cette démonstration suppose évidemment que l'expression (3) remplit la condition ci-dessus énoncée, c'est-à-dire que cette expression devient infiniment petite pour une valeur infiniment grande attribuée au nombre entier n. D'ailleurs, si cette condition est remplie, la série (1) sera évidemment convergente. En conséquence, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Si les différents termes de la série*

$$(1) \qquad u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad u_{n+1}, \quad \ldots$$

sont des fonctions de la variable réelle x, continues, par rapport à cette variable, entre des limites données; si, d'ailleurs, la somme

$$(3) \qquad u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n'-1}$$

devient toujours infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes des nombres entiers n et $n' > n$, la série (1) sera convergente, et la somme s de la série (1) sera, entre les limites données, fonction continue de la variable x.

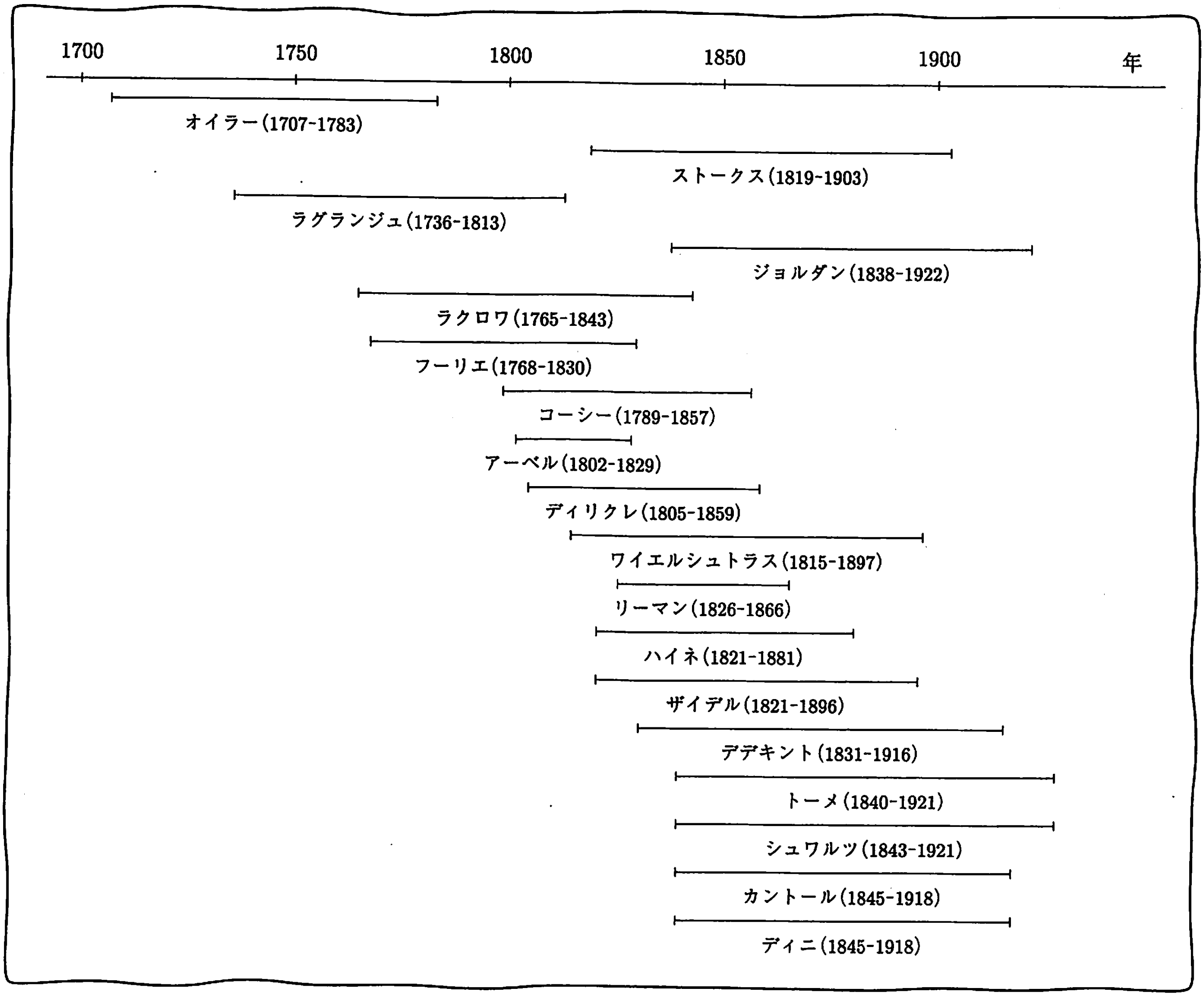
Si à la série (1) on substitue la série (2), l'expression (3), réduite à la somme

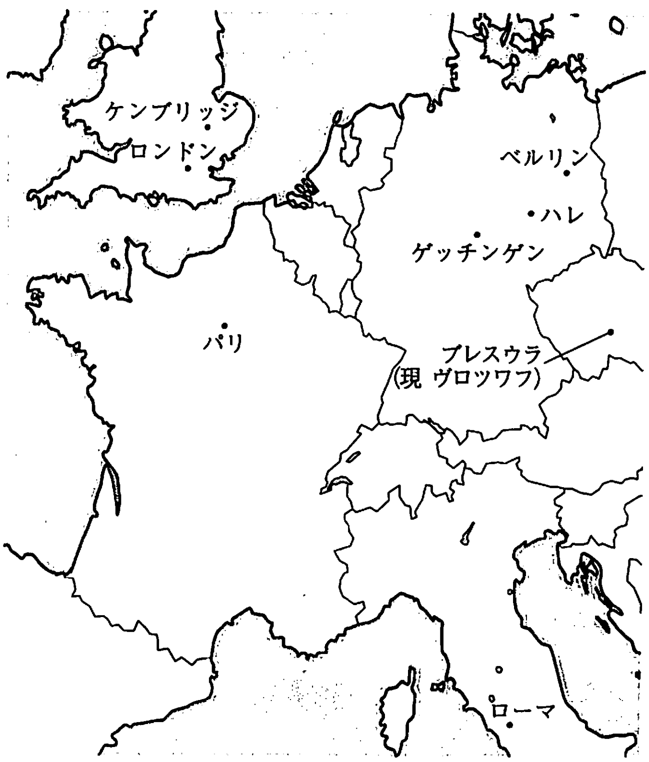
$$(4) \qquad \frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n+2)x}{n+2} + \ldots + \frac{\sin n'x}{n'},$$

s'évanouira pour $x = 0$; mais, pour des valeurs de x très voisines de zéro, par exemple pour $x = \frac{1}{n}$, n étant un très grand nombre, elle pourra différer notablement de zéro; et si, en attribuant à n une très grande valeur, on pose non seulement $x = \frac{1}{n}$, mais encore $n' = \infty$, la somme (4), ou, ce qui revient au même, le reste r_n de la série (2) se réduira sensiblement à l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{1.2.3}\frac{1}{3} - \frac{1}{1.2.3.4.5}\frac{1}{5} + \ldots = 0{,}6244\ldots.$$

Ajoutons que, pour une valeur de x positive, mais très voisine de


1700
1750
1800
1850
1900
年
オイラー(1707-1783)
ストークス(1819-1903)
ラグランジュ(1736-1813)
ジョルダン(1838-1922)
ラクロワ(1765-1843)
フーリエ(1768-1830)
コーシー(1789-1857)
アーベル(1802-1829)
ディリクレ(1805-1859)
ワイエルシュトラス(1815-1897)
リーマン(1826-1866)
ハイネ(1821-1881)
ザイデル(1821-1896)
デデキント(1831-1916)
トーメ(1840-1921)
シュワルツ(1843-1921)
カントール(1845-1918)
ディニ(1845-1918)


ケンブリッジ
ロンドン
ベルリン
ハレ
ゲッチンゲン
パリ
ブレスウラ
(現 ヴロツワフ)
ローマ

Dirichet (1854年講義) に見る 連続関数の基本性質

連続関数の定義

Erster Abschnitt.

Begriff und Grundeigenschaften der bestimmten einfachen Integrale.

Stetige, eindeutige Funktionen.

1. Definition. — Die Definition eines bestimmten Integrals stützt sich auf den für die ganze Analysis grundlegenden Begriff der Stetigkeit und Eindeutigkeit einer Funktion.

$y = f(x)$ wird eine stetige und eindeutige oder einwertige Funktion von x genannt, wenn zu jedem Werte von x nur ein Wert von y gehört, und wenn einer allmählichen Veränderung von x auch eine allmähliche Veränderung von y entspricht, d. h. wenn für ein festes x die Differenz

$$f(x+h) - f(x)$$

mit beständig abnehmendem h gegen Null konvergiert.

連続関数の基本性質

2. Fundamentaleigenschaft der stetigen Funktionen. — „Es sei $y = f(x)$ eine in dem endlichen Intervall von a bis b stetige Funktion von x, und unter Teilintervall verstehe man die Differenz jeder zweier beliebigen Werte von x, also jedes beliebige Stück der Abscissenachse zwischen a und b. Dann besteht immer die Möglichkeit, zu einer beliebig klein gewählten absoluten Gröſse ϱ eine zweite ihr proportionale kleine Gröſse σ von solcher Beschaffenheit zu finden, daſs in jedem Teilintervall, welches $\leqq \sigma$ ist, die Funktion y sich um nicht mehr als höchstens ϱ ändert.“

$y = f(x)$ を a から b までの有限の区間で x について連続な関数とする．この範囲の x の任意の二つの値の差，すなわち a と b の間の横軸の任意の部分を考えよう．そこでは，常に次のような可能性がある．十分小さく選ばれた ρ の絶対値に対して，それに依存して小さな σ があり，任意の範囲で (横軸での) 幅が σ 以下であったとき，関数 y は高々 ρ しか変化しないような σ が見出せる．

一様収束と一様連続の概念形成にかかわるおもな出来事			
1821年	Cauchy	Cours d'analyse [in Œuvres (2), 3]	収束する連続関数列の無限和は連続関数＝「誤った定理」
1822年	Fourier	*Théorie analytique de la chaleur* [in Œuvres de Fourier, 1]	Fourier 級数の提示
1826年	Abel	"Untersuchung über die Reihe…" in *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1, 311-339.	Cauchy の「誤った定理」の反例を指摘 以下、この雑誌名を*Jour. für Math.*と記す。
1829年	Dirichlet	"Sur la convergence des séries trigonométriques" in *Jour. für Math.* 4, 157-169.	ディリクレ関数の提示
1841年	Weierstrass	"Darstellung einer analytischen Function einer complexen Veränderlichen, deren absoluter Betrag zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt" in *Werke*, 1. 51-56.	多変数複素関数の収束性の考察において、「一様に収束」という表現を導入（ただし定義せず）・
1847年	Stokes	"On the critical value of the sums of periodic series" in *Transaction of the Cambridge Philosophical Society*, 8, .533-583.	極限の順序交換と「収束が限りなくゆっくりになる場合」（＝一様収束）の考察
1847年	Seidel	"Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Funktionen darstellen" in *Abhandlungen der bayerischen Akademie der Wissenschaften* 5, 381-394.	収束する連続関数列の無限和に関する考察・「任意にゆっくり収束しない」(=一様収束) *Ostwald's Klassiker*, 116, 35-45 (Leipzig 1900)に再録
1853年	Cauchy	"Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données" in *Comptes rendus*, 36, 454-459.	「誤った定理」のCauchy 自身による修正
1858年	Dirichlet	*Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen* (1904年出版)	「連続関数の基本性質」として「閉区間上の連続関数は一様連続」であることを証明・2変数関数の連続性の定義を明示
1861年	Weierstrass	*Differetialrechnung* ベルリンでの講義録・Schwarz がタイプ	$\varepsilon-\delta$ 不等式によって、一貫した微分学を展開・一様収束の定義
1869年	Heine	"Über trigonometrische Reihen" in *Jour. für Math.* 71, 353-365.	2変数関数について、一様連続性を定義
1870年	Tomae	*Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Varänderlichen*	非一様連続性の考察
1872年	Schwarz	"Zur Integration der partiallen Differentailgleichung…" in *Jour. für Math*. 74, 218-233.	2変数関数の連続について、従来の定義への疑問
1872年	Heine	"Die Elemente der Funktionenlehre" in *Jour. für Math.* 74,172-188.	一変数関数の一様連続性の定義

P. Dugac "Eléments d'analyse de Karl Weierstrass" x')

(1)

Differentialrechnung

Vorgetragen von Herrn Professor *Weierstrass*

(H. A. Schwarz)

Differentialrechnung

Im Gegensatz zu einer unveränderlichen Größe oder Constante, welche nur einen Wert annehmen kann, heißt eine veränderliche *Größe* solche, welche nicht bloß mehrere einzelne, sondern unendlich viele Werte annehmen kann. Es kann vorkommen, daß eine veränderliche Größe jeden möglichen positiven und negativen Wert annehmen kann, dann heißt sie eine *unbeschränkt* veränderliche Größe. Eine veränderliche Größe kann auch beschränkt veränderlich sein und eine untere oder obere Grenze, oder beide zugleich haben. Die Werte, welche eine veränderliche Größe annehmen kann, können einer oder mehreren *stetigen* Folgen angehören, wenn die veränderliche Größe alle möglichen Werte zwischen zwei Grenzen annehmen kann. Die Differentialrechnung beschäftigt sich nur mit solchen stetig veränderlichen Größen.

Zwei veränderliche Größen können in einem solchen Zusammenhang stehen, daß zu jedem bestimmten Werte der einen ein bestimmter Wert der andern gehört, so heißt die letztere eine *Funktion* der ersteren. Es kann sich diese Beziehung auf mehrere veränderliche Größen ausdehnen; hiernach unterscheidet man Funktionen mit einer, mit mehreren veränderlichen Größen. Gehört zu einem Werte der einen veränderlichen Größe stets nur ein Wert einer andern, so heißt die letztere eine eindeutige Funktion und einwertige Funktion der ersten. Gehören zu einem Werte der einen Größe mehrere Werte einer andern, so heißt die letztere eine mehrdeutige Funktion der ersteren. — Das Kriterium einer

(2)

Funktion ist, daß die eine veränderliche Größe sich im Allgemeinen um ein bestimmtes verändert, sobald eine bestimmte Aenderung der andern angenommen ist. —

. . .

Ist $f(x)$ eine Funktion von x und x ein bestimmter Wert, so wird sich die Funktion, wenn x in $x+h$ übergeht, in $f(x+h)$ ändern; die Differenz $f(x+h) - f(x)$ nennt man die Veränderung, welche die Funktion dadurch erfährt, daß das Argument von x in $x+h$ übergeht. Ist es nun möglich, für h eine Grenze δ zu bestimmen, sodaß für *alle* Werte von h, welche ihrem absoluten Betrage noch kleiner als δ sind, $f(x+h)-f(x)$ kleiner werde als irgendeine noch so kleine Größe ε, so sagt man, es entsprechen unendlich kleine Aenderungen des Arguments unendlich kleinen Aenderungen der Funktion. Denn man sagt, wenn der absolute Betrag einer Größe kleiner werden kann als irgendeine beliebig angenommene noch so kleine Größe, sie kann unendlich klein werden. Wenn nun

(3)

eine Funktion so beschaffen ist, daß unendlich kleinen Aenderungen des Arguments unendlich kleine Aenderungen der Funktion entsprechen, so sagt man, daß

95

dieselbe eine *continuierliche Funktion* sei vom Argument, oder daß sie sich stetig mit diesem Argument ändere.

...

Lehrsatz. Wenn eine continuierliche Funktion von x für einen bestimmten Wert x_1 des Argumentes einen bestimmten Wert der Funktion y_1, und für einen andern bestimmten Wert x_2 einen bestimmten Wert der Funktion y_2 hat und ist y_3 ein beliebiger Wert zwischen y_1 und y_2, so muß zwischen x_1 und x_2 wenigstens ein solcher Wert x_3 liegen, für welchen die Funktion y_3 annimmt.

Zum Beweise dienen folgende Hülfssätze.

Ist $y=f(x)$ eine continuierliche Funktion von x und $y_0=f(x_0)$ nicht Null, so werden die Werte $f(x)$ der Funktion, für alle Werte von x, welche in der Nachbarschaft von x_0 liegen, d.h. für welche die Differenz $x-x_0$ ihrem absoluten Betrage nach eine bestimmte Grenze nicht überschreitet, dasselbe Vorzeichen haben als $f(x_0)$.

...

(4)

...

Die Werte, welche eine continuierliche Funktion annimmt oder annehmen kann gehören auch einer stetigen Folge an; daher rechtfertigt sich ihre Benennung.

(5)

Grundbegriffe der Differentialrechnung

Die vollständige Veränderung $f(x+h)-f(x)$, welche eine Funktion $f(x)$ dadurch erfährt, daß x in $x+h$ übergeht, läßt sich im allgemeinen in zwei Teile zerlegen, von denen der eine der Aenderung h des Argumentes proportional ist, also aus h und einem von h unabhängigen — in Bezug auf h constanten — Faktor besteht, also unendlich klein wird, wenn h unendlich klein wird, oder gleichzeitig mit h unendlich klein wird, der andere aber nicht bloß an und für sich unendlich klein wird, wenn h unendlich klein wird, d.h. noch unendlich klein wird, wenn man ihn mit h dividiert.

Bezeichnet h eine Größe, welche unendlich kleine Werte annehmen kann, und ist $\varphi(h)$ eine beliebige Funktion von h von der Eigenschaft, daß sie für unendlich kleine Werte von h ebenfalls unendlich klein wird (d.h. daß sich stets sobald eine bestimmte noch so kleine Größe ε angenommen ist, eine Größe δ bestimmen läßt, sodaß für alle Werte von h, deren absoluter Betrag kleiner als δ ist, $\varphi(h)$ kleiner als ε wird) — so kann es vorkommen, daß auch noch $\frac{\varphi(h)}{h}$ eine Funktion von h ist, welche für unendlich kleine Werte von h selbst unendlich klein wird; in diesem Falle sagt man $\varphi(h)$ wird für unendlich kleine Werte von h im Verhältnis zu h unendlich klein. Der erste der Veränderung des Argumentes proportionale Teil der ganzen Veränderung der Funktion heißt *Differentialänderung* oder *Differential* und wird durch ein der Funktion vorgesetztes karakteristisches d bezeichnet, während ein vorgesetztes Δ die ganze Veränderung bedeutet. Dem analog schreibt man auch für h, da von x die einfachste Funktion x selbst ist, dx, eine von x ganz unabhängige Größe, welche unendlich klein werden kann. — Je kleiner dx

(96)

oder h genommen wird, umso weniger wird die Differentialänderung von der ganzen Veränderung abweichen, der Unterschied kann durch Verkleinerung von dx kleiner gemacht werden als je-

(6)

de noch so kleine Größe; man hat daher das Differential als die Veränderung erklärt, welche eine Funktion erleidet, wenn sich ihr Argument um eine unendlich kleine Größe ändert.

Das Differential einer Funktion hat also im allgemeinen die Gestalt $df(x) = p \cdot dx$; der Faktor p, mit welchem das Differential des Argumentes multipliciert werden muß, damit das Differential der Funktion entsteht, heißt *Differentialcoefficient* oder Differentialquotient. Er ist im allgemeinen wieder eine Funktion von x und da er auf eine bestimmte Weise von $f(x)$ abgeleitet ist, so heißt er die *Ableitung* der Funktion und wird geschrieben $f'(x)$. Diese Funktion ist also vollständig und unabhängig von der Veränderung des Argumentes.

Lehrsatz. Hat eine Funktion für einen bestimmten Wert x des Arguments einen Differentialquotienten, so kann es für die Funktion und denselben Wert von x keinen zweiten von diesem verschiedenen geben.

Es sei gelungen, $f(x+h)-f(x)$ in der angegebenen Weise zu zerlegen $=ph+h(h)$, worin (h), eine mit h unendlich klein werdende Größe bezeichnet; es ist zu zeigen, daß diese Zerlegung die einzig mögliche ist.

. . .

Dividiert man das Differential einer Funktion durch das Differential des Argumentes, so erhält man den Differentialcoefficienten; er heißt aus diesem Grunde auch Differentialquotient:

$$\frac{df(x)}{dx} = p = f'(x).$$

. . .

(7)

. . .

Hülfssätze zur Bestimmung der Differentiale

1.

Sind $f_1(h)$ und $f_2(h)$ zwei Funktionen, welche gleichzeitig mit ihrem Argument h unendlich klein werden, so ist auch ihre Summe $f_1(h) + f_2(h)$ eine solche Funktion.

Es sei ε eine beliebige noch so kleine Größe; man zerlege es in zwei Teile $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ und bestimme δ so, daß für alle Werte von h, welche ihrem absoluten Betrage nach δ nicht überschreiten, sowohl $f_1(h) < \varepsilon_1$ als auch $f_2(h) < \varepsilon_2$ ist, dann ist $f_1(h) + f_2(h) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Derselbe Satz gilt auch bei der Addition mehrerer solcher Funktionen, welche mit h gleichzeitig unendlich klein werden. —

(35)

. . .

Es gibt nun aber auch Größen, die sich durch die Einheit und Teile der Einheit nicht ausdrücken lassen; bei ihnen wendet man die Form der unendlichen Reihe an. Wenn irgend eine Größe in Form einer unendlichen Reihe ausgedrückt wird, so ist der Sinn der, daß die Summe der n ersten Glieder dem Werte der Größe

Weierstrass 1861 年講義

P.Dugac, "Eléments d'analyse de Karl Weierstrass", *Archives for History of Exact Sciences* **10**,1973, pp.41-176 に一部が所収されている。

- 2つの変化する大きさがあり，一方の大きさの定まった値に対し，他方の大きさの定まった値が対応するように，それら2つの数量を対応づけるとき，後者は前者の関数という.

- δ の絶対値より小さいすべての h について $f(x+h)-f(x)$ が任意の量 ε がどんなに小さくても，それより小さくなるように，ある限界 δ を h について定めることができるならば，変数の無限小の変化は関数の無限小の変化に対応するという.

- もし変数の無限小の変化に対して，関数の無限小の変化が対応するような関数であれば，それを変数に関する連続関数，あるいは，その関数は変数について連続的に変化するという.

- x が $x+h$ へと移ったときに，ある関数 $f(x)$ が受ける全体としての変化 $f(x+h)-f(x)$ は，一般にはふたつの部分に分解される．ひとつは変数の変化 h に比例する部分である．そして，その部分は h と h に独立な部分 $\cdots$ h に関して定数 $\cdots$ からなり，それゆえ h が限りなく小さくなると，その部分も限りなく小さくなる．しかし，もうひとつの部分は，単に，h が限りなく小さくなるとき限りなく小さくなる，というだけではない．その部分を h で割ると，それもまた限りなく小さくなる.

- h を限りなく小さい値をとりうる大きさ，$\varphi(h)$ を h の任意関数で，h が限りなく小さくなったとき，この関数もまた，限りなく小さくなる性質を持つ (すなわち，任意に小さい ε を選ぶと，δ の絶対値より小さいすべての h に対し，$\varphi(h)$ が ε よりも小さくなるような δ を定めることができる）とすると，$\dfrac{\varphi(h)}{h}$ もまた h の関数であり，h の限りなく小さな値に対して，それ自身も限りなく小さくなりうる．この場合，$\varphi(h)$ は，h が限りなく小さな値をとるときに，h に対して相対的に無限に小さくなる.

- 関数全体の変化の，変数の変化に比例する最初の部分は微分変化あるいは微分と呼ばれ，関数の前に記号 d をつけて表す．また，Δ は全体の変化を表している．同様にして $[y=]x$ は x の単純な関数それ自体であるから，dx は x とはまったく独立な大きさで，限りなく小さくなりうるから，h のことを dx と書こう．dx すなわち h がより小さくとられれば，微分変化と全体の変化との差もより小さくなる．つまり dx の減少によって，それぞれの大きさがどのくらい小さくても，差はそれより小さく取れる．それゆえ，独立変数の無限小の変化によって関数が変化したときに関数が受ける変化として，微分が明らかにされた．関数の微分は一般に形式 $df(x)=p\cdot dx$ で書ける．係数 p は**微分係数**あるいは微分商と呼ばれ，関数の微分を得るには変数の微分 $[dx]$ をこの係数倍しなくてはならない．これ $[p]$ は一般には x の関数で，$f(x)$ から所定の方法で導かれるため，関数の**導関数**と呼び，$f'(x)$ とかく．したがって，この関数は，変数の変化とは完全に独立である.

Schwarz 1283 タイプ原稿
ベルリン・フンボルト大学 蔵

h ist, welche für unendlich kleine Werte von h nicht unendlich gross wird, ist ebenfalls eine solche gleichzeitig mit h unendlich klein werdende Funktion. Von F(h) ist angenommen, dass ihr absoluter Wert für alle Werte von h, welche eine gewisse Grenze nicht überschreiten, auch eine solche angebbare Grenze nicht überschreite. Es sei g für alle Werte von h, die kleiner sind als δ und f(h) kleiner als g (dem absoluten Betrage nach), so ist der absolute Betrag von F(h).f(h) kleiner als g.f(h); dieses Product wird aber für unendlich kleine Werte von h unendlich klein, also auch F(h).f(h). – Sind $F_1(h)$, $F_2(h)$, $F_3(h)$... Funktionen von h, welche für unendlich kleine Werte von h nicht unendlich gross werden, und $f_1(h)$, $f_2(h)$, $f_3(h)$... Funktionen von h, welche gleichzeitig mit h unendlich klein werden, so ist auch die Summe $F_1(h).f_1(h)+F_2(h).f_2(h)+F_3(h).f_3(h)$..., wenn die Anzahl der Summanden eine endliche ist, eine mit h gleichzeitig unendlich klein werdende Grösse. –

4.

Sind $f_1(h)$ und $f_2(h)$ Funktionen von h, welche für unendlich kleine Werte von h unendlich klein werden und ist A eine von h unabhängige Grösse, die nicht Null ist, so ist auch der Quotient $\frac{f_1(h)}{A+f_2(h)}$ eine für unendlich kleine Werte von h unendlich klein werdende Funktion.

Es sei zunächst A=1, ε_2 eine beliebige Grösse, die kleiner als 1 ist; man kann für h eine Grenze δ angeben, so dass nun für alle Werte von h, die absolut kleiner als δ sind, $f_2(h)$ dem absoluten Betrage nach kleiner als ε_2 ist; so liegt dann der Wert des Nenners zwischen den Grössen $1+\varepsilon_2$ und $1-\varepsilon_2$; der absolute Betrag des Quotienten $\frac{f_1(h)}{1+f_2(h)}$ liegt dann zwischen den Grenzen $\frac{f_1(h)}{1+\varepsilon_2}$ und $\frac{f_1(h)}{1-\varepsilon_2}$ und ist nicht grösser als $\frac{f_1(h)}{1-\varepsilon_2}$. Dieser Ausdruck kann nun durch Verkleinerung von h so klein gemacht werden als man will, wenn man setzt $\frac{f_1(h)}{1-\varepsilon_2} < \varepsilon$, wo ε eine beliebig angenommene kleine Grösse bedeutet, und man hat nur für h eine solh verschwinden ist, so erklärt man den Differentialquotienten häufig als die Grenze, der sich das Verhältnis der Veränderung der Funktion zur Änderung des Argumentes nähert, wenn letztere unendlich klein wird. – Ist dabei $\varphi(h)$ die Funktion eines Zuwachses h, die unendlich klein werden kann, so [illegible] sich $\varphi(h)$ für unendlich kleine Werte von h der Grenze [illegible], wenn die Differenz $\varphi(h) - a$ durch Verkleinerung von h kleiner als jede noch so kleine Größe gemacht werden kann.

Hilfssätze zur Bestimmung des Differentials.

1.

Sind $f_1(h)$ und $f_2(h)$ zwei Funktionen, welche gleichzeitig mit ihrem Argument h unendlich klein werden, so ist auch ihre Summe $f_1(h)+f_2(h)$ eine solche Funktion.

Es sei ε eine beliebige noch so kleine Größe, man zerlege ε in zwei Teile $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ und bestimme δ so, daß für alle Werte von h, welche ihrem absoluten Betrage nach δ nicht überschreiten, sowohl $f_1(h) < \varepsilon_1$ als auch $f_2(h) < \varepsilon_2$ ist, dann ist $f_1(h)+f_2(h) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon$. Dasselbe gilt auch bei der Addition mehrerer solcher Funktionen, welche mit h gleichzeitig unendlich klein werden. –

2.

Ist f(h) eine Funktion, welche gleichzeitig mit h unendlich klein wird und bedeutet α eine in Bezug auf h konstante Größe, so wird $\alpha \cdot f(h)$ gleichzeitig mit h unendlich klein. Der absolute Betrag von α sei α, der von $f(h)$ β, so muß $\alpha\beta$ kleiner werden können als irgendeine noch so kleine Größe ε; von dieser [illegible] man δ als Grenze für h, so daß $\beta = f(h) < \frac{\varepsilon}{\alpha}$ wird. –

3.

Das Produkt $\alpha(h) \cdot f(h)$, in welchem $f(h)$ eine mit h unendlich klein werdende Funktion von h ist und in welchem $\alpha(h)$ irgendeine Funktion von

- 今，$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=p+(h)$ は h の無限に小さい値に対しても，p とは異なるので，しばしば上でのべた微分商は，変数の変化が限りなく小さくなったときに，変数の変化に対する関数の変化の割合が近づく極限と説明される．$\varphi(h)$ を h の関数とすると，それは限りなく小さくなりうるが，h の十分小さい値に対して，$\varphi(h)$ が**極限** a に近づくとは，h が小さくなるにつれて，差 $|\varphi(h)-a|$ がどのような小さな大きさよりも小さくできることである（Schwarz のタイプ原稿，pp.6-7.）．

	極　限	無限小
18 世紀 Euler, d' Alembert ら	一つの量・大きさに対する極限を目に浮かぶように定義	限りなく小さい量（ただし変化する量ではない）
Cauchy	一つの量・大きさに対する極限を、不等式の言葉で記述して定義とする。	ゼロを極限とする変化する量
Weierstrass	関数の極限を ε－δ 論法で定義（数列も同様）	定義の必要なし
今日	関数・数列の極限を ε－δ 論法で定義	ε－δ 論法で規定された条件をみたす関数