1800

55—63 フレンチ=インディアン戦争
75—83 独立戦争
60— ジョージ3世
74—92 ルイ16世
—86
—80
65—90 ヨーゼフ2世
62—97 エカチェリーナ2世
七年戦争

56 七年戦争(～63)
63 パリ条約(英仏)
63 フベルトゥスブルク条約
72 第1回ポーランド分割
73 ロシア、プガチョフの反乱(～75)
74 キュチュク=カイナルジャ条約
76 アメリカ、独立宣言
87 寛政の改革
89 フランス革命おこる
92 ラクスマン、根室来航
93 第2回ポーランド分割
95 第3回ポーランド分割

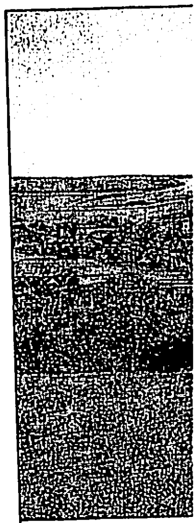
墺 ✕ バ 普 ザ ・ 仏 西
〈オーストリア継承戦争〉(1740～48)
主戦場：シュレジエン，バイエルン，ベーメン，南ネーデルラント，イタリア

英 普 ✕ 墺 露 仏 ス
〈七年戦争〉(1756～63)
主戦場：ベーメン，ザクセン，シュレジエン，プロイセン

①18世紀なかばの主要国の人口

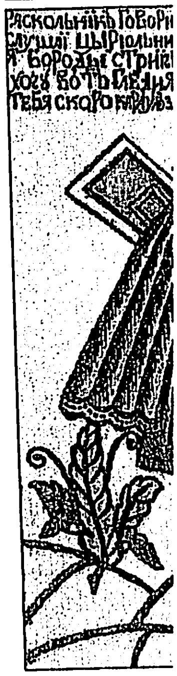
国	人口(万人)
スカンディナヴィア	360
イングランド・ウェールズ	610
スコットランド	130
アイルランド	320
オランダ	190
南ネーデルラント	220
ドイツ	1,700
フランス	2,170
北イタリア	650
中部イタリア	310
南イタリア	570
スペイン	890
ポルトガル	230
オーストリア・ベーメン	570
ポーランド	370
スイス	130

1750年 16カ国合計 9,420万人

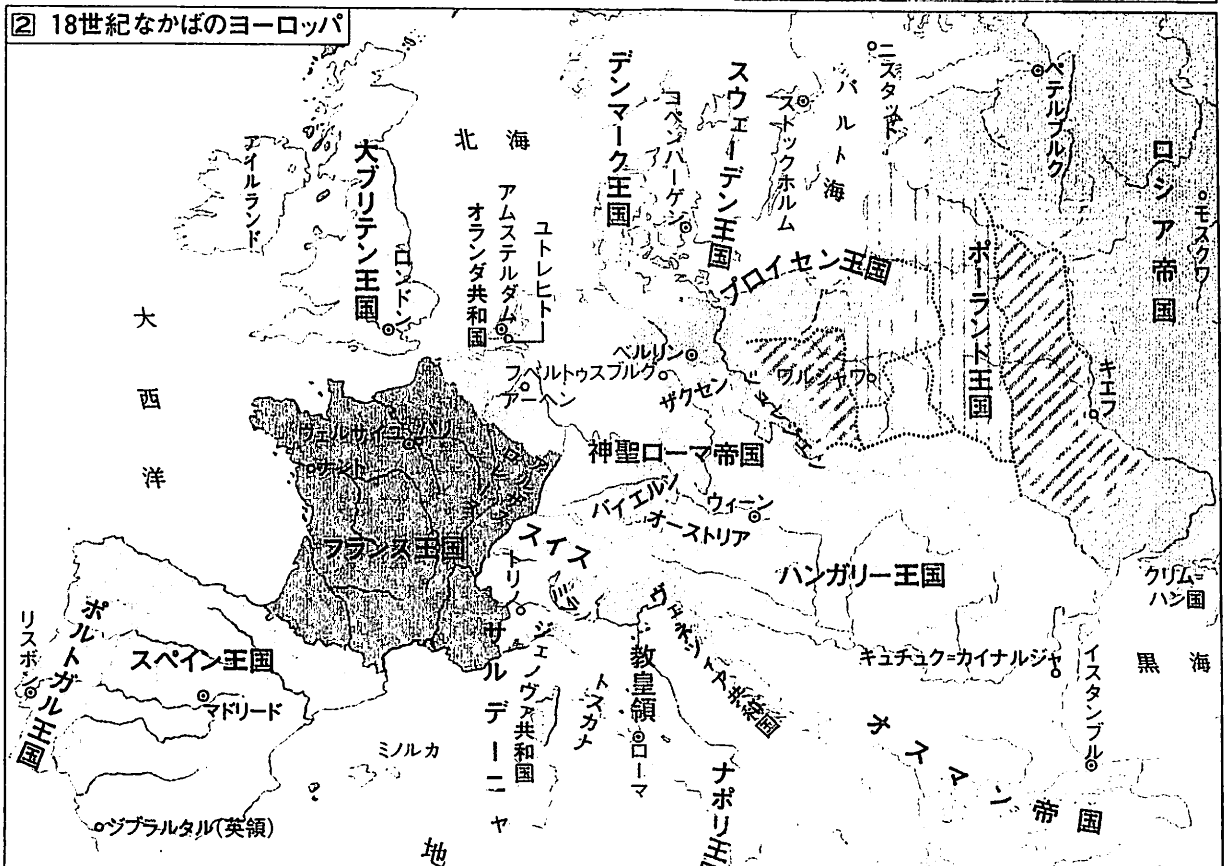


② 東部ドイツ

ロイセンでは西
用いて大農場を
富を蓄えた。



② 18世紀なかばのヨーロッパ



ポーランド分割
ロシアへ 1772年 1793年 1795年
プロイセンへ 1772年 1793年 1795年
オーストリアへ 1772年 1795年

③ ロシアの

THÉORIE

DES

FONCTIONS ANALYTIQUES,

CONTENANT

Les Principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.

PAR J. L. LAGRANGE, de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts, et du Bureau des Longitudes; Membre du Sénat-Conservateur, Grand-Officier de la Légion-d'Honneur, et Comte de l'Empire.

NOUVELLE ÉDITION,

revue et augmentée par l'Auteur.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1813.

初版 1797 年

Théorie des Fonctions Analytiques

CHAPITRE II.

FONCTIONS DÉRIVÉES; LEUR NOTATION ET LEUR ALGORITHME.

8. Nous avons vu que le développement de $f(x+i)$ donne naissance à différentes autres fonctions p, q, r, ..., toutes dérivées de la fonction principale $f(x)$, et nous avons donné la manière de trouver ces fonctions dans des cas particuliers. Mais, pour établir une théorie sur ces sortes de fonctions, il faut rechercher la loi générale de leur dérivation.

Pour cela, reprenons la formule générale

$$f(x+i)=f(x)+pi+qi^2+ri^3+\ldots,$$

et supposons que l'indéterminée x devienne $x+o$, o étant une quantité quelconque indéterminée et indépendante de i; il est visible que $f(x+i)$ deviendra $f(x+i+o)$, et l'on voit en même temps que l'on aurait le même résultat en mettant simplement $i+o$ à la place de i dans $f(x+i)$. Donc aussi, le résultat doit être le même, soit qu'on mette, dans la série $f(x)+pi+qi^2+ri^3+\ldots$, $i+o$ à la place de i, soit qu'on y mette $x+o$ au lieu de x.

La première substitution donnera

$$f(x)+p(i+o)+q(i+o)^2+r(i+o)^3+\ldots,$$

savoir, en développant les puissances de $i+o$, et n'écrivant, pour plus de simplicité, que les deux premiers termes de chaque puissance, parce que la comparaison de ces termes suffira pour les déterminations dont nous avons besoin,

$$f(x)+pi+qi^2+ri^3+si^4+\ldots+po+2qio+3ri^2o+4si^3o+\ldots.$$

(62)

Pour faire l'autre substitution, soient $f(x)+f'(x)o+\ldots$, $p+p'o+\ldots$, $q+q'o+\ldots$, $r+r'o+\ldots$ ce que deviennent les fonctions $f(x)$, p, q, r, ... en y mettant $x+o$ pour x et ne considérant dans le développement que les termes qui contiennent la première puissance de o; il est clair que la même formule deviendra

$$f(x)+pi+qi^2+ri^3+si^4+\ldots+f'(x)o+p'io+q'i^2o+r'i^3o+\ldots.$$

Comme ces deux résultats doivent être identiques quelles que soient les valeurs de i et de o, on aura, en comparant les termes affectés de o, de io, de i^2o, etc.,

$$p=f'(x),\quad 2q=p',\quad 3r=q',\quad 4s=r',\quad \ldots.$$

Maintenant, de même que $f'(x)$ est la première fonction dérivée de $f(x)$, il est clair que p' est la première fonction dérivée de p, que q' est la première fonction dérivée de q, r' la première fonction dérivée de r, et ainsi de suite. Donc, si, pour plus de simplicité et d'uniformité, on dénote par $f'(x)$ la première fonction dérivée de $f(x)$, par $f''(x)$ la première fonction dérivée de $f'(x)$, par $f'''(x)$ la première fonction dérivée de $f''(x)$, et ainsi de suite, on aura

$$p=f'(x),\qquad \text{et de là}\quad p'=f''(x);$$

donc

$$q=\frac{p'}{2}=\frac{f''(x)}{2},\quad \text{et de là}\quad q'=\frac{f'''(x)}{2};$$

donc

$$r=\frac{q'}{3}=\frac{f'''(x)}{2.3},\quad \text{et de là}\quad r'=\frac{f^{\text{IV}}(x)}{2.3};$$

donc

$$s=\frac{r'}{4}=\frac{f^{\text{IV}}(x)}{2.3.4},\quad s'=\frac{f^{\text{V}}(x)}{2.3.4};$$

et ainsi de suite.

Donc, substituant ces valeurs dans le développement de la fonction $f(x+i)$, on aura

$$f(x+i)=f(x)+f'(x)i+\frac{f''(x)}{2}i^2+\frac{f'''(x)}{2.3}i^3+\frac{f^{\text{IV}}(x)}{2.3.4}i^4+\ldots.$$

Cette nouvelle expression a l'avantage de faire voir comment les termes de la série dépendent les uns des autres, et surtout comment, lorsqu'on sait former la première fonction dérivée d'une fonction primitive quelconque, on peut former toutes les fonctions dérivées que la série renferme.

9. Nous appellerons la fonction $f(x)$ *fonction primitive* par rapport aux fonctions $f'(x)$, $f''(x)$, ... qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci *fonctions dérivées* par rapport à celle-là. Nous nommerons de plus la première fonction dérivée $f'(x)$ *fonction prime*, la seconde fonction dérivée $f''(x)$ *fonction seconde*, la troisième fonction dérivée $f'''(x)$ *fonction tierce*, et ainsi de suite.

De la même manière, si y est supposée une fonction de x, nous dénoterons ses fonctions dérivées par y', y'', y''', ..., de sorte que, y étant une fonction primitive, y' sera sa fonction *prime*, y'' en sera la fonction *seconde*, y''' la fonction *tierce*, et ainsi de suite.

De sorte que, x devenant $x+i$, y deviendra

$$y + y'i + \frac{y''i^2}{2} + \frac{y'''i^3}{2.3} + \ldots.$$

Ainsi, pourvu qu'on ait un moyen d'avoir la fonction prime d'une fonction primitive quelconque, on aura, par la simple répétition des mêmes opérations, toutes les fonctions dérivées, et par conséquent tous les termes de la série qui résulte du développement de la fonction primitive.

Au reste, pour peu qu'on connaisse le Calcul différentiel, on doit voir que les fonctions dérivées y', y'', y''', ..., relatives à x, coïncident avec les expressions $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ...

on fera

$$f(x) = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

et l'on aura (n° 12), en mettant $\pm\sqrt{-1}$ au lieu de m dans e^{mx},

$$f'(x) = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x.$$

De même, en faisant

$$f(x) = \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

on trouvera

$$f'(x) = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\sqrt{-1} = -\sin x.$$

Connaissant ainsi les fonctions primes des fonctions $\sin x$, $\cos x$, on en déduira facilement toutes les autres fonctions dérivées.

En effet, puisque $f(x) = \sin x$ a donné $f'(x) = \cos x$ et que $f(x) = \cos x$ a donné $f'(x) = -\sin x$, on aura, pour $f(x) = \sin x$,

$$f'(x) = \cos x,\quad f''(x) = -\sin x,\quad f'''(x) = -\cos x,\quad f^{\text{IV}}(x) = \sin x,\quad \ldots,$$

et, pour $f(x) = \cos x$, on aura

$$f'(x) = -\sin x,\quad f''(x) = -\cos x,\quad f'''(x) = \sin x,\quad f^{\text{IV}}(x) = \cos x,\quad \ldots.$$

D'après ces formules, on aura sur-le-champ les séries

$$\sin(x+i) = \sin x + i\cos x - \frac{i^2}{2}\sin x - \frac{i^3}{2.3}\cos x + \frac{i^4}{2.3.4}\sin x + \ldots,$$

$$\cos(x+i) = \cos x - i\sin x - \frac{i^2}{2}\cos x + \frac{i^3}{2.3}\sin x + \frac{i^4}{2.3.4}\cos x - \ldots,$$

donc, en faisant $x = 0$ et changeant i en x, on tire les séries connues

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \ldots,\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \ldots.$$

[illegible] Les fonctions x^m, a^x, $\mathrm{l}x$, $\sin x$, $\cos x$ que nous venons de considérer doivent être regardées comme les fonctions simples analytiques

d'une seule variable. Toutes les autres fonctions de la même variable se composent de celles-là par addition, soustraction, multiplication ou division, ou sont données en général par des équations dans lesquelles entrent des fonctions de ces mêmes formes. Ainsi, connaissant les fonctions primes des fonctions simples que nous venons d'examiner, on trouvera aisément les fonctions primes des fonctions composées, et, par les mêmes opérations répétées, on aura successivement les fonctions secondes, tierces, etc.

(65)

LEÇONS

SUR

LE CALCUL DES FONCTIONS,

NOUVELLE ÉDITION,

revue, corrigée et augmentée par l'Auteur.

Lagrange

A Paris

AN 1806

AVERTISSEMENT.

Les Leçons suivantes, (*) destinées à servir de commentaire et de supplément à la première Partie de la *Théorie des fonctions analytiques,* offrent un cours d'Analyse sur cette partie du calcul qu'on nomme communément *infinitésimale* ou *transcendante,* et qui n'est proprement que le Calcul des fonctions.

Ceux qui ont étudié le Calcul différentiel pourront se former, dans ces Leçons, des notions simples et exactes de ce Calcul; ils y trouveront aussi des formules et des méthodes nouvelles, ou qui n'ont pas encore été présentées avec toute la clarté et la généralité qu'on pourrait désirer.

Dans cette nouvelle Édition, on a retouché plusieurs endroits pour y mettre plus de clarté et de simplicité, et on a inséré différentes additions dont les principales se trouvent dans les Leçons dix-huitième, vingt et unième et vingt-deuxième. Cette dernière contient un traité complet du Calcul des variations.

(*) Les Leçons I à XIX ont été professées à l'École Polytechnique, pendant l'an VII (1799), par Lagrange, qui les a fait paraître dans le tome X de la nouvelle édition des *Séances des Écoles Normales,* an IX (1801), en y ajoutant une XX[e] Leçon.

Ces vingt Leçons ont été réimprimées dans le XII[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* an XII (1804).

Lagrange a publié, en un volume in-8° (1806), une deuxième édition contenant deux Leçons nouvelles (XXI[e] et XXII[e]), qui ont été reproduites ultérieurement dans le XIV[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (1808).

(*Note de l'Éditeur.*)

se détruire d'eux-mêmes et former autant d'équations à part. On aura donc ainsi

$$\frac{1}{x} = Af'(x), \quad Af''(x) + A^2 f'^2(x) = 0,$$

et ainsi de suite.

Donc, $f(x)$ étant égal à $\log x$, on aura, en général,

$$f'(x) = \frac{1}{Ax} = \frac{1}{x\,\mathrm{l}a},$$

et de là, par la formule générale du n° 10, on tirera

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2\,\mathrm{l}a}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3\,\mathrm{l}a}, \quad f^{\mathrm{IV}}(x) = -\frac{2.3}{x^4\,\mathrm{l}a}, \quad \ldots,$$

valeurs qui satisfont, comme l'on voit, aux différentes équations trouvées ci-dessus. Ainsi, par la substitution de ces valeurs dans la série $f(x) + if'(x) + \frac{i^2}{2}f''(x) + \ldots$, on aura sur-le-champ

$$\log(x+i) = \log x + \frac{i}{x\,\mathrm{l}a} - \frac{i^2}{2x^2\,\mathrm{l}a} + \frac{i^3}{3x^3\,\mathrm{l}a} - \ldots.$$

Faisant $x = 1$ et changeant i en x, on aura la formule connue

$$\log(1+x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots}{\mathrm{l}a}.$$

Pour les logarithmes hyperboliques où $\mathrm{l}e = 1$, on aura simplement

$$f(x) = \mathrm{l}x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad \ldots.$$

14. Les sinus et cosinus d'angles considérés analytiquement ne sont que des expressions composées d'exponentielles imaginaires; ainsi, on peut déduire leurs fonctions dérivées de celles de ces exponentielles.

Soit donc, en quatrième lieu, $f(x) = \sin x$; comme on a

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

(67)

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE CHIMIE,

PRÉSENTÉ DANS UN ORDRE NOUVEAU

ET D'APRÈS LES DÉCOUVERTES MODERNES;

Avec Figures :

Par M. LAVOISIER, *de l'Académie des Sciences, de la Société Royale de Médecine, des Sociétés d'Agriculture de Paris & d'Orléans, de la Société Royale de Londres, de l'Institut de Bologne, de la Société Helvétique de Basle, de celles de Philadelphie, Harlem, Manchester, Padoue, &c.*

TOME PREMIER.

A PARIS,

Chez CUCHET, Libraire, rue & hôtel Serpente.

M. DCC LXXXIX.

Sous le Privilège de l'Académie des Sciences & de la Société Royale de Médecine.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

JE n'avois pour objet lorsque j'ai entrepris cet ouvrage, que de donner plus de développement au Mémoire que j'ai lu à la séance publique de l'Académie des Sciences du mois d'Avril 1787, sur la nécessité de réformer & de perfectionner la Nomenclature de la Chimie.

C'est en m'occupant de ce travail, que j'ai mieux senti que je ne l'avois encore fait jusqu'alors, l'évidence des principes qui ont été posés par l'Abbé de Condillac dans sa logique, & dans quelques autres de ses ouvrages. Il y établit que *nous ne pensons qu'avec le secours des mots; que les langues sont de véritables méthodes analytiques; que l'algèbre la plus simple, la plus exacte & la mieux adaptée à son objet de toutes les manières de s'énoncer, est à-la-fois une langue & une méthode* *analytique* ; enfin que *l'art de raiſonner ſe réduit à une langue bien faite.* Et en effet tandis que je croyois ne m'occuper que de Nomenclature, tandis que je n'avois pour objet que de perfectionner le langage de la Chimie, mon ouvrage s'eſt transformé inſenſiblement entre mes mains, ſans qu'il m'ait été poſſible de m'en défendre, en un Traité élémentaire de Chimie.

L'impoſſibilité d'iſoler la Nomenclature de la ſcience & la ſcience de la Nomenclature, tient à ce que toute ſcience phyſique eſt néceſſairement formée de trois choſes : la ſérie des faits qui conſtituent la ſcience ; les idées qui les rappellent ; les mots qui les expriment. Le mot doit faire naître l'idée ; l'idée doit peindre le fait ; ce ſont trois empreintes d'un même cachet ; & comme ce ſont les mots qui conſervent les idées & qui les tranſmettent, il en réſulte qu'on ne peut perfectionner le langage ſans perfectionner la ſcience, ni la ſcience ſans le langage, & que quelque certains que fuſſent les faits, quelque juſtes que fuſſent les idées qu'ils auroient fait naître, ils ne tranſmettroient encore que des impreſſions fauſſes, ſi nous n'avions pas des expreſſions exactes pour les rendre.

La première partie de ce Traité fournira à ceux qui voudront bien le méditer, des preuves fréquentes de ces vérités ; mais comme je me ſuis vu forcé d'y ſuivre un ordre qui differe eſſentiellement de celui qui a été adopté juſqu'à préſent dans tous les ouvrages de Chimie, je dois compte des motifs qui m'y ont déterminé.

C'eſt un principe bien conſtant, & dont la généralité eſt bien reconnue dans les mathématiques, comme dans tous les genres de connoiſſances, que nous ne pouvons procéder pour nous inſtruire, que du connu à l'inconnu. Dans notre première enfance nos idées viennent de nos beſoins ; la ſenſation de nos beſoins fait naître l'idée des objets propres à les ſatisfaire, & inſenſiblement par une ſuite de ſenſations, d'obſervations & d'analyſes, il ſe forme une génération ſuc-

70

スタンダール全集 第七巻 人文書院 一九六八年
『アンリ・ブリュラールの生涯』

第三十四章

グルノーブルの事柄について語るべき最後の話にはいる前に、話したいことはすべてこれで片づけてしまった、と私は思う。最後の話というのは、私の数学への没頭のことである。

キュブリー嬢はずっと前に去っていた。そしてこの人についてはもうやさしい思い出がのこっているだけだった。ヴィクトリーヌ・ビジリオン嬢は多く田舎のほうへ行っていた。読書における私の唯一の喜びは、シェークスピアと、当時七巻だったサン-シモンの『回想録』[四六]とであった。このサン-シモンはのちにバスカヴィルの活字の版で十二巻のを買った。この本への情熱は食物でいえば菠薐草のようなもので、十三のときと同様五十三歳になっても同じくらい強い。

私が数学を愛するようになるにつれ、いっそう教師のデュピュイ氏とシャベール氏とを軽蔑していた。デュピュイ氏が人と話すときの、誇張的で洗練された、そして上品でやさしい態度にもかかわらず、私の洞察力は、この人物はシャベール氏よりずっと無学なことを見抜いていた。グルノーブルのブルジョア階級のなかでは、シャベール氏は問題にならないほどデュピュイ氏より下に見られていたが、ときどきは、日曜日か木曜日の朝、オイラーか……の一冊をとり、熱心に難問を解いていた。しかし、彼はいつも便利な処方を知っている薬剤師のような態度で、しかも、その処方がどうしてたがいに関連しているかを説明できず、頭脳にはすこしも論理や哲学がなかった。何かよくわからぬが機械的な教育法か虚栄のためか、またはたぶん宗教心からか、シャベール氏は、これらのものの名前まで嫌っていたのだ。

いまから二分前に、私の今日の頭脳から考えて、どうしてすぐこういうことにたいする対策に気づかなかったろうと驚いたが、それは無理というものだ。私には助けになるものはなかったのだ。ほとんど何でも知っていた祖父もその知識の唯一の限界である数学を虚栄心から嫌っていたから。あの人は、というよりガニョン氏は、読んだことをけっして忘れない、とグルノーブルでは人びとが尊敬をもって語った。数学だけが彼の敵のよりどころだった。私の父は信仰からだろうと思うが、数学が大嫌いだったが、所有地の図を引く方法をおしえるということから、すこし寛大であった。彼がよい取引をしたクレやエシロールやフォンタニューやシェーラス[四七]（……付近の狭谷）の地面の図の写しを私はいつも父のためにつくったものだ。

私はデュピュイ氏やシャベール氏と同じくらいにブズーを軽蔑していた。

中央学校には、一七九七年か九八年に理工科学校に入学を許された五、六人の秀才がいた。しかし、この連中は私のするむつかしい質問に答えてくれなかった。質問がはっきりしなかったせいか、むしろ彼らを当惑させたせいだろう。

八折判のマリー師[四八]の書物を買ったか、賞品にもらったかした。私はこの書物を小説を読むように耽読した。そのなかに異なった表現で述べられている真理を発見し、たいへんうれしく、私の労は報いられたが、新奇なことは一つもなかった。

ほんとうに新しいものがなかった、とは言えまい。たぶん私はそれが理解できず、理解できるほど教養がなかったのだろう。

もっと静かに思考するために、私の母が刺繍をした十二の美しい肱掛椅子のある、一年に一、二度掃除するときだけひらく客間にはいった。この部屋は私の精神を集中させた。そのころはなお、母が生きていたときに催した楽しい晩餐の有様を思い出した。灯にかがやくこの客間を十時になると出て、大きな魚が一尾でている食堂へお客たちはみんな行くのである。この魚は私の父の贅沢だった。信仰と農業投機に身をやつしていたが、そのころはこうした贅沢の本能をまだ失っていなかったのだ。

Tのテーブルの上で、私がみずから喜劇と称していたところの、劇の第一幕か全五幕かを、ちょうど天使でも現われてくるのを待つように天才のひらめく瞬間を待ちつつ、書いたものだ。

数学へ私が熱中したのは、偽善にたいする憎悪が主な原因だったと思われる。偽善とは、私にとってはセラフィー、ヴィニョン夫人、および彼女たちの僧侶どもであった。

私の考えでは、偽善は数学においては不可能であった。

そして少年の単純さから、数学が応用されると聞いたすべての科学は、みな同様であると思っていた。ところが誰も私に、どうして負に負を乗じて正になるか（−×−＝＋）を説明してくれないのだから、私はどうしてよいかわからないではないか？　（これは代数学と称する科学の基礎の一つである）。

この疑問に答えてくれないよりなお悪いことを彼らはやった（この疑問はたぶん説明可能なのだろう、この法則が真理へ通じるのだから）。説明してくれる当人にとってもあまりはっきりしない理論をもちだして、この法則を私に説明したのである。

私に問いつめられて、シャベール氏は困ってしまい、私がそれにたいして疑問をもちだした当のレッスンをくりかえすばかりだ。しまいには私にこう言いたいような顔をした。

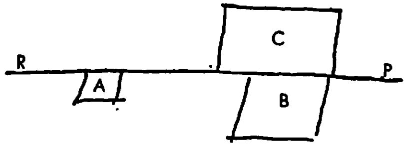
「だって、これは習慣だよ。誰でもこの説明を認めているんだ。オイラーやラグランジュも、君と劣らぬ秀才だが、ちゃんとそれを認めている。私は君に才能のあることを知っているが、（すなわちそれは、《ぼくは君が文学で一等賞をもらって、テストールボー氏やその他の県の審査員諸氏に上手に話したことを知っている》という意味だ）、たしかに君は自分を特異な人間に見せたいらしいね」。

デュピュイ氏のほうは私の臆病な（彼の大袈裟な調子のためにこちらは臆病になる）疑問に、よそよそしさに近い高慢な笑いで答えた。シャベール氏より実力はずっと劣るが、彼はシャベール氏よりブルジョア的でなく、偏狭でもなく、自分の数学の知識を正しく知っていたのだろう。もし今日これらの諸氏に一週間会っていたら、私はどんな人間を相手にしているか、即座にわかるはずだ。だが、この点をもうすこし話す必要があるだろう。

悲しみのためにますます狭量になった肉親たちに大切にしすぎられて育ち、すこしも人との交渉をもたずにいた私は、十五歳になって敏感な感受性をもつようになってはいたが、他の子供よりずっと人間を判断する能力がなく、また、人間のやるさまざまなお芝居を洞察する力もなかった。だから、根底においては、いままでの五三六ページにわたる私の判断に自信はもっていないのだ。確実に真なのは感じたことだけであり、真実に達するには私の表現に四つの嬰記号をつける必要がある。私はその表現を、四十歳の男の経験によってえた冷静さとよわめられた感覚によって語っているだけなのである。

負に負をかけることにたいする私の疑問を秀才のひとりにたずねると、彼は頭から笑ってとりあわなかったのを、はっきり思い出す。ほとんどみんなは全部、ボールーエミール・テセールのように、それを暗記しているだけなのだ。黒板に出て証明のおしまいに、彼らは言っている。

「ゆえに……は明らかなり」等々。



これほど不明瞭なことはないじゃないか、と私は思った。じっさい、私は明瞭な、どうしても疑うことのできないものが必要で、もとめていたのだ。

数学は事物のある小さい一角（その量）だけしかとりあげないが、この点では、正確なことだけを、真理だけを、ほとんどすべての真理のみを語ってくれるこころよさがある。

一七九七年当時の十四歳のときには、私はまったく習っていなかったが高等数学はすべてまたはほとんどすべての事物中にある側面を包含しているから、数学をやってすすんでゆけば、正確な疑うべからざることを知りえ、そうしてすべてのものにかんして、意のままに正確なことを自分に証明できるだろうと思っていた。

マイナス（負）かけるマイナス（負）がプラス（正）になること（−×−＝＋）への私の疑問が、シャベール氏の頭にはまったく入りえないだろうこと、デュピュイ氏はかならず高慢な微笑でそれに答えるだろうこと、そして、私が質問する秀才たちは私をいつも小馬鹿にするだろうことを納得するのに、ずいぶん暇がかかった。

そのために今日でもこういうことをやむをえず考えさせられている——マイナスかけるマイナスはプラスがほんとうであるのだろう、たしかに各瞬間にこの規則をつかって計算すれば、真実にして疑うべからざる結果に達するからだと。

この画が私をたいへん悩ました。ＲＰの線は負と正を分かつ線として、その上はすべて正、下は負としよう。Ａの方形を単位としてＢの方形をはかり、その数だけＢ

をとることによって、どうして他のがわのC方形に変えうるだろうか？

下手な比較、シャベール氏のひどくまのびのしたグルノーブルなまりがいっそう下手くそに思わせる比較にならって、負の量をある男の負債だとしよう。一万フランの負債に五百フランの負債を乗じて、どのようにしてこの男は五百万フランの財産をえるにいたるだろう？

デュピュイ氏とシャベール氏も、祖父のところへミサをあげにくる僧侶と同様偽善者なのか、そうして私の親愛な数学も一つのごまかしにすぎないのか？　どのようにして真実に到達すべきか、私にわからなかった。ああ！　あのころ論理すなわち真理を発見する方法について一言でもきけたなら、私はそれをどんなに貪るように傾聴したことだろう！　トラシ氏の『論理学』を私に説明してくれたらいい好機であったのだ！　たぶんそうしたら、私はまるでちがった人間になり、もっとすばらしい頭脳をもてただろう。

私の貧弱な能力で結論しえたことは、デュピュイ氏はぺてん師であるかもしれないが、シャベール氏は彼にわからない疑問が存在することを理解できぬ見栄坊のブルジョアである、ということだ。

父と祖父とは、ディドロとダランベールの、二折判の『百科全書』をもっていた。それは七、八百フランする著作である、というより当時そうであった。書籍にこんな金を地方人に出させるのだから、非常な影響をもっていたにちがいない。ここから、今日、私の生まれる前には父も祖父も、まったく啓蒙哲学派であったにちがいないと、私は判断する。

父は私が『百科全書』をひっくりかえして見ていると、かならずにがい顔をした。父がこの書物を遠ざけ、家によく来る坊主たちがこの本を断然憎んでいたから、私はこの書にまったく信頼をおいていた。副司教で僧会員のレーは、やつれて真青な大きな顔の五フィート十インチもある人だったが、ディドロとダランベールの名を軽蔑したように発音するとき独特の渋い顔をした。この渋い表情は私に心ひそかな深い快感をおぼえさせ、いまでもこういう種類の快さを感じやすい。一八一五年に、貴族たちがニコラ・ブオナパルト[四四九]——この偉人は当時そういう名前であった——には勇気がないと言っているのを見て、ときどきこのような愉快を私はおぼえた。しかし、

一八〇七年以来、私は彼が英国を征服しないようにと熱情をもって願っていた。どこにそうしたら亡命できよう？

で、私は『百科全書』中のダランベールの、数学の項を参考にしようと思ってしらべた。その項のうぬぼれ調子と、真理にたいする尊敬がないことが、私を非常に気をわるくさせ、そのうえ私はその項の内容がほとんど理解できなかった。当時私はどんなに熱烈に真理を敬愛していたことか！　私がいまやはいろうとしている世界の女王は真理であると、どんなに誠心誠意信じていたか！　そして、彼女の敵は、僧侶たちをおいては他にないと思っていた。

－×－＝＋が私をたいへん悩ましたが、それよりなお、有名なモンジュの弟で、そうして理工科学校に試験をしにくることになっていたルイ・モンジュの『静力学』[四五〇]をやりはじめたとき、どんなに私の心が暗くなったことだろう。

幾何学のはじめに、無限に延長すれども合することなき二線を平行線とよぶ、と言っている。そして『静力学』の冒頭からこの名うてのルイ・モンジュの奴はだいたいつぎのように書いている。もしそれらを無限に延長すれば、平行せる二線は交わることありと思考しうる。

私は教理問答を、しかもいちばん拙劣なのを読んでいるような気がした。シャベール氏に私はその説明をもとめたが駄目だった。

「君」と彼はドフィネ狐にはおよそ似あわぬ父親らしい顔つきを、エドアール・ムニエ（一八三六年、貴族院議員）風の顔つきをして言った、「君、そういうことはあとになるとわかるよ」。

そしてこのわからず屋は蠟引布の黒板に行って、平行してごく接近した二線を引き、

「無限においては交わることもありうることが、ほらわかったろう」と私に言った。

私はみんなやめてしまいそうになった。頭のいいイエズス会の告解師なら、そのとき、つぎの道徳訓を説明することによって、私に改宗させることができただろう。

「見たまえ、すべては偽りだ。あるいはむしろ偽りも真実もないといったほうがよい。すべてはしきたりだ。習慣をうけいれ、世間から好遇されたまえ。ところで平

民はいつも愛国者で、この方面のことを台無しにしてしまうのだ。君の家の人のように貴族になりたまえ。そうすれば君をパリにおくり、勢力のある婦人たちに推薦する方法を見つけてあげよう」。

第三十五章

このようなことを魅惑的に言われたら、私は悪い奴になって、今日一八三六年に、巨富をえていたはずだ。

私は、十三歳のとき、デュクロの『秘録』と七巻本のサン－シモンの『回想録』とだけをとおして世間を心に描いていた。最上の幸福は、パリで百ルイの年収をえて、本を書きながら暮らすことにあった。マリオンは、父は私にそれ以上遺してくれるだろうと言っていた。

嘔気をもよおさせるこの泥沼の地グルノーブルから、本物にしろ偽物にしろ数学が私を脱出させてくれるだろう、と私は思ったようだ。

しかし、この考えは年齢のわりにすすみすぎているという気がする。私は勉強しつづけた。途中でやめるのはあまりに大きな悩みであっただろう。しかし、私は深く不安で心が暗かった。

偶然に私は一人のすぐれた人物に会うことになり、そ

73

の結果、私は悪い奴にならなかった。ここでもこれで二度目だが、話の内容が言葉を超えている。誇張に陥らぬように努力しよう。

数学に熱中していたので、すこし前から、ある若い人の噂を耳にしていた。この人は名のとおったジャコバンだが、勇敢で上手な狩人で、デュピュイ氏やシャベール氏より数学をずっとよく知っているということだった。しかし、彼は数学を職業にはしていない。ただ非常に貧しかったので、あの偽の才人アングレス（のちに伯爵で警視総監、募債時代にルイ十八世に金持にしてもらった男）にレッスンをあたえていた。

しかし私は臆病だった。この人物にどうして近づけばいいか？　そのうえ、彼の稽古は一回十二スーで非常に高く、どうしてはらえるだろう？　（この金高は法外のような気がする。たぶん、二十四スーか四十スーであった）。

私はこのことを心から一生懸命な気持で大伯母エリザベットに話した。この人は当時八十歳くらいだったが、そのすぐれた心と秀でた頭脳はいわば三十歳くらいのものだった。そして、快く彼女は六フラン貨幣をたくさん出してくれた。伯母は金を惜しむ気持などすこしもなかったが、もっとも正当で敏感な自尊心にみちたこの人の心としては、私が父に隠れて稽古をうけるということは、どんなにつらかっただろうか？　どんなに当然で理由のある非難をうけることになるかもしれないではないか？　このとき、セラフィーはまだ生きていたのか？　死んでいたとは言いきれない。しかしセラフィー叔母が死んだときは私はまだ小さな子供だったから、たぶんもう死んでいたのだろう。台所で彼女の死んだのを聞いて、私は神にこんな大きい救いをあたえたもうたことを、マリオンの棚のまえに跪いて感謝したものだ。

大伯母エリザベットが寛大に金を出してくれ、隠れてこのおそるべきジャコバンからレッスンをうけたことが、私をして永久に悪党たらしめないようにさせた。ギリシア人やローマ人の典型のような人物に会ったこと、たとえ一瞬でもいいからその人物のようになれないのなら死んだほうがよい、と感じたこと——瞬間「瞬間だけでも」[訳注一]アルフィエーリ (Punto (Non sia che un punto) Alfieri)。

たいへん内気な私がどのようにしてグロ氏に近づいた

Cauchy Cours d'analyse : Analyse algébrique

INTRODUCTION.

QUELQUES personnes, qui ont bien voulu guider mes premiers pas dans la carrière des sciences, et parmi lesquelles je citerai avec reconnaissance MM. *Laplace* et *Poisson*, ayant témoigné le desir de me voir publier le Cours d'analyse de l'École royale polytechnique, je me suis décidé à mettre ce Cours par écrit pour la plus grande utilité des élèves. J'en offre ici la première partie connue sous le nom d'*Analyse algébrique*, et dans laquelle je traite successivement des diverses espèces de fonc-

tions réelles ou imaginaires, des séries convergentes ou divergentes, de la résolution des équations, et de la décomposition des fractions rationnelles. En parlant de la continuité des fonctions, je n'ai pu me dispenser de faire connaître les propriétés principales des quantités infiniment petites, propriétés qui servent de base au calcul infinitésimal. Enfin, dans les préliminaires et dans quelques notes placées à la fin du volume, j'ai présenté des développemens qui peuvent être utiles soit aux Professeurs et aux Élèves des Colléges royaux, soit à ceux qui veulent faire une étude spéciale de l'analyse.

Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, sur-tout

dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment. En déterminant ces conditions et ces valeurs, et en fixant d'une manière précise le sens des notations dont je me sers, je fais disparaître toute incertitude; et alors les différentes formules ne présentent plus que des relations entre les quantités réelles, relations qu'il est toujours facile de vérifier

(56)

par la substitution des nombres aux quantités elles-mêmes. Il est vrai que, pour rester constamment fidèle à ces principes, je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures au premier abord. Par exemple, j'énonce dans le chapitre VI, qu'*une série divergente n'a pas de somme;* dans le chapitre VII, qu'*une équation imaginaire est seulement la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles;* dans le chapitre IX, que, *si des constantes ou des variables comprises dans une fonction, après avoir été supposées réelles, deviennent imaginaires, la notation à l'aide de laquelle la fonction se trouvait exprimée, ne peut être conservée dans le calcul qu'en vertu d'une convention nouvelle propre à fixer le sens de cette notation dans la dernière hypothèse;* &c. Mais ceux qui liront mon ouvrage reconnaîtront,

je l'espère, que les propositions de cette nature, entraînant l'heureuse nécessité de mettre plus de précision dans les théories, et d'apporter des restrictions utiles à des assertions trop étendues, tournent au profit de l'analyse, et fournissent plusieurs sujets de recherches qui ne sont pas sans importance. Ainsi, avant d'effectuer la sommation d'aucune série, j'ai dû examiner dans quels cas les séries peuvent être sommées, ou, en d'autres termes, quelles sont les conditions de leur convergence; et j'ai, à ce sujet, établi des règles générales qui me paraissent mériter quelque attention.

Au reste, si j'ai cherché, d'une part, à perfectionner l'analyse mathématique, de l'autre, je suis loin de prétendre que cette analyse doive suffire à toutes les sciences de raisonnement. Sans doute, dans les sciences qu'on nomme naturelles, la seule

méthode qu'on puisse employer avec succès consiste à observer les faits et à soumettre ensuite les observations au calcul. Mais ce serait une erreur grave de penser qu'on ne trouve la certitude que dans les démonstrations géométriques, ou dans le *témoignage des sens;* et quoique personne jusqu'à ce jour n'ait essayé de prouver par l'analyse l'existence d'Auguste ou celle de Louis XIV, tout homme sensé conviendra que cette existence est aussi certaine pour lui que le carré de l'hypothénuse ou le théorème de *Maclaurin.* Je dirai plus; la démonstration de ce dernier théorème est à la portée d'un petit nombre d'esprits, et les savans eux-mêmes ne sont pas tous d'accord sur l'étendue qu'on doit lui attribuer; tandis que tout le monde sait fort bien par qui la France a été gouvernée dans le dix-septième siècle, et qu'il ne peut s'élever à ce sujet aucune contestation raisonnable. Ce que je dis ici

(94)

d'un fait historique peut s'appliquer également à une foule de questions, en religion, en morale, en politique. Soyons donc persuadés qu'il existe des vérités autres que les vérités de l'algèbre, des réalités autres que les objets sensibles. Cultivons avec ardeur les sciences mathématiques, sans vouloir les étendre au-delà de leur domaine; et n'allons pas nous imaginer qu'on puisse attaquer l'histoire avec des formules, ni donner pour sanction à la morale des théorèmes d'algèbre ou de calcul intégral.

En terminant cette Introduction, je ne puis me dispenser de reconnaître que les lumières et les conseils de plusieurs personnes m'ont été fort utiles, particulièrement ceux de MM. *Poisson*, *Ampère* et *Coriolis*. Je dois à ce dernier, entre autres choses, la règle sur la convergence des produits composés d'un nombre infini de facteurs, et j'ai profité plusieurs fois des

observations de M. *Ampère*, ainsi que des méthodes qu'il développe dans ses Leçons d'analyse.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME TROISIÈME.

SECONDE SÉRIE.

MÉMOIRES DIVERS ET OUVRAGES.

II. — OUVRAGES CLASSIQUES.

COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE.

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

(77)

(79)

NOTES SUR L'ANALYSE ALGÉBRIQUE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME III DE LA SECONDE SÉRIE.

21921 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

80