メナール版　パスカル全集　第一巻　一九九三年　白水社

『幾何学的精神について』

一　幾何学一般に関する考察

（幾何学の精神あるいは真の方法を含む第一部）[1]

〔1〕[2] 真理の研究には三つの主要な目標を挙げることができる。ひとつは、真理を探究している場合にそれを見出すことであり、もうひとつは、真理を所有している場合にそれを論証することであり、最後のものは、真理を検討している場合に真偽を識別することである。

私は、最初のものには言及しない。第二番目について、とりわけ論じることにする。そして、第二は第三を含んでいる。というのも、真理を証明する方法を知っているなら、同時に真理を識別する方法ももつことになる。真理に関して行なう証明が既知の規則に適合しているかどうか検討することによって、真理が正しく論証されたかどうかを知ることになるからである。

これら三つの方法においてすぐれている幾何学は、未知の真理を発見する術を説明している。それが幾何学が解析と呼んでいるものであって、あれほど多くのすぐれた著作[3]が著わされたあとで、このことについてあらためて論じることは無用であろう。

私の与えたい術は、すでに見出された真理を論証し、その証明が不動のものとなるように真理を解明する術だけである。そのために私がすることは、幾何学がその場合に守っている方法を説明することだけである。というのも、幾何学は、方法を完璧に教えているからである[4]

…………………………………………………………

〔2〕方法については何の議論もしていないが、その実際例によって[5]。さて、この術は、二つの主要なことから成り立っている。ひとつはそれぞれの命題を個々に証明することであり、もうひとつは、すべての命題を最もよい順序に配列することである。したがって、私は二つの段落を設けることにする。ひとつは幾何学の論証、すなわち方法的で完璧な論証の導き方の規則を含むことになる。二つ目は、幾何学の順序、すなわち方法的で完成された順序の規則を含むことになる。したがって、私がまったき姿で提示するつもりである真理を証明し識別するために推論……[6]を導くのに必要となるすべてが、両者が一緒になることによって含まれることになる。

幾何学的精神について

第一部

幾何学の論証、すなわち方法的で完璧な論証の方法について

幾何学一般に関する考察

〔最初の執筆の残り〕

〔3〕……他方よりもこちらにおいてずっとよく成功すること……[7]そして、そこに到達するために私がこの学問を選んだのは、この学問だけが推論の真の規則を知っているのだし、知らないことはありえないほどあたりまえの三段論法の規則にしがみついたりすることはしないで、あらゆることにおいて推論を導く真の方法に選択を定めて、その上に基礎を置いているからにほかならない。この方法はほとんどの人が知らないでいるが、それを知ることは大変有益であって、能力が等しい人びとや、あらゆる似た事柄のあいだでは、幾何学を知っている人が勝利を収め、そこから、まったく新しい力強さを獲得するということを、私たちは経験からして知っている。

だから、私は、幾何学の論証の例を通じて、論争とは何かを説明したい。幾何学だけが真の方法を守っているので、人間に関わる学問のなかで、誤ることのない論証を提示するほとんど唯一のものとなっているが、他のすべての学問は、その性質[8]からして必然的にある種の混乱のなかにあり、ただ幾何学だけが、その混乱をこのうえなくはっきりと識別できる。

①

ちょっと一言

数学史の独自の表現

数学史では「解釈・検討・議論の余地」があるものを扱う場合が多い。

たとえば

数学者のかいたものには、〇〇〇と書いてある。

この事実に対して、

① 数学史家αはAAと解釈してきた。これが、広く受け入れられている解釈である。

② 数学史家βはBBと解釈してきた。

③ 誰も検討していない。

このような状況に対し、

A) 私は、自分なりに〇〇〇を検討した結果、

　① 数学史家α（またはβ）の主張を受け入れる。

　② どちらでもない、DDという自分なりの解釈をとる。

B) 私は、慎重に吟味したわけではないが、数学史家αの主張を受け入れる。

C) 誰も検討していないことに対し、私なりの考えがある。

A)・B)・C)をまとめて講義を構成し、誰が見ても正しいような表現を使うが、それは誰にでも受けいれられる見解だと考え違いしないように。多くの数学史の記述は、このようになされている。

「誰(＝数学者 or 数学史家、少し後の時代の数学者など)」が「何」を言ったかに注意する必要がある。

たとえば、

- 16世紀の数学者 Viète の成果を、数学史家　Jacob Klein は「代数解析」と称した。
- 18世紀の数学者 Lagrange は、べき級数展開によって導関数を決定し、極限や無限小を排除した微積分を試みたが、自身の理論を「代数解析」と称した。
- 19世紀の数学者 Cauchy は、微積分学の前に学んでおかなければならない事柄を扱う教育課程を「代数解析」と称した。
- 19世紀のドイツの数学者たちは、「代数解析」という教育課程の起源がEulerの『無限解析序説』にあることを見て取り、「代数解析」は Euler から始まったとしている 。
- それゆえ、今日の数学史家は、代数解析の起源は Euler の『無限解析序説』であるという。

数学史の時代区分

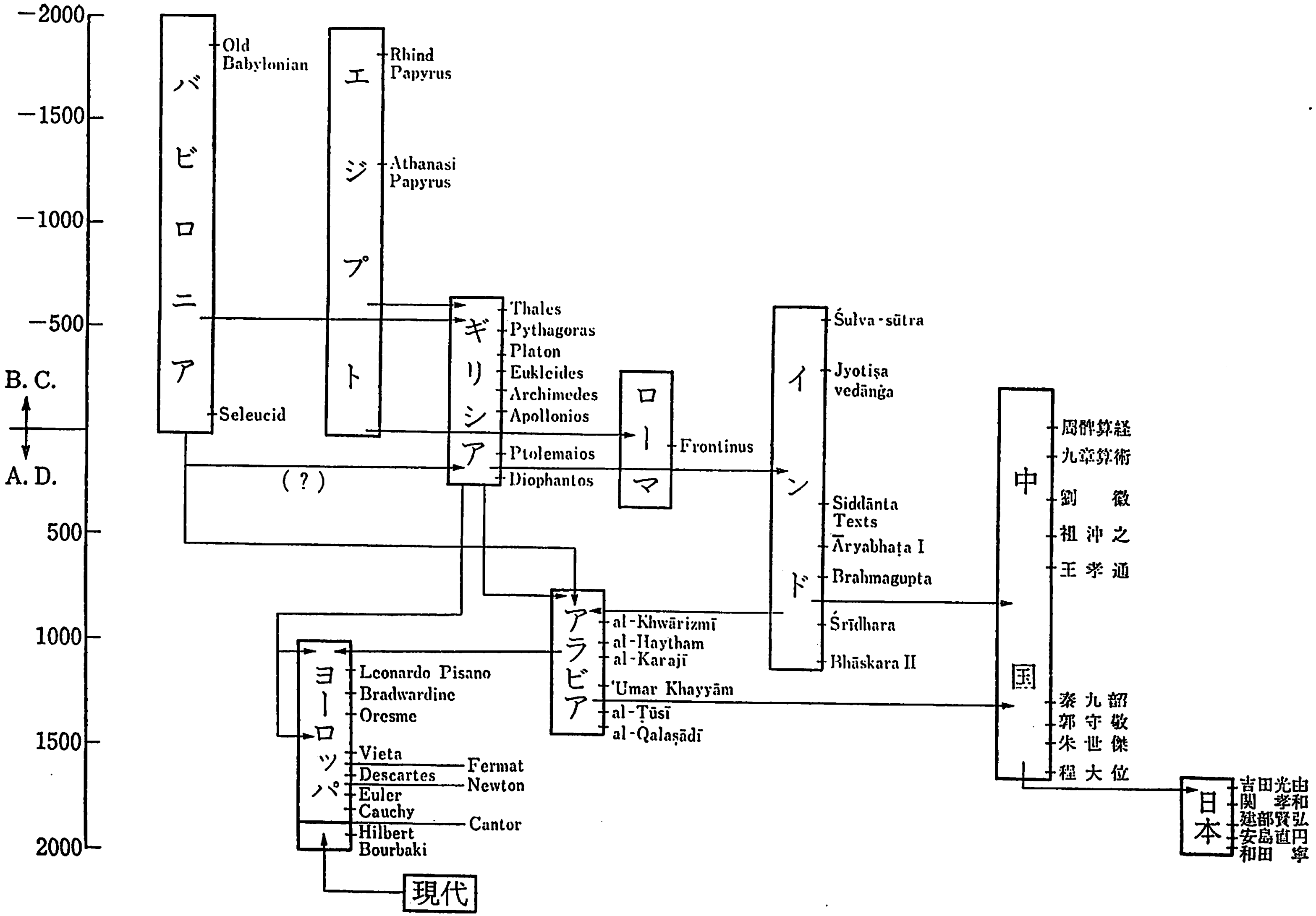
数学史の本のタイトルやその中での記述には、「古代ギリシア」とか「近代数学史」といった表現をしばしば見かける。なんとなくわかっていて、話は通じるが、それに頼っていると思いがけないところで、話がわからなくなってしまう可能性がある。科学史や数学史でよく採用される時代区分は以下の通り。

古代：476年の西ローマ帝国滅亡まで
中世：1453 年東ローマ帝国滅亡まで（オスマントルコによるコンスタンチノープル陥落）
ルネサンス期：1543年まで（コペルニクスによる『天球回転論』出版まで）
近代（近世）：17世紀末まで
18世紀：　18世紀末まで
19世紀：　 19世紀末まで
現代：20世紀以降現代まで

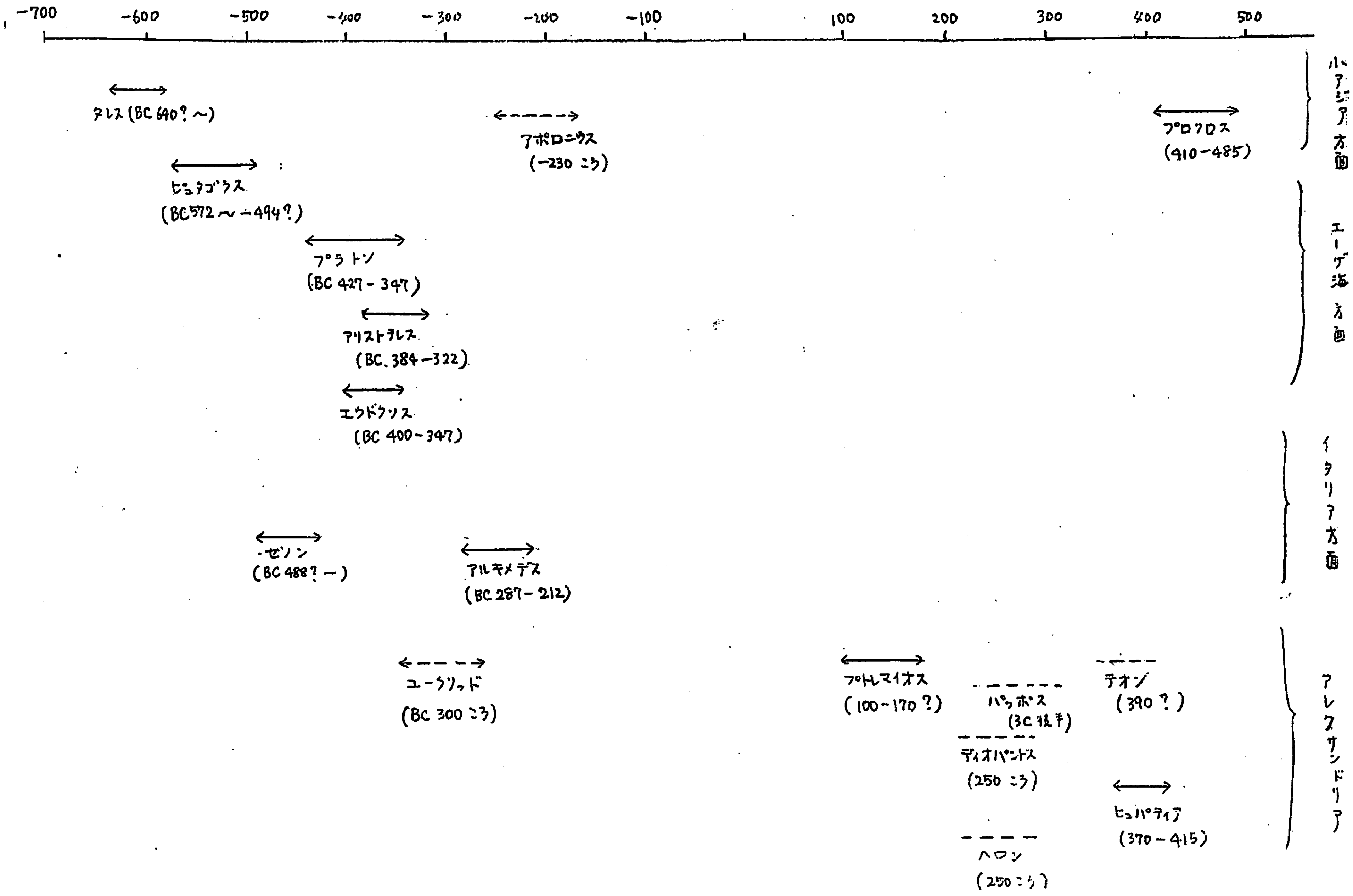
○厳格に線引きできるものではない。
○それでも、大まかな特徴づけはできる。
　17世紀：科学史一般では科学革命の時代と呼ばれる。
　　数学でも文字式が導入され、図形を方程式で表すという考え方が出てきた。（これを「科学革命」の一環とするかどうかは、研究者によって見解が異なる。）
　18世紀：一般化が進む。幾何学の問題を代数的に処理することが進む。
　19世紀：抽象化と厳密化の時代
　　などなど
○「近代」（近世）というのは、17世紀あたりのことを指すのであって、「今風のこと」と漠然と捉えると混乱が生じる。この時期に、それまで常識と考えられていたことが集中的に覆され、地動説や心臓の働き、運動法則などが今日学ばれる形で導かれた。
○ただし、この区分には個人差がある。たとえば、古代の終わりを女性数学者ヒュパティアの死（415年）とする歴史家もいる。

伊東俊太郎ほか『数学の歴史II：中世の数学』(1987年)
共立出版

世界の数学史の全体構造



ギリシア数学の担い手たち



中村 寺阪・伊東 池田訳
ユークリッド『原論』 1971年

第 1 巻

定　義

1. 点とは部分をもたないものである。
2. 線とは幅のない長さである。
3. 線の端は点である。
4. 直線とはその上にある点について一様に横たわる線である。
5. 面とは長さと幅のみをもつものである。
6. 面の端は線である。
7. 平面とはその上にある直線について一様に横たわる面である。
8. 平面角とは平面上にあって互いに交わりかつ一直線をなすことのない二つの線相互のかたむきである。
9. 角をはさむ線が直線であるとき，その角は直線角とよばれる。
10. 直線が直線の上に立てられて接角を互いに等しくするとき，等しい角の双方は直角であり，上に立つ直線はその下の直線に対して垂線とよばれる。
11. 鈍角とは直角より大きい角である。
12. 鋭角とは直角より小さい角である。
13. 境界とはあるものの端である。
14. 図形とは一つまたは二つ以上の境界によってかこまれたものである。
15. 円とは一つの線にかこまれた平面図形で，その図形の内部にある1点からそれへひかれたすべての線分が互いに等しいものである。
16. この点は円の中心とよばれる。
17. 円の直径とは円の中心を通り両方向で円周によって限られた任意の線分であり，それはまた円を2等分する。
18. 半円とは直径とそれによって切り取られた弧とによってかこまれた図形である。半円の中心は円のそれと同じである。
19. 直線図形とは線分にかこまれた図形であり，三辺形とは三つの，四辺形とは四つの，多辺形とは四つより多くの線分にかこまれた図形である。

20. 三辺形のうち，等辺三角形とは三つの等しい辺をもつもの，二等辺三角形とは二つだけ等しい辺をもつもの，不等辺三角形とは三つの不等な辺をもつものである。

21. さらに三辺形のうち，直角三角形とは直角をもつもの，鈍角三角形とは鈍角をもつもの，鋭角三角形とは三つの鋭角をもつものである。

22. 四辺形のうち，正方形とは等辺でかつ角が直角のもの，矩形とは角が直角で，等辺でないもの，菱形とは等辺で，角が直角でないもの，長斜方形とは対辺と対角が等しいが，等辺でなく角が直角でないものである。これら以外の四辺形はトラペジオンとよばれるとせよ。

23. 平行線とは，同一の平面上にあって，両方向に限りなく延長しても，いずれの方向においても互いに交わらない直線である。

公　　準（要請）

次のことが要請されているとせよ。

1. 任意の点から任意の点へ直線をひくこと。
2. および有限直線を連続して一直線に延長すること。
3. および任意の点と距離(半径)とをもって円を描くこと。
4. およびすべての直角は互いに等しいこと。
5. および1直線が2直線に交わり同じ側の内角の和を2直角より小さくするならば，この2直線は限りなく延長されると2直角より小さい角のある側において交わること。

公　　理（共通概念）

1. 同じものに等しいものはまた互いに等しい。
2. また等しいものに等しいものが加えられれば，全体は等しい。
3. また等しいものから等しいものがひかれれば，残りは等しい。

[4. また不等なものに等しいものが加えられれば全体は不等である。

5. また同じものの2倍は互いに等しい。

6. また同じものの半分は互いに等しい。]

7. また互いに重なり合うものは互いに等しい。

8. また全体は部分より大きい。

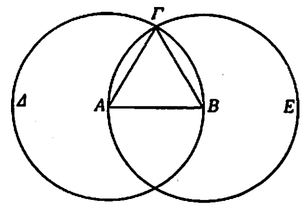
[9. また2線分は面積をかこまない。]

1

与えられた有限な直線(線分)の上に等辺三角形をつくること。

与えられた線分を AB とせよ。

このとき線分 AB 上に等辺三角形をつくらねばならぬ。



中心 A，半径 AB をもって円 $B\Gamma\Delta$ が描かれ，また中心 B，半径 BA をもって円 $A\Gamma E$ が描かれ，そしてこれらの円が互いに交わる点 Γ から，点 A，B に線分 ΓA，ΓB が結ばれたとせよ。

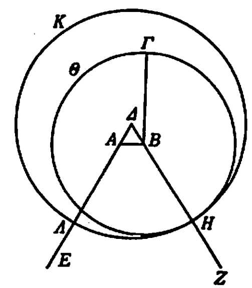
そうすれば点 A は円 $\Gamma\Delta B$ の中心であるから，$A\Gamma$ は AB に等しい。また点 B は円 ΓAE の中心であるから，$B\Gamma$ は BA に等しい。そして ΓA が AB に等しいことも先に証明された。それゆえ ΓA，ΓB の双方は AB に等しい。ところで同じものに等しいものは互いにも等しい。ゆえに ΓA も ΓB に等しい。したがって3線分 ΓA，AB，$B\Gamma$ は互いに等しい。

よって三角形 $AB\Gamma$ は等辺である。しかも与えられた線分 AB 上につくられている。これが作図すべきものであった。

2

与えられた点において与えられた線分に等しい線分をつくること。

与えられた点を A，与えられた線分を $B\Gamma$ とせよ。このとき点 A において与えられた線分 $B\Gamma$ に等しい線分をつくらねばならぬ。



点 A から点 B へ線分 AB が結ばれ，その上に等辺三角形 ΔAB がつくられ，線分 AE，BZ が ΔA，ΔB と一直線をなして延長され，中心 B，半径 $B\Gamma$ をもって円 $\Gamma H\Theta$ が描かれ，また中心 Δ，半径 ΔH をもって円 $HK\Lambda$ が描かれたとせよ。

そうすれば点 B は $\Gamma H\Theta$ の中心であるから，$B\Gamma$ は

第 5 巻

定　義

1. 小さい量は，大きい量を割り切るときに，大きい量の約量である。
2. そして大きい量は，小さい量によって割り切られるときに，小さい量の倍量である。
3. 比とは同種の二つの量の間の大きさに関するある種の関係である。
4. 何倍かされて互いに他より大きくなりうる2量は相互に比をもつといわれる。
5. 第1の量と第3の量の同数倍が第2の量と第4の量の同数倍に対して，何倍されようと，同順にとられたとき，それぞれ共に大きいか，共に等しいか，または共に小さいとき，第1の量は第2の量に対して第3の量が第4の量に対すると同じ比にあるといわれる。
6. 同じ比をもつ2量は比例するといわれるとせよ。
7. 同数倍された量のうち，第1の量の倍量が第2の量の倍量より大きいが，第3の量の倍量が第4の量の倍量より大きくないとき，第1の量は第2の量に対して第3の量が第4の量に対するより大きい比をもつといわれる。
8. 比例は少なくとも三つの項をもつ。
9. 三つの量が比例するとき，第1の量は第3の量に対して第2の量に対する比の2乗の比をもつといわれる。
10. 四つの量が比例するとき，第1の量は第4の量に対して第2の量に対する比の3乗の比をもつといわれる，そして何個の量が比例しようと常につぎつぎに同様である。
11. 前項は前項に対し，後項は後項に対し対応する量とよばれる。
12. 錯比とは前項に対し前項を，後項に対し後項をとることである。
13. 逆比とは後項を前項とし，前項を後項としてとることである。
14. 比の複合とは前項と後項との和を後項そのものに対してとることである。
15. 比の分割とは前項と後項の差を後項そのものに対してとることである。
16. 比の反転とは前項を前項と後項の差に対してとることである。

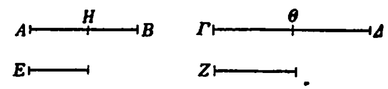
8

17. 等間隔比とはいくつかの量と，それと同じ個数で，かつ2個ずつとられるとき，同じ比をなす他の量とがあり，第1の量において初項が末項に対するように，第2の量において初項が末項に対する場合である。いいかえれば内項をぬかして外項をとることである。
18. 乱比例とは三つの量とそれらと同じ個数の他の量とがあり，第1の量において前項が次項に対するように，第2の量において前項が次項に対し，第1の量において次項が第3項に対するように，第2の量において第3項が前項に対する場合である[*]。

1

もし任意個の量があり，それと同数の他の任意個の量のそれぞれ同数倍であるならば，それらの量の一つが一つの何倍であろうと，全体も全体の同じ倍数であろう。

任意個の量 AB, $\Gamma\Delta$ がそれと同数の他の任意個の量 E, Z のそれぞれ同数倍であるとせよ。AB が E の何倍であろうと，AB, $\Gamma\Delta$ の和も E, Z の和の同じ倍数であろうと主張する。



AB は E の，$\Gamma\Delta$ は Z の同数倍であるから，AB のなかにある E に等しい量と同じ個数の，Z に等しい量が $\Gamma\Delta$ のなかにある。AB が E に等しい量 AH, HB に，$\Gamma\Delta$ が Z に等しい量 $\Gamma\Theta$, $\Theta\Delta$ に分けられたとせよ。そうすれば AH, HB の個数は $\Gamma\Theta$, $\Theta\Delta$ の個数に等しいであろう。そして AH は E に，$\Gamma\Theta$ は Z に等しいから，AH は E に，AH, $\Gamma\Theta$ の和は E, Z の和に等しい。同じ理由で HB は E に，HB, $\Theta\Delta$ の和は E, Z の和に等しい。それゆえ AB のなかにある E に等しい量と同数の，E, Z に等しい量が AB, $\Gamma\Delta$ のなかにある。ゆえに AB が E の何倍であろうと AB, $\Gamma\Delta$ の和も E, Z の和の同じ倍数である。

よってもし任意個の量があり，それと同数の他の任意個の量のそれぞれ同数倍であるならば，それらの量の一つが一つの何倍であろうと，全体も全体の同じ倍数であろう。これが証明すべきことであった[**]。

---

[*] 命題 21, 22 によると，乱比例とは第1の量において前項が次項に対するように，第2の量において次項が第3項に対し，第1の量において次項が第3項に対するように，第1の量において前項が次項に対する場合である。

[**] 量を $a, b, c, \cdots\cdots$ 等であらわすとき，命題 1 の内容は現代の記号法をつかえば，M を自然数とするとき，
$$Ma+Mb+Mc+\cdots\cdots=M(a+b+c+\cdots\cdots)$$
とかける。

第 7 巻

定　義

1. 単位とは存在するもののおのおのがそれによって 1 とよばれるものである。
2. 数とは単位から成る多である。
3. 小さい数が大きい数を割り切るとき，小さい数は大きい数の約数である。
4. 割り切らないときには約数和である。
5. そして大きい数が小さい数によって割り切られるとき，大きい数は小さい数の倍数である。
6. 偶数とは 2 等分される数である。
7. 奇数とは 2 等分されない数，または偶数と単位だけ異なる数である。
8. 偶数倍の偶数とは偶数で割られて商が偶数になる数である。
9. 偶数倍の奇数とは偶数で割られて商が奇数になる数である。

[10. 奇数倍の偶数とは奇数で割られて商が偶数になる数である。]

11. 奇数倍の奇数とは奇数で割られて商が奇数になる数である。
12. 素数とは単位によってのみ割り切られる数である。
13. 互いに素である数とは共通の尺度としての単位によってのみ割り切られる数である。
14. 合成数とは何らかの数によって割り切られる数である。
15. 互いに合成的な(素でない)数とは共通な尺度としての何らかの数によって割り切られる数である。
16. 数を数にかけるといわれるのは先の数のなかにある単位の数と同じ回数だけかけられる数が加え合わされて何らかの数が生ずるときである。
17. 二つの数が互いにかけあわせて何らかの数をつくるとき，その積は平面数であり，その辺は互いにかけあわせた数である。
18. 三つの数が互いにかけあわせて何らかの数をつくるとき，その積は立体数であり，その辺は互いにかけあわせた数である。

定義は 23 まで 続く.

(9)

第 10 巻

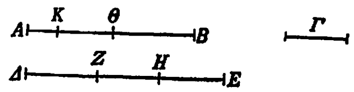
定　義 I

1. 同じ尺度によって割り切られる量は通約できる量といわれ，いかなる共通な尺度ももちえない量は通約できない量といわれる。
2. 二つの線分はそれらの上の正方形が同じ面積によって割り切られるときには，平方において通約でき，それらの上の正方形が共通な尺度としていかなる面積をももちえないときには通約できない。
3. これらのことが仮定されると次のことが証明される，すなわち定められた線分と長さにおいてのみ，あるいは平方においても通約できるおよび通約できない無数の線分がある。そこで定められた線分が有理とよばれるとし，それと長さと平方において，あるいは平方においてのみ通約できる線分が有理，それと通約できない線分が無理とよばれるとせよ。
4. そして定められた線分上の正方形が有理，それと通約できる面積が有理，それと通約できない面積が無理とよばれ，そしてこれら無理面積に等しい正方形の辺が無理とよばれるとせよ，すなわち無理面積が正方形であるならば，辺そのものが，また何か他の直線図形であるならば，それに等しい正方形の辺が，無理線分である。

1

二つの不等な量が定められ，もし大きいほうの量からその半分より大きい量がひかれ，残りからまたその半分より大きい量がひかれ，これがたえずくりかえされるならば，最初に定められた小さいほうの量よりも小さい何らかの量が残されるに至るであろう。

AB，Γ を二つの不等な量とし，そのうち AB が大きいとせよ。もし AB からその半分より大きい量がひかれ，残りからまた



Pappus 『集成』 第7巻より

1－2　アレクサンドリアのパッポスの註釈

親愛なるヘルモドロスよ，いわゆる「解析論」は，要言すれば，共通の『原論』をなし終えた後で，線〔の作図〕に関して提起された問題への解を見いだす力を得ようとするもののために準備された特別の素材のことであり，このためにのみ有益であったものだ．ところで，それは3人，すなわち『原論』の著者ユークリッド，ペルゲーのアポロニオス，年長者のアリスタイオスによって書かれたもので，解析〔と総合〕の手順を用いているものである．

さて，解析は求められていることから，あたかもそれが確かめられているかのように見なし，順々に〔それから〕従うものを通して，総合の結果として確かめられている事柄まで行く途（ὁδός）である．〔一方，解析においては，われわれは求められていることをなしとげられているように仮定し，それが何から従ってくるかを調べ，そしてさらに，出てきたものの前のものを調べ，こうして遡行を行ないすでに知られている事柄にわれわれが達するか，もしくは第一原理の状態を得るまで行なってゆく．そしてこのような方法を，逆向きの解法（ἀνάπαλιν λύσις）のようにとり，解析とわれわれは呼んでいるのである．他方の総合においては，手順を逆にして，解析において最後に残されたものをすでになされているとし，それからそこでは前提であったものを帰結とする自然の順序によって，それらをたがいに連結して，われわれはついに求められているものの構成（作図）に到達する．そして，これをわれわれは総合と呼んでいるのである.〕

ところで解析の種類は2つある．一方は真であることを求めるものであり，これは理論的と呼ばれ，他方は提起された〔問題の解を〕与えるものであって，問題的なものと呼ばれる．さて，理論的な種類においては，われわれは求められているものを，存在し，真理であると仮定し，それから仮定によって順に〔そこから〕従う事柄を通して，それらを真で，かつ存在するものとみなし，確かめられたあるものまでゆく．もし確かめられたものが真ならば，求められていたものも真であり，そして証明（ἀπόδειξις）は解析の逆となるであろうし，われわれがたまたま偽の確かめられているものに達した時には，求められているものも偽であろう．他方，問題的な種類においては，問題を知られているものと仮定し，それから真であるとして順に〔そこから〕従うものを通して，確かめられているものまでゆく．もし確かめられている事柄が可能で得られるもの，すなわち数学に携わるものたちが与えられた，と呼ぶものであるなら，問題もまた可能であり，そして再び証明は解析の逆となるであろう．もし確かめられているものが不可能であるものにわれわれが到達する場合には，問題もまた不可能であろう．

そのようなわけで，解析〔と総合〕についてはそれまでにしておく[13]．

マイケル・S・マホーニイ「ギリシアの幾何学的解析のもうひとつの見方」『歴史の中の数学』ちくま学芸文庫 2007年 所収

in Thomas L. Heath The Work of Archimedes

On the Sphere and Cylinder Book II

But OA is equal to the height of the cone C; therefore, since cones are equal if their bases and heights are reciprocally proportional, it follows that the cone C (or the solid sector $OBAB'$) is equal to a cone whose base is the circle on BB' as diameter and whose height is equal to OH.

And this latter cone is equal to the sum of two others having the same base and with heights OM, MH, i.e. to the solid rhombus $OBHB'$.

Hence the sector $OBAB'$ is equal to the rhombus $OBHB'$.

Taking away the common part, the cone OBB',

$$\text{the segment } BAB' = \text{the cone } HBB'.$$

Similarly, by the same method, we can prove that

$$\text{the segment } BA'B' = \text{the cone } H'BB'.$$

Alternative proof of the latter property.

Suppose D to be a cone whose base is equal to the surface of the whole sphere and whose height is equal to OA.

Thus D is equal to the volume of the sphere. [I. 33, 34]

Now, since $OA' + A'M : A'M = HM : MA$,

dividendo and *alternando*, as before,

$$OA : AH = A'M : MA.$$

Again, since $H'M : MA' = OA + AM : AM$,

$$H'A' : OA = A'M : MA$$
$$= OA : AH, \text{ from above.}$$

Componendo, $H'O : OA = OH : HA$ ....(1).

Alternately, $H'O : OH = OA : AH$ ....(2),

and, *componendo*, $HH' : HO = OH : HA$,

$$= H'O : OA, \text{ from (1)},$$

whence $HH'.OA = H'O.OH$ ....(3).

Next, since $H'O : OH = OA : AH$, by (2),

$$= A'M : MA,$$

$$(H'O + OH)^2 : H'O.OH = (A'M + MA)^2 : A'M.MA,$$

11

whence, by means of (3),

$$HH'^2 : HH'.OA = AA'^2 : A'M.MA,$$

or $HH' : OA = AA'^2 : BM^2$.

Now the cone D, which is equal to the sphere, has for its base a circle whose radius is equal to AA', and for its height a line equal to OA.

Hence this cone D is equal to a cone whose base is the circle on BB' as diameter and whose height is equal to HH';

therefore the cone D = the rhombus $HBH'B'$,

or the rhombus $HBH'B'$ = the sphere.

But the segment BAB' = the cone HBB';

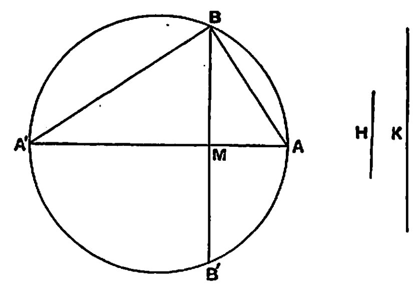
therefore the remaining segment $BA'B'$ = the cone $H'BB'$.

COR. *The segment BAB' is to a cone with the same base and equal height in the ratio of $OA' + A'M$ to $A'M$.*

Proposition 3. (Problem.)

To cut a given sphere by a plane so that the surfaces of the segments may have to one another a given ratio.

Suppose the problem solved. Let AA' be a diameter of a great circle of the sphere, and suppose that a plane perpendicular to AA' cuts the plane of the great circle in the straight



line BB', and AA' in M, and that it divides the sphere so that the surface of the segment BAB' has to the surface of the segment $BA'B'$ the given ratio.

Now these surfaces are respectively equal to circles with radii equal to AB, $A'B$ [I. 42, 43].

Hence the ratio $AB^2 : A'B^2$ is equal to the given ratio, i.e. AM is to MA' in the given ratio.

Accordingly the synthesis proceeds as follows.

If $H : K$ be the given ratio, divide AA' in M so that

$$AM : MA' = H : K.$$

Then $AM : MA' = AB^2 : A'B^2$

$= $ (circle with radius AB) : (circle with radius $A'B$)

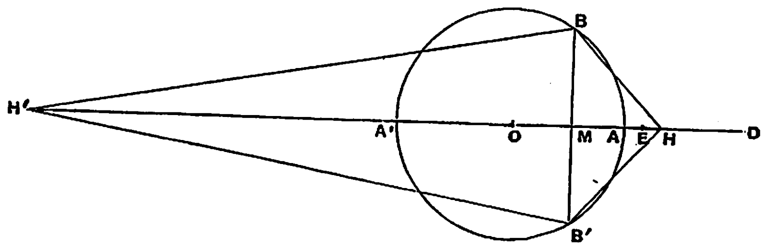
$= $ (surface of segment BAB') : (surface of segment $BA'B'$).

Thus the ratio of the surfaces of the segments is equal to the ratio $H : K$.

Proposition 4. (Problem.)

To cut a given sphere by a plane so that the volumes of the segments are to one another in a given ratio.

Suppose the problem solved, and let the required plane cut the great circle ABA' at right angles in the line BB'. Let AA' be that diameter of the great circle which bisects BB' at right angles (in M), and let O be the centre of the sphere.



Take H on OA produced, and H' on OA' produced, such that

$$OA' + A'M : A'M = HM : MA, \qquad\text{.............(1)},$$

and $$OA + AM : AM = H'M : MA' \qquad\text{.............(2)}.$$

Join BH, $B'H$, BH', $B'H'$.

Then the cones HBB', $H'BB'$ are respectively equal to the segments BAB', $BA'B'$ of the sphere [Prop. 2].

Hence the ratio of the cones, and therefore of their altitudes, is given, i.e.

$$HM : H'M = \text{the given ratio} \qquad\text{..............(3)}.$$

We have now three equations (1), (2), (3), in which there appear three as yet undetermined points M, H, H'; and it is first necessary to find, by means of them, another equation in which only one of these points (M) appears, i.e. we have, so to speak, to *eliminate* H, H'.

Now, from (3), it is clear that $HH' : H'M$ is also a given ratio; and Archimedes' method of elimination is, *first*, to find values for each of the ratios $A'H' : H'M$ and $HH' : H'A'$ which are alike independent of H, H', and then, *secondly*, to equate the ratio compounded of these two ratios to the known value of the ratio $HH' : H'M$.

(*a*) To find such a value for $A'H' : H'M$.

It is at once clear from equation (2) above that

$$A'H' : H'M = OA : OA + AM \qquad\text{............(4)}.$$

(*b*) To find such a value for $HH' : A'H'$.

From (1) we derive

$$A'M : MA = OA' + A'M : HM$$
$$= OA' : AH \qquad\text{....................(5)};$$

and, from (2), $$A'M : MA = H'M : OA + AM$$
$$= A'H' : OA \qquad\text{....................(6)}.$$

Thus $\quad HA : AO = OA' : A'H'$,

whence $\quad OH : OA' = OH' : A'H'$,

or $\quad OH : OH' = OA' : A'H'$.

It follows that

$$HH' : OH' = OH' : A'H',$$

or $\quad HH' . H'A' = OH'^2$.

Therefore $\quad HH' : H'A' = OH'^2 : H'A'^2$

$= AA'^2 : A'M^2$, by means of (6)

(c) To express the ratios $A'H' : H'M$ and $HH' : H'M$ more simply we make the following construction. Produce OA to D so that $OA = AD$. (D will lie beyond H, for $A'M > MA$, and therefore, by (5), $OA > AH$.)

Then $$A'H' : H'M = OA : OA + AM$$
$$= AD : DM \quad\text{.....................(7).}$$

Now divide AD at E so that
$$HH' : H'M = AD : DE \quad\text{.................(8).}$$

Thus, using equations (8), (7) and the value of $HH' : H'A'$ above found, we have
$$AD : DE = HH' : H'M$$
$$= (HH' : H'A') . (A'H' : H'M)$$
$$= (AA'^2 : A'M^2) . (AD : DM).$$

But $$AD : DE = (DM : DE) . (AD : DM).$$

Therefore $$MD : DE = AA'^2 : A'M^2 \quad\text{.................(9).}$$

And D is given, since $AD = OA$. Also $AD : DE$ (being equal to $HH' : H'M$) is a given ratio. Therefore DE is given.

Hence the problem reduces itself to the problem of dividing $A'D$ into two parts at M so that
$$MD : (\text{a given length}) = (\text{a given area}) : A'M^2.$$

Archimedes adds: "If the problem is propounded in this general form, it requires a διορισμός [i.e. it is necessary to investigate the limits of possibility], but, if there be added the conditions subsisting in the present case, it does not require a διορισμός."

In the present case the problem is:

Given a straight line $A'A$ produced to D so that $A'A = 2AD$, and given a point E on AD, to cut AA' in a point M so that
$$AA'^2 : A'M^2 = MD : DE.$$

"And the analysis and synthesis of both problems will be given at the end*."

The synthesis of the main problem will be as follows. Let $R : S$ be the given ratio, R being less than S. AA' being a

* See the note following this proposition.

diameter of a great circle, and O the centre, produce OA to D so that $OA = AD$, and divide AD in E so that
$$AE : ED = R : S.$$

Then cut AA' in M so that
$$MD : DE = AA'^2 : A'M^2.$$

Through M erect a plane perpendicular to AA'; this plane will then divide the sphere into segments which will be to one another as R to S.

Take H on $A'A$ produced, and H' on AA' produced, so that
$$OA' + A'M : A'M = HM : MA, \quad\text{..............(1),}$$
$$OA + AM : AM = H'M : MA' \quad\text{...........(2).}$$

We have then to show that
$$HM : MH' = R : S, \text{ or } AE : ED.$$

(α) We first find the value of $HH' : H'A'$ as follows.

As was shown in the analysis (b),
$$HH' . H'A' = OH'^2,$$
or $$HH' : H'A' = OH'^2 : H'A'^2$$
$$= AA'^2 : A'M^2$$
$$= MD : DE, \text{ by construction.}$$

(β) Next we have
$$H'A' : H'M = OA : OA + AM$$
$$= AD : DM.$$

Therefore $$HH' : H'M = (HH' : H'A') . (H'A' : H'M)$$
$$= (MD : DE) . (AD : DM)$$
$$= AD : DE,$$

whence $$HM : MH' = AE : ED$$
$$= R : S. \qquad \text{Q. E. D.}$$

Note. The solution of the subsidiary problem to which the original problem of Prop. 4 is reduced, and of which Archimedes promises a discussion, is given in a highly interesting and important note by Eutocius, who introduces the subject with the following explanation.

著作名	内容・その他
(1)『球と円柱について 第一巻～二巻』(περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου)	球と円柱の表面積と体積についての研究。ドシテオスあての序文つき。
(2)『円の計測』(κύκλου μέτρησις)	円の方形化と円周率の計算。
(3)『円錐状体と球状体について』(περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων)	回転放物線体、回転双曲線体、回転楕円体の体積についての研究。ドシテオスあての序文つき。
(4)『螺線について』(περὶ ἑλίκων)	螺線への接線を使う円の求長と、螺線と線分で囲まれた図形の求積。ドシテオスあての序文つき。
(5)『平面板の平衡について 第一～二巻』('Επιπέδων ἰσορροπιῶν)	“てこの原理”の一般的証明と、平面図形の重心についての研究。
(6)『砂粒を算えるもの』(ψαμμίτης)	大数の呼び名の体系化。ゲロン王への序文つき。
(7)『放物線の求積』(τετραγωνισμὸς παραβολῆς)	放物線と線分で囲まれた図形の機械学と幾何学による求積。ドシテオスあての序文つき。
(8)『浮体について 第一～二巻』('Οχουμένων)	流体静力学の基礎的研究——“アルキメデスの原理”と流体中の立体の静止と安定条件。
(9)『ストマキオン』(Στομαχίον)	数学パズル。断片のみが残っている。
(10)『方法』(περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς 'Ερατοσθένην ἔφοδος)	平面図形や立体の求積や重心の位置の機械学的発見法。エラトステネスあての序文つき。
(11)『補助定理集』	半円に囲まれた図形の面積や角の三等分についての研究。アラビア訳で残っている。
(12)『牛の問題』(πρόβλημα βοεικόν)	不定方程式の問題。

伊東俊太郎 編

『アルキメデス』 科学の名著 (9)

1981年 朝日出版社

(十一)

伊東俊太郎ほか『数学の歴史I：ギリシャの数学』
共立出版 (1979)

ジェラルドの命題1の翻訳（[C1]）

すべての円は，直角を挟んでいる二つの辺のうちの1辺が，その円の直径の半分に等しく，もう一つの辺が円を囲む線に等しいような直角三角形に等しい[1]．

ハイベルク版の命題1（[H-S]）

すべての円は，その半径が直角を挟む1辺に等しく，その周が底辺に等しいような直角三角形に等しい[2]．

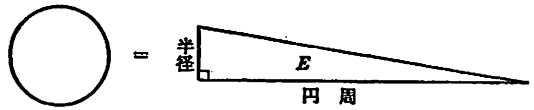


図 3.10

そこで，すでに命題においてわれわれが述べたことに従って，円 $AB\Gamma\Delta$ が三角形 E に等しいとせよ．そこで一方の大きさが他方の大きさに等しいと主張する．

さてもしそうでないとすると，円は三角形より大きいか小さいかであろう[1]．そこでまずより大きいとせよ．さて円の中に正方形 $AB\Gamma\Delta$ をつくるとせよ．すると，円 $AB\Gamma\Delta$ からその半分より大きな部分，すなわち正方形 $AB\Gamma\Delta$ が分離される．さらに，弧 AB を点 Z で2等分し，（他の）同様な弧も同じように2等分されたとせよ．そして AZ と ZB，そして同様なものを結ぶとせよ．すると円 $AB\Gamma\Delta$ の残っている部分から，その半分より大きな部分，すなわち（三角形）AZB およびそれと同様なものがさらに分離される[1]．

円 $AB\Gamma\Delta$ が三角形 E に対して，仮定されたような状態にあるとせよ．

（円が三角形に）等しいと主張する[3]．

なぜなら，もし可能ならば[2]，円が（三角形より）大きいとせよ．そして正方形 $A\Gamma$ が内接され，

弧が2等分されたとせよ．

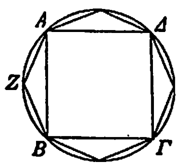


図 3.11

それゆえ，引き続いてこのように繰り返すと，円が三角形 E を凌駕する差より小さい部分が残るであろう[5]．そしてそのとき，円が含んでいる直線図形（内接多角形）は三角形より大きいであろう[5]．そこで AZB とそれに同様なものをそのような図形とせよ．ところで円の中心 N を定め，垂線 $N\Xi$ をひくとせよ．すると線 $N\Xi$ は，直角を挟んでいる三角形の二つの辺のうちの1辺より小さい[6]．そして多角形を囲んでいる線は，他の残りの1辺より小さい．なぜなら，その線は円の周囲より小さいから．

さて，直角を挟んでいる三角形の2辺のうちの1辺と他方の辺との積，すなわち三角形の面積の2倍は，$N\Xi$ と多角形を囲んでいる線との積，すなわち多角形の2倍より大きい[1]．そこでこれから，三角形は多角形より大きい．しかしながら（三角形は多角形より）小さかった[2]．これは全く矛盾しており，不可能である[4]．

またもし可能ならば[5]，円が三角形 E より小さいとせよ．さて円の上に円を囲む正方形をつくるとせよ．そしてその正方形を KO とせよ．さて確かに正方形 KO から，その半分より大きな部分，すなわち円が分離される．さらに，弧 ZM とそれと同様な弧を2等分せよ．すると2等分する点を通る線は円に接する．そのとき，線 ΠP はまた点 A で2等分される．そして線 OA は ΠP に

そしてついに[1]切片が，円が三角形を凌駕する差[2]より小さくなったとせよ[3]．
すると直線図形[4]は，さらに三角形よりも大きい[5]．

中心 N と垂線 $N\Xi$ がとられたとせよ．すると $N\Xi$ は三角形の辺より小さい．

そしてまた，直線図形の周は，残りの辺より小さい．なぜならそれは，円の周よりも小さいから．

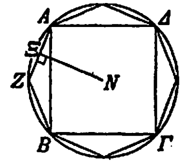


図 3.12

したがって，直線図形は三角形 E より小さい．

それは不合理である[3]．

さてもし可能ならば[5]，円が三角形 E より小さいとせよ．そして正方形が外接され，

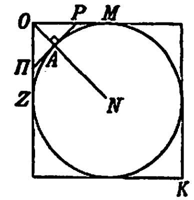


図 3.13

弧が2等分され，それらの点を通って接線がひかれたとせよ．
すると角 OAP[6] は直角である．

垂直であり，それと同じような線も同様である．そして ΠO と OP（の和）は ΠP より大きく[1]，（ΠO と OP の和の）半分は（ΠP の）半分より大きい[2]から，線 OP は PA，すなわち PM より大きい．それゆえ，三角形 AOP は三角形 AOM の半分より大きい．そしてそれは，二つの線 AO と OM と弧 MA によって囲まれた図形 AOM の半分よりなおさら大きいであろう[3]．そして同様に，三角形 $OA\Pi$ は図形 OAZ の半分より大きいであろう[4]．それゆえ，$PO\Pi$ 全体は，二つの線 ZO と OM と弧 ZAM によって囲まれた図形 $ZAMO$ の半分より大きい[5]．そして同様に，同じような三角形は他の同様な図形の半分より大きい[6]．それゆえ，引き続いてこのように繰り返すと，合計されるとき，三角形 E が円 $AB\Gamma\Delta$ を凌駕する差より小さいような部分が円のまわりに残るであろう[7]．そこで図形 $A\Pi Z$ とそれに同様なものが残ったとせよ．そこでそのとき，円を含む直線図形は三角形 E より小さいであろう[8]．しかしこれは全く不可能である．なぜなら，それは（三角形 E より）大きいから．というのは，NA は三角形の高さに等しく，多角形を囲んでいる

線は円を囲む線より大きいゆえに，直角を挟んでいる三角形の残りの辺より大きい．それゆえ，AN と多角形を囲んでいる線との積は，直角を挟んでいる三角形の２辺のうちの１辺と他方の辺との積より大きい．そこで円は三角形 E より小さくない[1]．そしてすでに最初の部分で，円が三角形 E より大きくないことが明らかにされた[2]．それゆえ円 $AB\Gamma\Delta$ は三角形 E に等しい．

したがって，OP は MP より大きい．なぜなら PM は PA に等しいから．

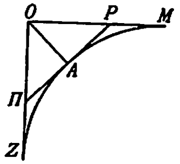


図 3.14

それゆえ，三角形 $PO\Pi$ は図形 $OZAM$ の半分より大きい[4]．

（三角形）E が円 $AB\Gamma\Delta$ を凌駕する差より小さな，切片 ΠZA に相似なもの（の和）が後に残されたとせよ[7]．

すると外接直線図形は，さらに（三角形）E より小さい[8]．
それは不合理である．

なぜなら，NA は三角形の垂直な高さに等しく，（外接直線図形の）周は三角形の底辺より大きいので，（外接直線図形は三角形 E より）大きいから．

したがって，円は三角形 E に等しい．

系 1　（[H-S] にはない．）　ハイベルク版

なおまた，三角形 E の面積は，その垂線とその底辺の半分との積に等しく，そしてその垂線は（円）$AB\Gamma\Delta$ の直径の半分に等しく，その底辺は円 $AB\Gamma\Delta$ の周囲に等しいので，直径の半分と円周の半分との積は，三角形 E の面積に等しいと認められた図形の面積である[3]．

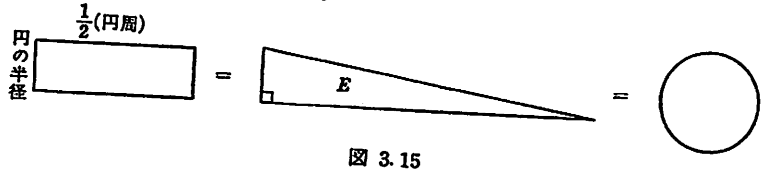


図 3.15

系 2　（[H-S] にはない．）

そしてこのことから，直径の半分と円周の一部分の半分との積は，その（円周の）一部分と，その両端から中心までひかれた二つの線によって囲まれた図形の面積になるであろう．そしてこのことが証明しようとしたことである[1]．

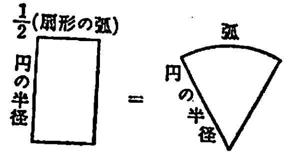


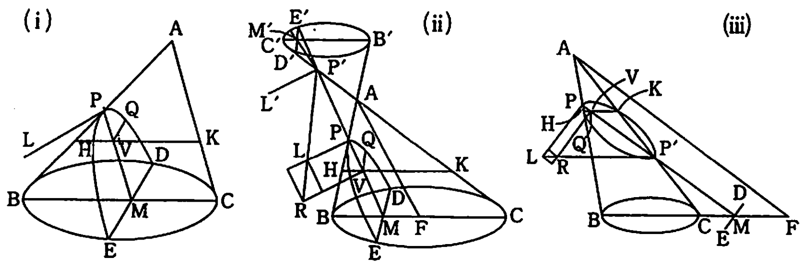
図 3.16

三浦伸夫『数学の歴史』 放送大学教育振興会 2013年

れている.

古代最高の幾何学書とも言える彼の主著『円錐曲線論』は，本来8巻からなるが，ギリシャ語で現存するのはそのうち1-4巻のみである．さらに5-7巻のアラビア語訳が残っているが，第8巻は失われ，17世紀にエドマンド・ハリー（1656頃-1743）などによって復元が試みられた．古代においては難解ゆえにその後すぐヘロンなどによって書き換えが行われ，後に代数学の成立とともにアラビアそして近代西洋では代数的解釈がなされるようになった．実際，代数学を使えばかなり見通しよい理解が出来ることも事実である．他方で後にパスカル（1623-62）がしたように，代数ではなく射影幾何学を用いた解釈の伝統も存在する．

それまで円錐曲線（英語では conic sections）は直円錐の切断の切り口の形によって定義されてきたが，アポロニオスは任意の斜円錐（円の中心と頂点とを結ぶ線が，底面と斜交する円錐）の切断面として定義したところに彼の議論の一般性がある．いまその性質を概観しておこう．



【図⑦　円錐の切断（出典：近藤洋逸『数学の誕生』，現代数学社，p. 205）

図⑦のように，PM が，(i)AC と平行，(ii)CA の延長 AC′ で交わる，(iii)AC 上で交わる，に応じて3種の円錐曲線が存在する．

ここで P を通り切断面に垂直な線分 PL（通径またはパラメーターと呼ばれる）を引き，

$PL : PA = BC^2 : BA \cdot AC$　図(i)

$PL : PP' = BF \cdot FC : AF^2$　図(ii)，(iii)

とする．図(ii)，(iii)のときにはさらに P′L を結び，P′L 上または P′L の延長上の点を R とし，PL//VR とする．V を通り BC に平行に HK を引く．すると $QV^2 = HV \cdot VK$ となる．

ここで図(ii)，(iii)のとき，

$HV : PV = BF : AF$

$VK : P'V = FC : AF$

となる．各項を掛けて，

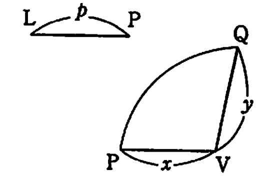
$HV \cdot VK : PV \cdot P'V = BF \cdot FC : AF^2$.

仮定と三角形の相似から

$QV^2 : PV \cdot P'V = PL : PP' = VR : P'V = PV \cdot VR : PV \cdot P'V$.

$\therefore\ QV^2 = PV \cdot VR$.

さて図(ii)では，QV^2 に等積な長方形を PL に布置し，そのとき幅を PV とすると，これは PV と PL とからなる長方形より LR だけ超過し，図(iii)では LR だけ不足する．よってそれぞれの曲線は，超過する布置（ヒュペルボレー）（ὑπερβολή）からラテン語で hyperbola，不足する布置（エッレイプシス）（ἔλλειψις）から ellipsis と呼ばれるようになった．そして図(i)の曲線は，傍らに布置（パラボレー）（παραβολή）するから parabola と呼ばれるようになった．ここで $PV = x$，$QV = y$，$PL = p$ と置くと，図(i)，(ii)，(iii)は今日の放物線，双曲線，楕円の式を示すことは明らかである（図⑧参照）．この準備の後，アポロニオスは円錐曲線に関して様々な命題を幾何学的に証明している．



【図⑧　パラボラと $y^2 = px$】

イスラーム科学の時代区分と数学の著作

年代	社会的な出来事	科学史的な区分	
VI 570?	マホメット生まれる		
622 VII 661	ヘジラ（回教元年） ダマスクスにウマイヤ朝おこる		
750 VIII 755/6	バクダットにアッバース朝おこる 766 バグダート遷都 コルトバに後ウマイヤ朝おこる	ギリシア科学の翻訳．はじまる	
IX	アッバース朝全盛期 「知恵の館」建設	翻訳時代	フワリーズミー（820年頃） 『インド式計算による加減の書』 825『ジャブルとムカーバラの…』 イブン・トゥルク
909 X 972	後ウマイヤ朝全盛期 エジプトにファーティマ朝おこる ファーティマ朝、新カイロ市を建設	翻訳と研究	ウクリーディースィー 952『インド式計算について』
1031 XI	後ウマイヤ朝滅びる （諸国王のもとで科学はなお栄える）		（1048－1131） ハイヤーミー（3次方程式） 『ジャブルとムカーバラの…』
XII 1171	エジプトのファーティマ朝滅びる	西欧への移入	サマウアル（べき乗の法則） 1172『算術教程』
XIII 1258	マメルク朝おこる（エジプト） モンゴル人のバクダート占領		トゥースィー 『方程式について』
XIV			
XV			カーシー（小数の表記法）
XVI 1517	マメルク朝滅亡		

equation of al-Mâhâni. See Woepcke, *L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi*, p. 3; A. Sédillot, *Sur les instruments astronomiques des arabes*, pp. 154-162 and 185-191; Heath, *Euclid*, vol. I, p. 85, and Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber*, 1900, p. 58.

19

Daud S Kasir

The Algebra of Omar Khayyam

AMS press 1931

CHAPTER I

DEFINITIONS

Algebra. By the help of God and with His precious assistance, I say that Algebra is a scientific art. The objects with which it deals are absolute numbers and measurable quantities which, though themselves unknown, are related to "things" which are known, whereby the determination of the unknown quantities is possible. Such a thing is either a quantity or a unique relation, which is only determined by careful examination. What one searches for in the algebraic art are the relations which lead from the known to the unknown, to discover which is the object of Algebra [1] as stated above. The perfection of this art consists in knowledge of the scientific method by which one determines numerical and geometric unknowns.

Measurable Quantities. By measurable quantities I mean continuous quantities of which there are four kinds, viz., line, surface, solid, and time, according to the customary terminology of the Categories [2] and what is expounded in metaphysics.[3] Some consider space a subdivision of surface, subordinate to the division of continuous quantities, but investigation has disproved this claim. The truth is that space is a surface only under circumstances the determination of which is outside the scope of the present field of investigation. It is not customary to include "time" among the objects of our algebraic studies, but if it were mentioned it would be quite admissible.

The Unknown. It is a practice among algebraists in connection with their art to call the unknown which is to be determined a "thing," [4] the product obtained by multiplying it by itself a "square," [5] and the product of the square and the "thing" itself a "cube." The product of the square multiplied by itself is "the square of the square," the product of its cube multiplied by its square "the cube of the square," and the product of a cube into itself "a cube of the cube," and so on, as far as the succession is carried out.[6] It is known from Euclid's book, the *Elements*,[7] that all the steps are in continuous proportion; i.e., that the ratio of one to the root is as the ratio of the root to the square and as the ratio of the square to the cube.[8] Therefore, the ratio of a number to a root is as the ratio of roots to squares, and squares to cubes, and cubes to the squares of the squares, and so on after this manner.[9]

Sources. It should be understood that this treatise cannot be comprehended except by those who know thoroughly Euclid's books, the *Elements* and the *Data,* as well as the first two books from Apollonius' work on *Conics.* Whoever lacks knowledge of any one of these books cannot possibly understand my work, as I have taken pains to limit myself to these three books only.

Algebraic Solutions. Algebraic solutions are accomplished by the aid of equations; that is to say, by the well-known method of equating these degrees one with the other. If the algebraist were to use the square of the square in measuring areas, his result would be figurative[10] and not real, because it is impossible to consider the square of the square as a magnitude of a measurable nature. What we get in measurable quantities is first one dimension, which is the "root"[11] or the "side"[12] in relation to its square; then two dimensions, which represent the surface and the (algebraic) square representing the square surface; and finally, three dimensions, which represent the solid.[13] The cube in quantities is the solid bounded by six squares, and since there is no other dimension, the square of the square does not fall under measurable quantities. This is even more true in the case of higher powers.[14] If it is said that the square of the square is among measurable quantities, this is said with reference to its reciprocal value in problems of measurement and not because it in itself is measurable. This is an important distinction to make.

The square of the square is, therefore, neither essentially nor accidentally a measurable quantity, and is not as even and odd numbers, which are accidentally included in measurable quantities, depending on the way in which they represent continuous measurable quantities as discontinuous.

What is found in the books of algebra relative to these four geometric quantities—namely, the absolute numbers, the "sides," the squares, and the cubes—are three equations containing numbers, sides, and squares. We, however, shall present methods by which one is able to determine the unknown quantities in equations including four degrees concerning which we have just said that they are

the only ones that can be included in the category of measurable quantities, namely, the number, the thing, the square, and the cube.

The demonstration[15] (of solutions) depending on the properties of the circle—that is to say, as in the two works of Euclid, the *Elements* and the *Data*—is easily effected; but what we can demonstrate only by the properties of conic sections should be referred to the first two books on conics.[16] When, however, the object of the problem is an absolute number,[17] neither we, nor any of those who are concerned with algebra, have been able to prove this equation—perhaps others who follow us will be able to fill the gap—except when it contains only the three first degrees, namely, the number, the thing, and the square.[18] For the numerical demonstration given in cases that could also be proved by Euclid's book, one should know that the geometric proof of such procedure does not take the place of its demonstration by number, if the object of the problem is a number and not a measurable quantity. Do you not see how Euclid proved certain theorems relative to proportions of geometric quantities in his fifth book, and then in the seventh book gave a demonstration of the same theorems for the case when their object is a number?[19]

BIBLIOGRAPHICAL AND EXPLANATORY NOTES

1. The author refers here to the algebraic relations existing between the known and the unknown quantities which the algebraist has to establish. For other Arabic definitions of algebra see *Haji Khalpha, Mohammed ibn Mûsâ,* by Karpinski, p. 67; *Mukadamat ibn Khaldûn,* p. 422 (Egypt).
2. *Category* of Aristotle, cap. 6; phys. lv, cap. 4 ult. According to Aristotle's definitions, point, line, and surface are first principles and must be assumed. Heath, *Euclid,* vol. I, pp. 155-156, 158, 159, 165, 170.
3. Here the author is referring to his book on metaphysics. See A. Christensen: *Un Traité de Métaphysique d'Omar. Le Monde Oriental,* 1908, vol. I, pp. 1-16.
4. The Arabic word *shai* (literally a "thing") here means the "unknown." Latin translators used the word *res.*
5. *Mal* (literally, "substances") is the word used by the author to indicate the second power of the unknown. Gherardo of Cremona (*c.* 1150) used *census,* which has the same meaning.
6. $x \cdot x = x^2$, $x \cdot x \cdot x = x^3$, $x^2 \cdot x^2 = x^4$, $x^2 \cdot x^3 = x^5$, $x^3 \cdot x^3 = x^6$.
7. *Elements of Euclid,* Heath, vol. II, p. 390.
8. E.g., $1 : x = x : x^2 = x^2 : x^3$.
9. E.g., $a : ax = ax : ax^2 = ax^2 : ax^3 = ax^3 : ax^4$, etc.
10. The literal translation of the Arabic word *majâz* is "path, way." The author means that a quantity raised to the fourth power cannot be represented geometrically and therefore has no real geometric meaning, while

イスラームから中世

未知数の記号化をめぐって

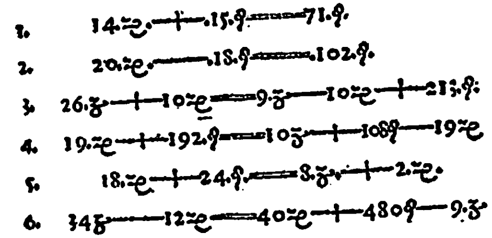
三浦伸夫『数学の歴史』
放送大学教育振興会（2013年）

$-$	لا (lā), من (min)	英語の minus に対応
$\times$	في (fi)	英語の in に対応
$\div$	علي (ʿalay)	英語の from に対応
$=$	ل	تعدل (taʿdil) より
x	ج	جذر (jiḏr) より
x^2	م	مال (māl) より
x^3	ك	كعب (kaʿb) より
x^4	مم	مال مال (māl māl) より
x^5	مش	مال شي (māl shay') より

【図⑥ アラビア語の省略記号】
12世紀後半のもの

cub⁹ p:6 reb⁹ æq̄lis 20	cubus p:6 rebus aequalis 20	$x^3+6x=20$
2 20	2 20	$\frac{6}{3}=2$ 20
8 —— 10	8 10	$2^3=8$ $\frac{20}{2}=10$
108	108	$8+10^2=108$
℞ 108 p:10	R 108 p : 10	$\sqrt{108}+10$
℞ 108 m:10	R 108 m : 10	$\sqrt{108}-10$
℞ v: cu.℞ 108 p:10	Rv : cu. R 108 p : 10	$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}$
m:℞ v:cu.℞ 108 m:10	m : Rv : cu.R 108 m : 10	$-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$

【図④ カルダーノの計算手順（$x^3+6x=20$）の図式(左端)とその現代表記】
『偉大なる術』（『アルス・マグナ』）1545年（イタリア）

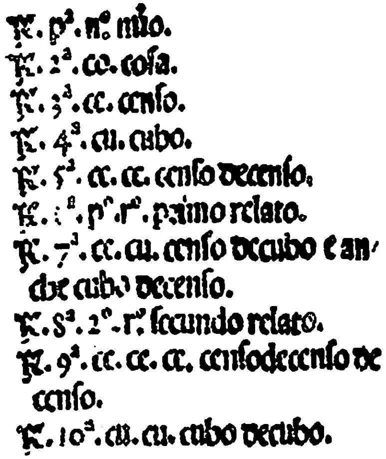


【図③ レコード『才知の砥石』の記号】
（6の式は，$34x^2-12x=40x+480-9x^2$）
1557年（ウェールズ）
［等号＝の起源］

アラビア語	意味	ラテン語	イタリア語	ドイツ語
shay' شي	モノ	res	cosa	Coss
māl مال	財	census	censo	zensus (czensi)
kaʿb كعب	立方体，立方	cubus	cubo	cubus (chubi)

【アラビア語未知数の中世西洋における表記法】

	略号	読み方
x^0	nº	numero
x^1	co	cosa
x^2	ce	censo
x^3	cu	cubo
x^4	ce ce	censo de censo
x^5	pº rº	primo relato
x^6	ce cu	censo de cubo (cubo de censo)
x^7	2º rº	secundo relato
x^8	ce ce ce	censo de censo de censo
x^9	cu cu	cubo de cubo



【図⑧ パチョーリ『スンマ』の未知数表記】
1492年（イタリア）

未知スペキエス	現代記号	既知スペキエス	現代記号
latus（辺）または radix（根）	x	longitudo(大きさ)または latitudo(幅)	a
quadratum（平方）	x^2	planum（平面）	a^2
cubus（立方）	x^3	solidum（立体）	a^3
quadrato-quadratum（立方-平方）	x^4	plano-planum（平面-平面）	a^4
quadrato-cubus（平方-立方）	x^5	plano-solidum（平面-立体）	a^5
cubo-cubus（立方-立方）	x^6	solido-solidum（立体-立体）	a^6
quadrato-quadrato-cubus(平方-平方-立方)	x^7	plano-plano-solidum（平面-平面-立体）	a^7
quadrato-cubo-cubus(平方-立方-立方)	x^8	plano-solido-solidum（平面-立体-平面）	a^8
cubo-cubo-cubus(立方-立方-立方)	x^9	solido-solido-solidum（立体-立体-立体）	a^9

【ヴィエトによる数学記号】『解析法序説』1591年（フランス）

Viète 『解析法序説』 導入部分　　V. Katz 『カッツ：数学の歴史』より

数学において真理を探求するための確かな方法があり，それはプラトンが最初に発見したといわれている．テオンは，それを解析と呼んだ……．古代人は二つの種類の解析，すなわち探求的解析 [zetetica] と補完的解析 [poristica] だけを提示したが，これらについてはテオンが最もよく定義している．しかし，私は，3番目として，解説的解析あるいは釈義的解析 [rhetica, exegetica] を加えた．探求的解析とは，求めるべき項と与えられた項との間に，方程式または比を構成する手続きであり，補完的解析とは，述べられている定理の真理性を，方程式または比を用いて検証する手続きであり，釈義的解析とは，与えられた方程式または比における未知の項の値を決定する手続きである．それゆえ，解析の技法全体は，このような3種類の機能を有するものであり，それは数学における正しい発見の学と呼ばれうるのである[26]．

Viète の 記号法　　中村幸四郎「数学史：形成の立場から」

B．ヴィエタの方程式論

ここで，上の論文（2）から2つの題目について考察しようと思う．

a．2次方程式の解法

2次方程式を純2次方程式に帰着させることについて

3つの公式（全集 p. 129~130)

I

A quad.$+B$2 in A, aequetur Z plano	$x^2+2bx=c^2$
とする．	
$A+B$ が E である	$x+b=y$
とおけば	
E quad, aequabitur Z plano$+B$ quad.	$y^2=c^2+b^2$
結　　論	
これから	
$\sqrt{Z \text{ plani}+B \text{ quad.}}-B$ が A となる	$x=\sqrt{c^2+b^2}-b$
これからはじめの方程式が解ける．	

II

A quad.$-B$ in A 2, aequetur Z plano.	$x^2-2bx=c^2$
とする．	
$A-B$ が E である	$x-b=y$
とおけば	
E quad., aequabitur Z plano$+B$ quad.	$y^2=c^2+b^2$
結　　論	
これから	
$\sqrt{Z \text{ plani}+B \text{ quad.}}+B$ が A となる．	$x=\sqrt{c^2+b^2}+b$
これからはじめの方程式が解ける．	

III

D 2 in $A-A$ quad., aequetur Z plano.	$2dx-x^2=c^2$
とする．	
$D-E$ あるいは $D+E$ が A である	$d-y$ あるいは $d+y=x$
とおけば	
E quad., aequabitur D quad.$-$ Z plano.	$y^2=d^2-c^2$
結　　論	
したがって	
D minus, plusve $\sqrt{D \text{ quad.}-Z \text{ plano}}$ が A となる．	$x=d\mp\sqrt{d^2-c^2}$．
これからはじめの方程式が解ける．	

この簡単な問題でも，ヴィエタの記号が計算と同時にそれを用いて一般的な推論をなし得るものであることがわかる．

b．3次方程式の解法　ヴィエタは，その記号法を駆使して，当時の中心問題であった3次方程式に，あざやかな解法を示している．(全集 p. 149)

I．A cubus$+B$ plano 3 in A, aequari Z solido 2	$x^3+3b^2x=2c^3$
II．A cubus$-B$ plano 3 in A,	$x^3-3b^2x=2c^3$

デカルト著作集4 白水社（一九七三年） 大出晁・有働勤吉共訳

「精神指導の規則」

ろで、私の考えでは、方法とは次のような確実で容易な諸規則のことをいう、すなわち、それらの規則を正確に守った人は誰でも、けっして偽りを真と思い誤ることはなく、また精神の努力を浪費せずに、常に一歩一歩知識を増しながら、認識可能なかぎりでのすべての事物の真なる認識に到達するであろうような規則である。

ここで、次の二つの点に注意せねばならない、すなわち、疑いもなく偽りであるものをけっして真なるものと思い誤らないこと、および、すべてのものの認識に到達するということ、の二点である。というのは、もし、われわれが認識可能なすべてのもののうちのどれかひとつに未知であるとするならば、ただ単にそれは、そのような認識にわれわれを導いて行く方途にわれわれがまったく気づいていないからであるか、あるいは、逆の誤謬に陥ってしまっているからである。そして、われわれが真なるものに反する誤謬を犯さぬためには精神の直観がどのように用いられるべきであるのか、また、われわれがすべてのものの認識に到達するためにはどのように演繹が見いだされるべきであるのかを、もし方法が正しく説明するのであれば、先に述べたように、学問は精神の直観あるいは演繹によってのみ獲得されうる以上、方法が完全であることのみが要求されると、私には思われるのである。事実、方法はこれらの作用そのものがどのようになされるべきかを教えるところまで拡張されることはできない、なぜなら、もしもわれわれの知性がすでに前もってそれらの作用を用いることができなかったとすれば、知性は、それがいかに容易な規則であるにせよ、方法自身のいかなる規則をも把握しはしなかったであろうほど、これらの作用はあらゆる作用のうちでもっとも単純かつ最初のものだからである。ところで、「弁証法」(Dialectica) がこれらのより先なる作用の助けを借りて導こうと努める精神のほかの作用は[1]、この場合、無用のもの、あるいは、むしろ障害に数えられるべきであろう、なぜなら、理性の純粋な光に対しては、ある仕方でその光を曇らせることなしには、なにもつけ加えられえないからである。

したがって、この方法は、それなしに学問の研究に努力することが有益であるよりはむしろ有害であると思われるほど、大きな効用を有している、そこで、私は、より卓越した精神がとくに自然のみに導かれてずっと以前から

なんらかの手段でこの方法を会得していたことを、容易に確信するのである。たしかに、人間精神 (humana mens) は、そこに有益な思考の最初の種子が蒔かれているところのなにかわからぬ神的なものを有しており、この種子はというと、どれほど手入れをされなかろうとも、また、歪んだ研究によってどんなに踏みつけにされようとも、しばしば自然に果実を結ぶほどなのである。このことをわれわれはもっともやさしい学問である数論と幾何学の中で経験する、実際、昔の幾何学者たちが一種の解析[2] (analysis) を用い、たとえ後世の人々にそれを伝えるのを惜しんだとはいえ、あらゆる問題の解決にまで及ぼしたことにわれわれは十分気がついている。そして今日では、昔の人々が図形について行なったことを数について行なうための、数論の一種で、代数学と呼ばれるものが盛んである[3]。これら二つの学問はこの方法の、自然に植えつけられた原理から生じた自発的な果実以外のなにものでもない、しかも、それら果実が、これら二つの学問のもっとも単純な対象についてほかの学問におけるよりもはるかに幸いにこれほどにも実ったことに私は少しも驚かない、他の学問においてはより大きな障害がこれらの果実を押しつぶしているのが常なのである、しかし、そこでさえも最大の注意を払って栽培されさえしたならば、かならずやそれら果実は完全な成熟に到達することができたでもあろう。

実際、私がこの論文のなかでとくになそうと企てたのはこのことであったのである、思うに、もしもこれらの規則が、暇な「計算家たち」(Logistae) や幾何学者たちが日ごろ楽しむのを常としていた内容空虚な問題を解決することしかできなかったとするならば、私はこの規則を高く評価しはしなかったであろう、なぜなら、もしそうだとしたならば、おそらくほかの人々よりも私がいっそう巧妙に無意味なおしゃべりをしたのであろうということ以外に、私はなにも実行していなかった、と私は考えたであろうから。またこれほど明証的でこれほど確実な例証をほかのどんな学問に求めることも不可能であるから、たとえ私がこの論文の中で図形や数について多くのことを述べることになるとしても、私の考え方を注意深く反省する人なら誰でも、ここで私が考えているのはけっして通俗的な数学についてではなく、それらの例証がその部分というよりはその外被であるような別のある学問について私が

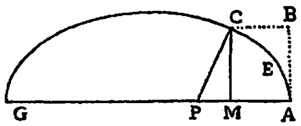
デカルト『幾何学』より

(注) ∞ は等号です.

あろう．これこそ，あえて言うが，単に私が幾何学に関して知っているというだけでなく，かつて知りたいと思った最も有益で最も一般的な問題なのである.[42]

[与えられた曲線，またはその接線を直角に切る直線を見いだす一般的方法]

曲線 CE [第 11 図(*)] があり，点Cを通って，これと直角をなす直線をひかねばならないとせよ．問題がすでに解かれたと仮定し，求める線を CP とする．これを延長して点Pで線GA と交わらせ，線 CE のすべての点を GA の点に関係づけることにする．そこで，MA または CB ∞y，CM または BA∞x とし，x と y の間の関係を説明する何らかの方程式を得る．次に，PC∞s，PA∞v，つまり PM$\infty v-y$ とすれば，PMC は直角三角形であるから，底辺の平方 ss は 2 辺の平方である $xx+vv-2\,vy+yy$ に等しくなる．すなわち，



[第 11 図]

$$x\infty\sqrt{ss-vv+2\,vy-yy},\quad \text{あるいは}\quad y\infty v+\sqrt{ss-xx}$$

であり，この方程式を用いて，曲線CE のすべての線が直線GA の点にたいしてもつ関係を説明している他の方程式から，ふたつの未定量 x, y の一方を除く．これは容易であって，もしxを除こうとするのであれば，至るところで x のかわりに $\sqrt{ss-vv+2\,vy-yy}$ をおき，xx のかわりにこの量の平方をおき，x^3 のかわりにその立方をおき，以下同様にすればよく，もし y を除こうとするのであれば，そのかわりに $v+\sqrt{ss-xx}$ をおき，yy, y^3 などのかわりにこの量の平方，立方などをおけばよい．このようにすれば，残る方程式にはもはや 1 個の未定量，x または y しかないわけである．

たとえば，CE が楕円で，MA がその直径の部分であり，CM がそれに規則正しく立てられており，r がその通径，q が横径であるならば，アポロニウス第１巻の定理 13[43] によって，

$$xx\infty ry-\frac{r}{q}yy$$

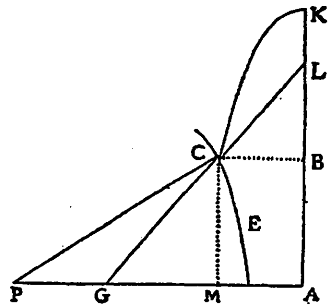
を得，そこから xx を除けば，

$$ss-vv+2\,vy-yy\infty ry-\frac{r}{q}yy,$$

$$\text{あるいは}\quad yy+\frac{qry-2\,qvy+qvv-qss}{q-r}\quad \text{がゼロに等しい.}$$

実際，いまの場合は，計の一部を他の部分に等しいとおくより，計全体をこのように一括して考える方がまさっているのである．

同様に，CE [第 12 図] が前述の方法で放物線の運動によって描かれた曲線であれば，GA を b，KL を c，放物線の直径 KL の通径を d とおいたとして，x と y の間の関係を説明する方程式は



[第 12 図]

$$y^3-byy-cdy+bcd+dxy\infty 0^{44)}$$

であり，ここからxを除いて，

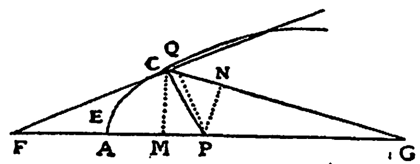
$$y^3-byy-cdy+bcd+dy\sqrt{ss-vv+2vy-yy}[\infty 0]$$

を得，乗法を用いて項を整理すれば，

$$y^6-2\,by^5\left.\begin{matrix}-2\,cd\\+\;\;bb\\+\;\;dd\end{matrix}\right\}y^4\left.\begin{matrix}+4bcd\\-2ddv\end{matrix}\right\}y^3\left.\begin{matrix}-2\,bbcd\\+\;\;ccdd\\-\;\;ddss\\+\;\;ddvv\end{matrix}\right\}yy-2\,bccddy+bbccdd\infty 0$$

となる．他の場合も同様である．

のみならず，曲線の点が上述の仕方とは異なるどのような仕方で直線の点に関係すると想像しても，このような方程式が常に得られることに変わりはない．たとえば，CE [第 13 図] は 3 点 F, G, A にたいして次のような関係をもつ線であるとする．点Cのような曲線の各点から点Fまでひいた直線が線 FA を超過する量は，同じ点から G



[第 13 図]

(24)