幾何学XF＝群構造論　河澄響矢

数理118教室　金曜日13:00−14:30

・<u>内容</u>：群のコホモロジーの初歩

<u>標準複体</u>，群の分類空間，群の中心拡大とEuler類

LHS spectral系列，写像類群への応用．

・<u>参考書</u>：

K.S. Brown 'Cohomology of Groups' Graduate Texts 87, Springer 1982

・<u>評価方法</u>：

レポートによる

・<u>確認</u>

−(環上の)tensor積は既知とする

− free resolutionの存在と一意性は既知としてよいか？

・<u>約束</u>

X：集合とするとき

$\mathbb{Z}X :=$ 集合Xの生成する$\mathbb{Z}$−自由加群

$= \{\sum_{x\in X} a_x x \,;\, a_x \in \mathbb{Z}$，有限個の$x$を除いて$a_x = 0\}$

G：群．とくに断わらない限り離散位相が入っているものとする

単位元は $1 \in G$ とかく．

$G \curvearrowright X$ 作用はつねに<u>左作用</u>

（右作用があれば，$\gamma \in G$，$x \in X$について

$\gamma \cdot x := x\gamma^{-1}$と定義して左作用とみなす）

X/G：商集合（正しくは$G\backslash X$と書くべきだが，このように書いてしまう）

$X^G := \{x \in X ; \gamma x = x\}$ 不動点集合

$\mathbb{Z}X$：左G加群　$(\gamma(\sum a_x x) = \sum a_x(\gamma x))$

No. Date . .

§1. 標準複体

標準複体(standard complex)を用いて群の(co)homologyを定義する

G: 群

M: (左)G加群 ($\mathbb{Z}$-加群であって群Gが加法を保つように左作用しているもの)

$C^0(G;M) := M$

$n \geqq 1$

$C^n(G;M) := \{ f: \overbrace{G \times \cdots \times G}^{n} \to M \,;\, 写像\ \underline{正規化条件}\ f(\cdots, \overset{\exists}{1}, \cdots) = 0 をみたす\}$

正規標準cochain群

$d: C^n(G;M) \to C^{n+1}(G;M)$ coboundary作用素

$f \in C^n(G;M)$, $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} \in G$

$(df)(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$

$:= x_1 f(x_2, \cdots, x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(x_1, \cdots, x_i x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(x_1, \cdots, x_n)$

GのMへの左作用　　　Gのかけ算

($n=0$のとき $m \in M = C^0(G;M)$について ($x \in G$)
$(dm)(x) := xm - m$)

dfは正規化条件をみたす

(∵) $x_i = 1$のとき、第i項と第$i+1$項がうちけしあう
のこりの項はfの正規化条件から$=0$ //)

<u>補題1.1</u>　$dd f = 0$

((証)(その1) 直接計算 (<u>レポート問題1</u>)
(その2) standard bar resolutionを使う(次回) //)

$C^*(G;M) := \{ C^n(G;M), d \}_{n \geqq 0}$ <u>正規標準cochain複体</u>

normalized standard cochain complex

定義 $n \geq 0$

$$H^n(G;M) \overset{\text{def}}{=} H^n(C^*(G;M)) = \frac{\mathrm{Ker}(d : C^n(G;M) \to C^{n+1}(G;M))}{\mathrm{Im}(d : C^{n-1}(G;M) \to C^n(G;M))}$$

群 G の左 G 加群 M に値をもつ 第 n cohomology 群
(係数をもつ)

函手性

Γ : (別の) 群, N : Γ 加群

$\varphi : G \to \Gamma$: 群準同型

($\Rightarrow$ φ によって N は G 加群となる)

$\psi : N \to M$: G-準同型

$\Longrightarrow$ $\varphi^* : C^*(\Gamma;N) \to C^*(G;M)$ ((φ^*, ψ_*) と書くべき?)

$f \longmapsto \psi \circ f \circ \varphi$

cochain map $\psi \circ (df) \circ \varphi = d(\psi \circ f \circ \varphi)$

$\Longrightarrow$ $\varphi^* : H^*(\Gamma;N) \to H^*(G;M)$

induced homomorphism

($\Gamma = G$, $\varphi = id$ のときは ψ_* と書くことにする)

$\boxed{n=0}$ $H^0(G;M) = \mathrm{Ker}(d : M \to C^1(G;M) \subset \mathrm{Map}(G,M)) \subset M$

$m \in M$, $x \in G$ $(dm)(x) = xm - m$

$m \in H^0(G;M) \Leftrightarrow {}^\forall x \in G$ $xm - m = 0 \Leftrightarrow m \in M^G$

$H^0(G;M) = M^G$

$\boxed{n=1}$ $f \in C^1(G;M)$, $x, y \in G$

$(df)(x,y) = xf(y) - f(xy) + f(x)$

$Z^1(G;M) := Z^1(C^*(G;M))$

$= \{ f : G \to M : \text{map}\ {}^\forall x, {}^\forall y \in G,\ f(xy) = f(x) + xf(y) \}$

((注) $f(1) = 0$ は $df = 0$ から従う ($\because$ $f(1 \cdot 1) = f(1) + 1f(1)$))

$Z^1(G;M)$ の元を crossed homomorphism とよぶ
捩れ準同型

No. Date . .

(注). 群 G が元 $x_1, \cdots, x_\ell \in G$ で生成されているとする
このとき $f \in Z^1(G; M)$ は生成元での値 $f(x_1), \cdots, f(x_\ell) \in M$ によって
一意にきまる

例 $\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$, $\sum a_\gamma \gamma \mapsto \sum a_\gamma$ augmentation map
$IG := \mathrm{Ker}\,\varepsilon$ augmentation ideal 左 G 加群
$\ell_0 : G \to IG$, $\gamma \mapsto \gamma - 1$
$\ell_0 \in Z^1(G; IG)$
$$\left[\begin{aligned} (\because)\ \ell_0(xy) &= xy - 1 = xy - x + x - 1 = x(y-1) + x - 1 \\ &= x\ell_0(y) + \ell_0(x) \quad // \end{aligned} \right.$$
一般に M : G-module,
$\alpha : IG \to M$: G-homom つまり $\alpha \in \mathrm{Hom}_G(IG, M)$
について $\alpha \circ \ell_0 \in Z^1(G; M)$ ($\because$ 準同型性)

補題 1.2 対応
$$\mathrm{Hom}_G(IG, M) \to Z^1(G; M), \quad \alpha \mapsto \alpha \circ \ell_0$$
は全単射である

(証) 逆写像は
$$Z^1(G; M) \to \mathrm{Hom}_G(IG, M) \quad f \mapsto \underbrace{(x - 1 \mapsto f(x))}_{\alpha とおく}$$
で与えられる
$$\alpha(x(y-1)) - x\alpha(y-1) = \alpha((xy-1) - (x-1)) - x\alpha(y-1)$$
$$= f(xy) - f(x) - xf(y) \quad //$$

半直積 (semi-direct product) $M \rtimes G$
(ここで G : 群, M : 左 G 加群)
$M \rtimes G := M \times G$ (集合として)
群演算 $m, m' \in M$, $x, x' \in G$
$$(m, x)(m', x') \overset{\mathrm{def}}{=} (m + xm', xx')$$
$$\left[\begin{aligned} &\text{結合則} \quad ((m,x)(m',x'))(m'',x'') = (m + xm' + xx'm'', xx'x'') \\ &\qquad\qquad = (m,x)((m',x')(m'',x'')) \\ &\text{単位元} \quad (m,x)(0,1) = (0,1)(m,x) = (m,x) \\ &\text{逆元} \quad (m,x)(-x^{-1}m, x^{-1}) = (-x^{-1}m, x^{-1})(m,x) = (0,1) \end{aligned} \right.$$

$f \in \mathrm{Map}(G, M)$ について

$f \in Z^1(G, M)$

$\Leftrightarrow (f, 1): G \to M \rtimes G,\ x \mapsto (f(x), x)$ homom.

$(\because\ (f(x), x)(f(y), y) = (f(x) + xf(y), xy).)$

$B^1(C^*(G:M)) = dC^0(G:M) = dM$

$f \in Z^1(G:M)$ について

$f \in B^1(C^*(G:M)) \Leftrightarrow \exists m \in M\ \forall x \in G\ \ f(x) = xm - m$

このとき f は principal crossed homomorphism などともいう

$H^1(G:M) = Z^1(G:M)/_{dM}$

とくに M: 自明 G 加群 のとき

$Z^1(G:M) = \mathrm{Hom}(G:M)$ (crossed homom は ふつうの準同型)

$dM = 0$ $(\because\ \forall x \in G\ \forall m \in M\ \ xm - m = m - m = 0.)$

ゆえに

$H^1(G:M) = \mathrm{Hom}(G, M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G^{ab}, M)$

(但, $G^{ab} := G/[G, G]$ abelianization)

(とくに G: 有限群, $M = \mathbb{Z}$ 自明 G 加群

$\Rightarrow H^1(G; \mathbb{Z}) = 0$)

例 $N \geq 1$

$G = \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}/N$ N 次巡回群

$M = \mathbb{Z}G = \mathbb{Z}[x]/(x^N - 1)$

$H^1(G:\mathbb{Z}G)$ を求める

$f \in Z^1(G:M)$ 生成元 x での値で f はきまる

$x^N = 1$ より

$0 = f(x^N) = f(x) + xf(x) + \cdots + x^{N-1}f(x)$

$= (1 + x + \cdots + x^{N-1}) f(x)$

$f(x) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x^i,\ a_i \in \mathbb{Z}$ とすると

$0 = (1 + x + \cdots + x^{N-1}) \sum a_i x^i = (\sum a_i)(1 + x + \cdots + x^{N-1})$

No. Date

ゆえに $\sum_{i=0}^{N-1} a_i = 0$. ここで

$$f(x) = \sum a_i x^i = \sum_{i=0}^{N-1} a_i (x^i - 1)$$
$$= (x-1) \sum_{i=1}^{N-1} a_i (x^{i-1} + x^{i-2} + \cdots + x + 1)$$
$$\in (x-1)\mathbb{Z}G$$

したがって $f \in dM$ つまり $Z^1(G:M) = dM$

$$H^1(G:\mathbb{Z}G) = 0$$

実は、Shapiro Lemma (あとでやる) を使うと、次がえられる.

G: 有限群 $\Rightarrow$ $\forall n \geq 1 \quad H^n(G:\mathbb{Z}G) = 0$

<u>cup積</u> (cup product)

M, N: G加群, $p, q \geq 0$.

$M \otimes N\ (= M \otimes_{\mathbb{Z}} N)$ を対角作用によって G加群とみなす

$(x(m \otimes n) = (xm) \otimes (xn),\ x \in G,\ m \in M,\ n \in N)$

$$\cup : \underset{f}{C^p(G:M)} \otimes \underset{g}{C^q(G:M)} \longrightarrow C^{p+q}(G:M \otimes N)$$

$x_1, \ldots, x_{p+q} \in G$

$$(f \cup g)(x_1, \ldots, x_{p+q}) \overset{\text{def}}{=} f(x_1, \ldots, x_p) \otimes x_1 \cdots x_p\, g(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$$

(Alexander-Whitney) cup product

- $f \cup g$: 正規化条件をみたす (明らか)
- <u>結合則</u> $(f \cup g) \cup h = f \cup (g \cup h)$
- <u>単位元</u> $1 \in C^0(G:\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ (自明G加群) について
  $f \cup 1 = 1 \cup f = f$
- <u>関手性</u> φ, ψ: さきほどと同じ $(\psi \circ f \circ \varphi) \cup (\psi \circ g \circ \varphi) = \psi \circ (f \cup g) \circ \varphi$

<u>補題1.3</u> $d(f \cup g) = (df) \cup g + (-1)^p f \cup (dg)$

<u>証明</u> $p = 1,\ q = 2$ の場合に示す. $x_1, \ldots, x_4 \in G$

$$d(f \cup g)(x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$= x_1 (f \cup g)(x_2, x_3, x_4) - (f \cup g)(x_1 x_2, x_3, x_4)$$
$$+ (f \cup g)(x_1, x_2 x_3, x_4) - (f \cup g)(x_1, x_2, x_3 x_4) + (f \cup g)(x_1, x_2, x_3)$$

$$= x_1(f(x_2)\otimes x_2 g(x_3,x_4)) - f(x_1x_2)\otimes x_1x_2 g(x_3,x_4)$$
$$+ f(x_1)\otimes x_1 g(x_2x_3,x_4) - f(x_1)\otimes x_1 g(x_2,x_3x_4) + f(x_1)\otimes x_1 g(x_2,x_3)$$
$$= x_1 f(x_2)\otimes x_1x_2 g(x_3,x_4) - f(x_1x_2)\otimes x_1x_2 g(x_3,x_4) + f(x_1)\otimes x_1x_2 g(x_3,x_4)$$
$$- f(x_1)\otimes x_1x_2 g(x_3,x_4) + f(x_1)\otimes x_1 g(x_2x_3,x_4) - f(x_1)\otimes x_1 g(x_2,x_3x_4)$$
$$+ f(x_1)\otimes x_1 g(x_2,x_3)$$
$$= (df)(x_1,x_2)\otimes x_1x_2 g(x_3,x_4) - f(x_1)\otimes x_1 (dg)(x_2,x_3,x_4)$$
$$= ((df)\cup g - f\cup(dg))(x_1,x_2,x_3,x_4) \quad //$$

かくして

$$\cup(Z^p(G:M)\otimes Z^q(G:N)) \subset Z^{p+q}(G:M\otimes N)$$

また $f\in C^{p-1}(G:M)$, $g\in Z^q(G:N)$ ならば

$$(df)\cup g = d(f\cup g) - (-1)^p f\cup dg = d(f\cup g)$$

同様に $f\in Z^p(G:M)$, $g\in C^{q-1}(G:N)$ ならば

$$f\cup dg = \pm d(f\cup g)$$

ゆえに

$$\cup : H^p(G:M)\otimes H^q(G:N) \to H^{p+q}(G:M\otimes N) \quad \text{cup積}$$

が定義できる. 結合則, 函手性をみたし, 単位元をもつ.

(次回は, standard bar resolution について)

o. Date

Date 09・10・16 No. 1

(§1. 標準複体 (つづき))

今日やること
- cup 積ののこり
- standard bar resolution --- $C^*(G;M)$ の背景
- (群の homology)

レポート問題2
$G = \mathbb{Z}$ 無限巡回群について
$H^1(G;\mathbb{Z}G) \cong \mathbb{Z}$
を、定義にもどって証明せよ。

G : 群
M : (左) G 加群
$C^*(G;M) = \{C^n(G;M), d\}_{n\geq 0}$ normalized standard cochain complex
$H^*(G;M) = H^*(C^*(G;M))$

cup 積 N : (左) G 加群 $p, q \geq 0$

$$\cup : C^p(G;M) \times C^q(G;N) \to C^{p+q}(G;M\otimes N)$$
$$f \qquad\qquad g \qquad\qquad x_1, x_2, \cdots, x_{p+q} \in G$$
$$(f\cup g)(x_1, \cdots, x_{p+q}) \overset{\mathrm{def}}{=} f(x_1, \cdots, x_p) \otimes x_1 \cdots x_p\, g(x_{p+1}, \cdots, x_{p+q})$$

正規化条件、結合則、単位元、函手性

補題1.3. $$d(f\cup g) = (df)\cup g + (-1)^p f\cup (dg)$$

証明 $p=1, q=2$ の場合に示す。$x_1, \cdots, x_4 \in G$

$$\begin{aligned}
& d(f\cup g)(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
&= x_1 (f\cup g)(x_2, x_3, x_4) - (f\cup g)(x_1x_2, x_3, x_4) \\
&\quad + (f\cup g)(x_1, x_2x_3, x_4) - (f\cup g)(x_1, x_2, x_3x_4) + (f\cup g)(x_1, x_2, x_3) \\
&= x_1 (f(x_2) \otimes x_2\, g(x_3, x_4)) - f(x_1x_2) \otimes x_1x_2\, g(x_3, x_4) \\
&\quad + f(x_1) \otimes x_1\, g(x_2x_3, x_4) - f(x_1) \otimes x_1\, g(x_2, x_3x_4) + f(x_1) \otimes x_1\, g(x_2, x_3) \\
&= x_1 f(x_2) \otimes x_1x_2\, g(x_3, x_4) - f(x_1x_2) \otimes x_1x_2\, g(x_3, x_4) \\
&\quad + f(x_1) \otimes x_1x_2\, g(x_3, x_4) - f(x_1) \otimes x_1x_2\, g(x_3, x_4) \\
&\quad + f(x_1) \otimes x_1\, g(x_2x_3, x_4) - f(x_1) \otimes x_1\, g(x_2, x_3x_4) + f(x_1) \otimes x_1\, g(x_2, x_3) \\
&= (df)(x_1, x_2) \otimes x_1x_2\, g(x_3, x_4) - f(x_1) \otimes x_1 (dg)(x_2, x_3, x_4) \\
&= ((df)\cup g - f\cup (dg))(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad //
\end{aligned}$$

o. Date . .

かくして

$$\cup\,(Z^p(G;M)\otimes Z^q(G;N))\subset Z^{p+q}(G;M\otimes N)$$

また $f\in C^{p-1}(G;M)$, $g\in Z^q(G;N)$ ならば

$$(df)\cup g = d(f\cup g)-(-1)^p f\cup \overbrace{dg}^{=0} = d(f\cup g)$$

同様に $f\in Z^p(G;M)$, $g\in C^{q-1}(G;N)$ ならば

$$f\cup(dg)=\pm d(f\cup g)$$

ゆえに cohomology の cup 積

$$\cup : H^p(G;M)\otimes H^q(G;N)\to H^{p+q}(G;M\otimes N)$$
$$[f]\otimes[g]\longmapsto[f\cup g]$$

が定義できる. 結合則, 函手性をみたし, 単位元をもつ

<u>standard bar resolution</u>

G ; 群

$\mathbb{Z}G=\{\sum_{x\in G}a_x x\ ;\ a_x\in\mathbb{Z}$, 有限個の x を除いて $a_x=0\}$ 群環.

$\mathbb{Z}$; 自明 G 加群.

$\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}G$-自由分解をつくる

$\underline{n=-1}$ $P_{-1}:=\mathbb{Z}$, $D_{-1}:=0$.

$\underline{n=0}$ $P_0:=\mathbb{Z}G$ 左 G 加群, $\mathbb{Z}G$-自由.

$[\ ]\in P_0$; $1\in\mathbb{Z}G$ に対応する元

$P_0=\mathbb{Z}G[\ ]$

$D_0:=0$

$\underline{n\geq 1}$ $P_n:=$ 集合 $G^n=\overbrace{G\times\cdots\times G}^{n}$ が生成する $\mathbb{Z}G$-自由加群

$=(\mathbb{Z}G)G^n$

$[x_1|x_2|\cdots|x_n]:=\big((x_1,x_2,\cdots,x_n)\in G^n$ に対応する $\mathbb{Z}G$ 上の基底$\big)$

$\in P_n$

$\{x_0[x_1|x_2|\cdots|x_n]\ ;\ x_0,x_1,\cdots,x_n\in G\}$; P_n の $\mathbb{Z}$ 上の基底

$D_n:=$ 集合 $\{[x_1|x_2|\cdots|x_n]\ ;\ x_1,\cdots x_n\in G,\ {}^\exists x_i=1\}$ が

生成する $\mathbb{Z}G$-部分加群 $\subset P_n$ 　これは基底の一部分なので

P_n/D_n ; $\mathbb{Z}G$-自由. $({}^\forall n\geq -1)$

<u>境界作用素</u>

<u>$n=0$</u> $d_0 : P_0 = \mathbb{Z}G \to P_{-1} = \mathbb{Z}$ $\quad \sum a_x x[\ ] \longmapsto \sum a_x$

augmentation map $\quad$ G-homom

<u>$n=1$</u> $d_1 : P_1 \to P_0$, G-homom ($\mathbb{Z}G$-基底の行き先を決めればよい)

$$d_1([x_1]) := x_1[\ ] - [\ ], \quad x_1 \in G$$

<u>$n \geq 2$</u> $d_n : P_n \to P_{n-1}$: G-homom

$$d_n([x_1|x_2|\cdots|x_n]) := x_1[x_2|\cdots|x_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[x_1|\cdots|x_{i-1}|x_i x_{i+1}|x_{i+2}|\cdots|x_n] + (-1)^n[x_1|x_2|\cdots|x_{n-1}]$$

$d_n(D_n) \subset D_{n-1}$. 明らか. (標準cochain複体で正規化条件が d で保たれるのと同様)

$d_n : P_n/D_n \to P_{n-1}/D_{n-1}$ $(n \geq -1)$ が定義された.

<u>$d_n : P_n \to P_{n-1}$ の意味</u>

$$P_n = \bigoplus_{x_0, x_1, \cdots, x_n \in G} \mathbb{Z}\, x_0[x_1|x_2|\cdots|x_n]$$

$$x_0[x_1|x_2|\cdots|x_n] \longmapsto (x_0, x_0x_1, x_0x_1x_2, \cdots, x_0x_1\cdots x_n) \in G^{n+1} = \overbrace{G \times \cdots \times G}^{n+1}$$

と対応させると同一視

$$P_n \cong \mathbb{Z}G^{n+1}$$

ができる. $0 \leq i \leq n$ について

$$\partial_i : \mathbb{Z}G^{n+1} \to \mathbb{Z}G^n, \quad (x_0, \cdots, x_n) \longmapsto (x_0, \cdots, \hat{x_i}, \cdots, x_n)$$

i番目をトバス

とすると同一視の下で

$$d_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \partial_i$$

となっている. つまり $P_* := \{P_n, d_n\}_{n \geq 0}$ は

$$\{n\text{単体}\} \cong G^{n+1} \quad (\forall n \geq 0)$$

となるような単体複体 (EG とかく) の chain complex になっている

このことからも $d_n d_{n+1} = 0$ がわかる

(しかし以下 $d_n d_{n+1} = 0$ を手計算で証明する)

degeneracy

退化作用素 $\mathbb{Z}$-準同型 だが G-準同型 ではない

$n=-1$ $\quad s_{-1}: P_{-1} \to P_0,\quad a \mapsto a[\,]$

$n=0$ $\quad s_0: P_0 \to P_1,\quad \sum_{x\in G} a_x x \mapsto \sum_{x\in G} a_x[x]$

$n\geq 1$ $\quad s_n: P_n \to P_{n+1}$

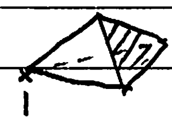
$$s_n(x_0[x_1|x_2|\cdots|x_n]) := [x_0|x_1|x_2|\cdots|x_n]$$

これは G-homom ではない

明らかに $s_n(D_n) \subset D_{n+1}$

ゆえに $s_n: P_n/D_n \to P_{n+1}/D_{n+1}$ $\mathbb{Z}$-準同型 が定義された

幾何的には



頂点 $1\in G$ との cone を作っている

補題1.4

$$d_0 s_{-1} = 1_{\mathbb{Z}} = 1_{P_{-1}}$$

$$d_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n = 1_{P_n} \quad (\forall n \geq 0)$$

(証) $d_0 s_{-1}(a) = d_0(a[\,]) = a$

$(d_1 s_0 + s_{-1} d_0)(x[\,]) = d_1[x] + s_{-1}(1) = x[\,] - [\,] + [\,] = x[\,]$

$n \geq 1$ とする

$$(d_{n+1}s_n)(x_0[x_1|x_2|\cdots|x_n])$$
$$= d_{n+1}([x_0|x_1|x_2|\cdots|x_n])$$
$$= x_0[x_1|x_2|\cdots|x_n] - [x_0x_1|x_2|\cdots|x_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}[x_0|x_1|\cdots|x_ix_{i+1}|\cdots|x_n]$$
$$+ (-1)^{n+1}[x_0|x_1|\cdots|x_{n-1}]$$
$$= x_0[x_1|x_2|\cdots|x_n] - s_{n-1}x_0(x_1[x_2|\cdots|x_n] + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}[x_1|\cdots|x_ix_{i+1}|\cdots|x_n]$$
$$+ (-1)^{n}[x_1|\cdots|x_{n-1}])$$
$$= x_0[x_1|x_2|\cdots|x_n] - s_{n-1}d_n(x_0[x_1|\cdots|x_n]) \quad //$$

これらの関係式は P_n/D_n におちる.

$$\tilde{P}_* = \tilde{P}_*(G) := \{P_n, d_n\}_{n\geq -1} = \{\cdots \to P_1 \to P_0 \to P_{-1} \to 0\}$$

standard bar resolution

$$\tilde{P}_*/D_* := \{P_n/D_n, d_n\}_{n\geq -1} = \{\cdots \to P_1/D_1 \to P_0/D_0 \to P_{-1}/D_{-1} \to 0\}$$

normalized standard bar resolution

補題 1.5.
$\widehat{P}_*$ および $\widetilde{P_*/D_*}$ は chain 複体であって
$$H_*(\widehat{P}_*) = H_*(\widetilde{P_*/D_*}) = 0$$
をみたす.

証明 (chain 複体) $\widehat{P}_*$ について示せばよい.
$s_n(P_n)$ は $\mathbb{Z}G$ 上 P_{n+1} を生成するから
$$d_n d_{n+1} s_n = 0 : P_n \to P_{n-1} \quad (\forall n \geqq 0)$$
を示せば $d_n d_{n+1} = 0$ がわかる.
n の帰納法による
$n = 0$ のとき
$$d_0 d_1 s_0 = d_0(1 - s_{-1} d_0) = (1 - d_0 s_{-1}) d_0 = (1-1) d_0 = 0$$
$n \geqq 1$ のとき
$$d_n d_{n+1} s_n = d_n(1 - s_{n-1} d_n) = (1 - d_n s_{n-1}) d_n = s_{n-2} d_{n-1} d_n$$
$$= 0 \quad (\text{帰納法の仮定})$$
帰納法が完成した//

(完全性) $\mathrm{Ker}(d_n : P_n \to P_{n-1}) \subset d_{n+1}(P_{n+1})$
$\mathrm{Ker}(d_n : P_n/D_n \to P_{n-1}/D_{n-1}) \subset d_{n+1}(P_{n+1}/D_{n+1})$
を示す. $u \in P_n$, $d_n u = 0$ とすると
$$u = d_{n+1} s_n u + s_{n-1} \underbrace{d_n u}_{=0} = d_{n+1} s_n u \in d_{n+1}(P_{n+1})$$
P_n/D_n についても同様
//

$$P_* := \{P_n, d_n\}_{n \geqq 0} = \{\cdots \to P_1 \to P_0 \to 0\}$$
$$P_*/D_* := \{P_n/D_n, d_n\}_{n \geqq 0} = \{\cdots \to P_1/D_1 \to P_0/D_0 \to 0\}$$

<u>normalized cochain complex</u>
M : left G-module.
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_n/D_n, M) = \{f : G^n \to M : \begin{smallmatrix}\text{map}\\ f(\cdots \exists 1 \cdots) = 0\end{smallmatrix}\}$$
$$= C^n(G; M)$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(d_{n+1}, M) = d : C^n(G;M) \to C^{n+1}(G;M)$$

o. Date

つまり

$$C^*(G;M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_*/D_*, M).$$

次に群のhomologyを

$$C_*(G;M) \overset{\text{def}}{=} M \otimes_{\mathbb{Z}G} P_*$$

($M \otimes_{\mathbb{Z}G} (P_*/D_*)$ で定義してもhomologyはひとしい $\Leftarrow$ free resolutionの一意性)

で定義したいが、Mは右G加群ではない

<u>$\mathbb{Z}G$ 上のtensor積について</u>

$\otimes = \otimes_{\mathbb{Z}}$

L : 左G加群

N : 左G加群

$$N \otimes_{\mathbb{Z}G} L = N \otimes_G L = N \otimes L \Big/ \langle nx \otimes l - n \otimes xl \, ; n \in N, l \in L, x \in G \rangle$$

N ; 左G加群については

$$nx := x^{-1}n \qquad x \in G,\ n \in N$$

によって右G加群とみなすとくに

$$N \otimes_G L = N \otimes L \Big/ \langle x^{-1}n \otimes l - n \otimes xl \, ; n \in N, l \in L, x \in G \rangle$$

$$= N \otimes L \Big/ \langle xn \otimes xl - n \otimes l \, ; n \in N, l \in L, x \in G \rangle$$

とくに

$$= L \otimes_G N$$

ただし、あとで N ; 両側 $\mathbb{Z}G$ 加群のときは $N \otimes_G L$ は N の右作用を用いてtensorをとり、左G加群とみなす.

群のhomology

M : 左G加群

$$C_*(G;M) \overset{\text{def}}{=} M \otimes_G P_*$$

$n \geqq 0$

$$H_n(G;M) \overset{\text{def}}{=} H_n(C_*(G;M))$$

群Gの左G加群Mに値をもつ第n homology

具体的には

$$C_0(G;M) = M \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G = M$$

$n \geqq 1$

$$C_n(G;M) = \bigoplus_{x_1,\cdots,x_n \in G} M \otimes_{\mathbb{Z}G} (\mathbb{Z}G)[x_1|x_2|\cdots|x_n]$$

$$= \bigoplus_{x_1,\cdots,x_n \in G} M[x_1|x_2|\cdots|x_n]$$

$m \in M$

$$\partial(m[x_1|x_2|\cdots|x_n]) = x_1^{-1}m[x_2|\cdots|x_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i m[x_1|\cdots|x_ix_{i+1}|\cdots|x_n] + (-1)^n m[x_1|\cdots|x_{n-1}]$$

$\boxed{n=0}$

$$\partial(m[x]) = x^{-1}m - m$$

$$H_0(G;M) = M/\langle x^{-1}m - m \,;\, x \in G, m \in M\rangle$$
$$= M/\langle xm - m \,;\, x \in G, m \in M\rangle$$
$$= M \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} = M_G$$ とかく the coinvariants

ゆえに $H_0(G;M) = M_G$

(ちなみに
$$L \otimes_G N = (L \otimes N)_G$$
)

o. Date

§1 標準複体 (つづき)

G : 群

M : 左 G 加群

$H_n(G:M) = H_n(C_*(G:M)) = H_n(P_* \otimes_G M)$ 　G, M について関手性をもつ

$n=0$

$$H_0(G:M) = M_G = M/\langle xm - m : x \in G, m \in M \rangle$$

the coinvariants

例 $H_0(G:\mathbb{Z}G) = \mathbb{Z}$

$\because$) $IG := \mathrm{Ker}(\mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}) = \langle x-1 : x \in G \rangle$ augmentation ideal

$\sum a_x x \mapsto \sum a_x$

$\mathbb{Z}G/_{IG} \overset{\varepsilon}{\cong} \mathbb{Z}$

$\partial C_1(G:M) = \langle (x-1)u : x \in G, u \in \mathbb{Z}G \rangle$

$= IG$

ゆえに $H_0(G:\mathbb{Z}G) = \mathbb{Z}G/_{IG} = \mathbb{Z}$ //

同様に X : set, $G \curvearrowright X$: transitive について

$$H_0(G:\mathbb{Z}X) = \mathbb{Z}$$

ちなみに

$$H^0(G:\mathbb{Z}X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } X \text{ finite} \\ 0 & \text{if } X \text{ infinite.} \end{cases}$$

以下しばらく

$M = \mathbb{Z}$ trivial G-module

とする ($x \in G$, $m \in \mathbb{Z}$ 　$xm = m$)

$C_*(G) = C_*(G:\mathbb{Z})$

$H_*(G) = H_*(G:\mathbb{Z})$

とする

$$C_n(G) = \bigoplus_{x_1,\cdots,x_n \in G} \mathbb{Z}[x_1|x_2|\cdots|x_n]$$

$$\partial[x_1|x_2|\cdots|x_n] = [x_2|\cdots|x_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[x_1|\cdots|x_i x_{i+1}|\cdots|x_n] + (-1)^n[x_1|\cdots|x_{n-1}]$$

逆元を使っていない

これは G が monoid (単位元の存在, 結合則をみたす) であれば定義できる

$$[x_1|x_2|\cdots|x_n] \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} * \xrightarrow{x_1} * \xrightarrow{x_2} \cdots \xrightarrow{x_n} *$$

とみなすと.

∂ の第1項 … 0番目の $*$ をトバす
第 $i+1$ 項 … i 番目の $*$ をトバす
) ことに対応する

$C_*(G)$ は $* \xrightarrow{x_1} * \xrightarrow{x_2} \cdots \xrightarrow{x_n} *$ に n 単体を対応させてえられる
単体複体 (BG とかく) の chain complex になっている

さらに一般に $\mathcal{C}$: 小圏 small category ($\mathrm{Object}(\mathcal{C})$ が集合である圏) について も

$$C_0(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}\,\mathrm{Object}(\mathcal{C})$$
$$C_n(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}\{A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n \,;\, A_i \in \mathrm{Object}(\mathcal{C}),\ f_i : \text{morphism}\}$$

とおくと. 同様に chain 複体がつくれる
($\longrightarrow$ 小圏 $\mathcal{C}$ の分類空間 $B\mathcal{C}$)

つまり群 G は $\mathrm{Object}(G) = \{*\}$, $\mathrm{Hom}(*,*) = G$ なる
小圏とみなされる

群のAbel化

G : 群

$[G,G] := \langle xyx^{-1}y^{-1} \,;\, x,y \in G \rangle \lhd G$ 交換子群 normal

$G^{ab} := G/[G,G]$ 群 G の Abel化 (abelianization)

可換群 ($\because\ xy \equiv yx \mod [G,G]$) $\Rightarrow$ 演算を加法で書く

$\pi : G \to G^{ab}$, $x \mapsto x \mod [G,G]$ 標準射影

Abel化の普遍性

$\forall H$: 可換群
$\forall f : G \to H$ 準同型
$\exists!\ \bar{f} : G^{ab} \to H$ 準同型
s.t. $f = \bar{f} \circ \pi$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\forall f"] & \\ G^{ab} \arrow[r, dashed, "\exists!\bar{f}"'] & \forall H \end{tikzcd}$$

$C_1(G) = \bigoplus_{x \in G} \mathbb{Z}[x]$

補題1.6. well-definedな同型

$$H_1(G;\mathbb{Z}) \cong G^{ab} \quad [x] \mapsto \pi(x) = x \bmod [G,G]$$

が成立つ.

証明 まず $H_1(G)$ を求める.

$C_2(G) = \bigoplus_{x,y \in G} \mathbb{Z}[x|y]$

$C_1(G) = \bigoplus_{x \in G} \mathbb{Z}[x] = \mathbb{Z}G$

$\partial[x|y] = [y] - [xy] + [x]$

$\partial[x] = [\ ] - [\ ] = 0$

ゆえに

$$H_1(G) = C_1(G)/\partial C_2(G) = \mathbb{Z}G/\langle xy - x - y \,;\, x,y \in G \rangle$$

他方 G^{ab} は可換群だから

$\alpha : \mathbb{Z}G \to G^{ab} \quad \sum a_x x \mapsto \sum a_x \pi(x)$

が定義できる. $\alpha(xy - x - y) = \pi(xy) - \pi(x) - \pi(y) = 0$ より

$\overline{\alpha} : H_1(G) \to G^{ab} \quad [x] \mapsto \pi(x)$

が誘導される.

逆に 写像

$\beta : G \to H_1(G) \quad x \mapsto [x]$

は準同型である ($\because$ $[xy] = [x] + [y] \in H_1(G)$) ゆえに

$\overline{\beta} : G^{ab} \to H_1(G) \quad \pi(x) \mapsto [x]$

が誘導される. 明らかに $\overline{\alpha}$ と $\overline{\beta}$ は互いに逆である //

abelianizationの計算例

例1 $n \geq 2$. $\mathfrak{S}_n$: n次対称群

$\mathrm{sign} : \mathfrak{S}_n^{ab} \cong \{\pm 1\} (\cong \mathbb{Z}/2)$

証明 2個の互換の積 $\in [\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_n]$

を示せばよい. $1 \leq a \neq b, c \neq d \leq n$ について

No. Date

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を $\sigma(a)=c,\ \sigma(b)=d$ となるようにとると

$(a\,b)(c\,d) = (a\,b)\sigma(a\,b)\sigma^{-1} = (a\,b)\sigma(a\,b)^{-1}\sigma^{-1} \in [\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_n]$ //

← こちらから読む

例2. $n \geqq 3$ のとき

$$SL_n(\mathbb{Z})^{ab} = 0$$

証明 $n \geqq 2$ について.

$\lambda \in \mathbb{Z},\ i \neq j$

$$E_{ij}^{\lambda} := \begin{array}{c c} & \begin{matrix} & j & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ i) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \ddots & 0 \\ \cdots & \lambda & 0 \ \ddots \ 1 \end{pmatrix} \end{array} \in SL_n(\mathbb{Z})$$

補題1.7. $n \geqq 2$ について群 $SL_n(\mathbb{Z})$ は集合 $\{E_{ij}^{\lambda};\ i \neq j,\ \lambda \in \mathbb{Z}\}$ によって生成される ＿

証明 レポート問題3 （ヒント: $n=2$: Euclidの互除法, $n \geqq 3$: nの帰納法） //

$n \geqq 3$ とする.

$1 \leqq i, j, k \leqq n$ 相異なる. $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$

$$E_{ij}^{\lambda} E_{jk}^{\mu} E_{ij}^{-\lambda} E_{jk}^{-\mu} = E_{ik}^{\lambda\mu}$$

(∵) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & \mu \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & -\mu \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda\mu \\ & 1 & \mu \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & \lambda\mu \\ & 1 & -\mu \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda\mu \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ //

$n \geqq 3$ のとき $E_{ik}^{\lambda} \in [SL_n(\mathbb{Z}), SL_n(\mathbb{Z})]$

Lem 1.7 より $SL_n(\mathbb{Z}) = [SL_n(\mathbb{Z}), SL_n(\mathbb{Z})]$ //

レポート問題4

$SL_2(\mathbb{Z})^{ab} = \mathbb{Z}/12$ を示せ ―― （ヒント: 双曲幾何を使って $SL_2(\mathbb{Z})$ の表示を求める または, ・Dedekind η function を使え）

(注) 「自由度」n が大きくなると $SL_n(\mathbb{Z})^{ab}$ は「安定」する.

自由群 $n \geq 1$

$F_n \overset{\text{def}}{=} \overbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}^{n}$ 自由積

$= \langle t_1, t_2, \cdots, t_n \rangle \quad t_i = 0 * \cdots * \overset{i}{1} * \cdots * 0$

自由群の普遍性

$\forall G$: 群 $\forall x_1, \cdots, x_n \in G$

$\exists ! f : F_n \to G$ 準同型 s.t. $f(t_i) = x_i \ (1 \leq \forall i \leq n)$

例3 $F_n^{ab} \cong \mathbb{Z}^n$, $t_i \mapsto e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} < i \in \mathbb{Z}^n$.

証明 $\pi : F_n \to \mathbb{Z}^n$, $t_i \mapsto e_i$

$\Rightarrow \bar{\pi} : F_n^{abel} \to \mathbb{Z}^n$.

他方 $\mathbb{Z}^n \to F_n^{abel}$ $e_i \mapsto t_i \bmod [F_n, F_n]$ が定義できる

互いに逆ゆえ同型 //

$\pi : F_n \to \mathbb{Z}^n$, $t_i \mapsto e_i$ と書く

群の表示

G : 群, $x_1, \cdots, x_n \in G$

$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ が G を生成する

$\Leftrightarrow G = \langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle$

$\Leftrightarrow F_n \to G$, $t_i \mapsto x_i$, が全射

$r_1, \cdots, r_m$: $x_1, \cdots, x_n$ の語 (word)

$\in F_n$ とみることができる

$R := \langle s r_j s^{-1} ; 1 \leq j \leq m, s \in F_n \rangle \triangleleft F_n$ normal subgroup

$\{r_1, \cdots, r_m\}$: G の基本関係式 (defining relation)

$\Leftrightarrow F_n / R \to G$ が well-defined かつ同型

$t_i \bmod R \mapsto x_i$

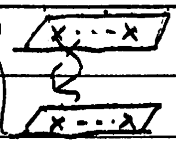
このとき G は表示 (presentation)

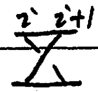
生成元 $x_1, \cdots, x_n$

関係式 $r_1, \cdots, r_m$

をもつという

No. Date . .

例 Artin braid group $B_n = \left\{ \right.$  $\left. \right\} /$ isotopy

生成元 $\sigma_i,\ 1\le i\le n-1$ 

関係式 $\sigma_i\sigma_j\sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1}\ (=1)$ if $|i-j|\ge 2$

$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\ (=1)$ for $1\le i\le n-2$

一般に $G = F_n/R$ であるとする. $\pi: F_n\to\mathbb{Z}^n,\ t_i\mapsto e_i$ と表す

補題1.8 $G^{ab}\cong \mathbb{Z}^n/\langle \pi(r_j) : 1\le j\le m\rangle$

証明 右辺 $= \mathbb{Z}^n/\pi(R)$ $\left(\because\ \pi(s r_j s^{-1}) = \pi(r_j)\right)$

$$\begin{tikzcd}
F_n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & \mathbb{Z}^n \arrow[r] & \mathbb{Z}^n/\pi(R) \\
F_n/R \arrow[r] \arrow[urr, "\exists"] & (F_n/R)^{ab} \arrow[ur, "\exists!"'] &
\end{tikzcd}$$

他方 $\mathbb{Z}^n/\pi(R)\to (F_n/R)^{ab}$

$e_i \bmod \pi(R)\mapsto t_i \bmod R[F_n,F_n]$

が定義できて互いに逆 //

例 $B_n^{ab}\cong\mathbb{Z}$

(∵) $\pi(\sigma_i\sigma_j\sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1})=0$

$\pi(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}) = \pi(\sigma_i)-\pi(\sigma_{i+1}) = e_i - e_{i+1}$

$B_n^{ab} = \mathbb{Z}^n/\langle e_i-e_{i+1}\ ;\ 1\le i\le n-1\rangle \cong \mathbb{Z}$

$e_i\longmapsto 1$ //

例 Gは $\mathbb{Z}/4 *_{\mathbb{Z}/2}\mathbb{Z}/6$ (実は $\cong SL_2(\mathbb{Z})$)

次の表示を持つ

生成元 x, y

関係式 x^4, y^6, x^2y^{-3}

$G^{ab} = \mathbb{Z}^2/\langle 4e_1, 6e_2, 2e_1-3e_2\rangle$

$\begin{cases} a_1 = e_1 - e_2 \\ a_2 = 2e_1 - 3e_2 \end{cases}$ $\begin{cases} e_1 = 3a_1 - a_2 \\ e_2 = 2a_1 - a_2 \end{cases}$

$G^{ab} = \mathbb{Z}^2/\langle a_2, 12a_1-4a_2, 12a_1-6a_2\rangle = \mathbb{Z}/12$

次回は $H^2(G;M)$ の意味について Euler類

§2. 群の拡大とEuler類

<u>今日やること</u> $H^2(G;M)$の意味，拡大のEuler類，中心拡大のGysin列

G：群

M：左G加群

<u>定義</u> $0 \to M \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ 群の拡大(extension)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$
0) E：群，ι, π：群準同型
1) π：全射，ι：単射
$\mathrm{Im}\,\iota = \mathrm{Ker}\,\pi \vartriangleleft E$
2) ${}^\forall e \in E$, ${}^\forall m \in M$
$e\iota(m)e^{-1} = \iota(\pi(e)m)$

<u>例1</u> $0 \to M \to M \rtimes G \to G \to 1$

$m \longmapsto (m, 1)$

$(m, x) \longmapsto x$

$\left(\because\ (m,x)(m',1)(-x^{-1}m, x^{-1}) = (m+xm', x)(-x^{-1}m, x^{-1}) = (xm', 1) \right)$

<u>例2</u>. $N \geqq 1$ $G = \mathbb{Z}/N$, $M = \mathbb{Z}$ trivial G-module

$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/N \to 0$

$x \longmapsto Nx$

$y \longmapsto y \bmod N$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \to M \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} G \to 1 \\ 0 \to M' \xrightarrow{\iota'} E \xrightarrow{\pi'} G \to 1 \end{array}\right\} \text{extensions}$$

<u>定義</u> 2つは同値である $E \sim E'$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \varphi : E \to E'$ group homom

s.t.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M & \xrightarrow{\iota} & E & \xrightarrow{\pi} & G & \to & 1 \\ & & \downarrow 1_M & & \downarrow \varphi & & \downarrow 1_G & & \\ 0 & \to & M & \to & E' & \to & G & \to & 1 \end{array}$$

このときφは同型，$\sim$は同値関係

$$\mathcal{E}(G;M) \overset{def}{=} \{0 \to M \to E \to G \to 1 \text{ extensions}\}/\sim$$

o. Date . .

これからやること

$$e : \mathcal{E}(G;M) \cong H^2(G;M), \quad E \mapsto e(E), \quad \text{拡大のEuler類}$$

Euler類の構成

$$0 \to M \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} G \to 1 \quad \text{拡大}$$

π の section をとる ($\Leftarrow \pi$: 全射)

つまり $\sigma : G \to E$ 写像 (準同型とは限らない)

$$\text{s.t.} \begin{cases} \pi \circ \sigma = 1_G \\ \sigma(1) = 1 \end{cases}$$

$x, y \in G$ について $e_\sigma(x,y) \in M$ を次で定める

$$\iota(e_\sigma(x,y))\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$$

要するに

$$e_\sigma(x,y) = \sigma(x)\sigma(y)\sigma(xy)^{-1} \quad (\sigma\text{がどのくらい準同型ではないか?})$$

$e_\sigma \in C^2(G;M)$ ($\because$ $e_\sigma(1,y) = 0 = e_\sigma(x,1)$)

例1 $M \rtimes G$, $\sigma : G \to M \rtimes G$, $x \mapsto (0,x)$. これは準同型なら $e_\sigma = 0$

例2 $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{N} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/N \to 0$

$$x \mapsto \bar{x}$$

$$\sigma : \mathbb{Z}/N \to \mathbb{Z}, \quad \sigma(\bar{x}) := x - \left[\frac{x}{N}\right]N \quad ([\ ]: \text{Gauss記号})$$

$$e_\sigma(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1}{N}\left(x - \left[\frac{x}{N}\right]N + y - \left[\frac{y}{N}\right]N - (x+y) + \left[\frac{x+y}{N}\right]N\right)$$

$$= \left[\frac{x+y}{N}\right] - \left[\frac{x}{N}\right] - \left[\frac{y}{N}\right] \quad (x, y \in \mathbb{Z})$$

e_σの別の見方 σを使うと 集合としての全単射

$$E \cong M \times G$$

$$u \mapsto (u\sigma\pi(u)^{-1}, \pi(u))$$

$$m\sigma(x) = \iota(m)\sigma(x) \leftarrow\!\!| \ (m, x)$$

がえられる. この全単射の下で E の積を書き下す

$$(m,x)(m',y) = m\sigma(x)m'\sigma(y) = m\sigma(x)m'\sigma(x)^{-1}\sigma(x)\sigma(y)\sigma(xy)^{-1}\sigma(xy)$$

$$= (m + xm' + e_\sigma(x,y), xy)$$

となる

一般に $f\in C^2(G:M)$ について拡大
$$0\to M\to E_f\to G\to 1$$
を次のように構成する.
$$E_f := \text{集合として } M\times G$$
積 $(m,x)(m',y)\overset{\text{def}}{=}(m+xm'+f(x,y),xy)$

(したがって $E\sim E_{e_\sigma}$)

単位元 $(0,1)(m,x)=(m,x)=(m,x)(0,1)$ (∵ $f(1,x)=f(x,1)=0$)

結合則 $((m,x)(m',y))(m'',z)=(m+xm'+f(x,y),xy)(m'',z)$

$=(m+xm'+f(x,y)+xym''+f(xy,z),xyz)$

$(m,x)((m',y)(m'',z))=(m,x)(m'+ym''+f(y,z),yz)$

$=(m+xm'+xym''+xf(y,z)+f(x,yz),xyz)$

ゆえに 結合則をみたす

$\Leftrightarrow \forall x,\forall y,\forall z\in G \quad f(x,y)+f(xy,z)=xf(y,z)+f(x,yz)$

$\Leftrightarrow f\in Z^2(G:M)$

とくに $e_\sigma\in Z^2(G:M)$

逆元 $(m,x)(-x^{-1}m-x^{-1}f(x,x^{-1}),x^{-1})=(m-m-f(x,x^{-1})+f(x,x^{-1}),1)=(0,1)$

$$0\to M\xrightarrow{\iota}E_f\xrightarrow{\pi}G\to 1 \quad \text{(exact)}$$
$$m\longmapsto(m,1)$$
$$(m,x)\longmapsto x$$

GのMへの作用

$(m,x)(m',1)(-x^{-1}m-x^{-1}f(x,x^{-1}),x^{-1})=(m,x)(m'-x^{-1}m-x^{-1}f(x,x^{-1}),x^{-1})$

$=(m+xm'-m-f(x,x^{-1})+f(x,x^{-1}),1)=(xm',1)$

したがって $(0\to M\to E_f\to G\to 1)\in\mathcal{E}(G:M)$

Euler類 $\sigma: G\to E_f,\ x\mapsto(0,x)$ について

$e_\sigma(x,y)=(0,x)(0,y)(0,xy)^{-1}$

$=(f(x,y),xy)(-y^{-1}x^{-1}f(xy,y^{-1}x^{-1}),y^{-1}x^{-1})$

$=(f(x,y)-f(xy,y^{-1}x^{-1})+f(xy,y^{-1}x^{-1}),1)$

$=(f(x,y),1)$

$=f(x,y)$

ゆえに $e_\sigma=f$

No. Date . .

もとにもどって

$$0 \to M \xrightarrow{i} E \underset{\sigma}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} G \to 1 \quad \text{extension}$$

とする

補題 2.1

(1) $e_\sigma \in Z^2(G;M)$

(2) $[e_\sigma] \in H^2(G;M)$ は σ のとり方によらない

証明 (1) は示した

(2) $\rho: G \to E$ 別の section $\pi\rho = 1_G$, $\rho(1) = 1$

$\pi(\rho(x)\sigma(x)^{-1}) = 1$ より

$h(x) := \rho(x)\sigma(x)^{-1} \in M$

$\rho(x) = h(x)\sigma(x)$, $h(1) = 0$

$$\begin{aligned}
e_\rho(x,y) &= h(x)\sigma(x)h(y)\sigma(y)\sigma(xy)^{-1}h(xy)^{-1} \\
&= h(x)\sigma(x)h(y)\sigma(x)^{-1}\sigma(x)\sigma(y)\sigma(xy)^{-1}h(xy)^{-1} \\
&= h(x) + xh(y) + e_\sigma(x,y) - h(xy) \\
&= e_\sigma(x,y) + (dh)(x,y)
\end{aligned}$$

ゆえに $e_\rho = e_\sigma + dh$. $[e_\rho] = [e_\sigma] \in H^2(G;M)$ //

定義 $e(E) := [e_\sigma] \in H^2(G;M)$

拡大 $0 \to M \to E \to G \to 1$ の Euler 類

$E \sim E' \Rightarrow e(E) = e(E')$ 明らか

定理 2.2 Euler 類は全単射

$$e: \mathcal{E}(G;M) \cong H^2(G;M)$$

を与える

証明 全射 $\forall f \in Z^2(G;M)$ について 群拡大 $0 \to M \to E_f \to G \to 1$ を とれば $e(E_f) = [f] \in H^2(G;M)$

単射 $E, E' \in \mathcal{E}(G;M)$

σ, τ section

これによって $E \cong E_{e_\sigma}$, $E' \cong E_{e_\tau}$ に注意する

$[e_\sigma] = [e_\tau] \in H^2(G;M)$ とする

$\exists h \in C^1(G;M)$　$e_\tau = e_\sigma + dh$

$\forall x, \forall y \in G$

$\tau(x)\tau(y)\tau(xy)^{-1} = e_\tau(x,y) = e_\sigma(x,y) + (dh)(x,y)$

$= \sigma(x)\sigma(y)\sigma(xy)^{-1} + \sigma(x)h(y)\sigma(x)^{-1} - h(xy) + h(x)$

$= h(x)\sigma(x)h(y)\sigma(y)\sigma(xy)^{-1}h(xy)^{-1}$

$\rho : G \to E$ を $\rho(x) := h(x)\sigma(x)$ とすると、これもsectionで

$e_\rho = e_\tau$

$\varphi : E \to E'$　$m\rho(x) \mapsto m\tau(x)$　これはgroup homom $(\because e_\rho = e_\tau)$

ゆえに $E \sim E'$ //

(注) $0 \in H^2(G;M)$ には半直積 $M \rtimes G$ が対応する.

自由群

S : 集合

$F(S)$: 自由群.　$\iota : S \hookrightarrow F(S)$ inclusion map

自由群の普遍性

$\forall G$: 群　$\forall f' : S \to G$ map

$\exists ! f : F(S) \to G$ homom

s.t. $f' = f \circ \iota$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr, "\forall f'"] & \\ F(S) \arrow[r, "\exists ! f"'] & G \end{tikzcd}$$

定理2.3　$\forall M$: $F(S)$-module

$H^2(F(S);M) = 0$

((注) 実は $\forall q \geq 2$　$H^q(F(S);M) = 0$)

証明　より詳しく

$\forall f : Z^2(F(S);M)$, $\forall h' : S \to M$ map

$\exists h \in C^1(F(S);M)$

s.t. $\begin{cases} f = dh \\ \forall s \in S \quad h(s) = h'(s) \end{cases}$

を示す. $-f$ による拡大

$0 \to M \to E_{-f} \to F(S) \to 1$

をとる.

o. Date

$\sigma' : S \to E_{-f},\ s \mapsto (h'(s), \iota(s))$

とする. 自由群の普遍性から σ' は $F(S)$ に拡張する

$\sigma : F(S) \to E_{-f}$ 準同型, $x \mapsto (h(x), x)$ とかく. $\forall x, y \in F(S)$

$(h(xy), xy) = (h(x), x)(h(y), y) = (h(x) + x h(y) - f(x,y), xy)$

$$f(x,y) = x h(y) - h(xy) + h(x)$$
$$= (dh)(x,y). //$$

とくに

$$h(xy) = h(x) + x h(y) - f(x,y) \qquad \forall x, \forall y \in F(S)$$

によって cobounding function が計算できる

$s_i \in S,\ \varepsilon_i = \pm 1,\ 1 \le i \le m$ について

$$h(s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \cdots s_m^{\varepsilon_m}) = \sum_{i=1}^{m} s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_{i-1}^{\varepsilon_{i-1}} h(s_i^{\varepsilon_i}) - \sum_{i=2}^{m} s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_{i-2}^{\varepsilon_{i-2}} f(s_{i-1}^{\varepsilon_{i-1}}, s_i^{\varepsilon_i} \cdots s_m^{\varepsilon_m})$$

($h(s^{-1})$ については $0 = h(s^{-1}s) = h(s^{-1}) + s^{-1}h(s) - f(s^{-1}, s)$ より

$h(s^{-1}) = -s^{-1}h(s) + f(s^{-1}, s)$

と求まる)

Gysin 完全列 G : 群, $M = \mathbb{Z}$: trivial G-module

$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$ extension $(\iota(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{Center}(E))$

$e = e(E) \in H^2(G; \mathbb{Z})$

定理 2.4 $\forall N$: G-module

$$\cdots \to H^{q-2}(G;N) \xrightarrow{\vee e} H^q(G;N) \xrightarrow{\pi^*} H^q(E;N) \xrightarrow[\text{Gysin map}]{\pi_\#} H^{q-1}(G;N) \xrightarrow{\vee e} \cdots \ \text{(exact)}$$

Gysin exact sequence

証明はあとで. Lyndon-Hochschild-Serre spectral sequence を用いる

$S^1 = B\mathbb{Z}$ なので球面束の Gysin 完全列の特別な場合

例 $N \geq 1$ cohomology 環 $H^*(\mathbb{Z}/N; \mathbb{Z})$ の計算

$H^*(G) = H^*(G; \mathbb{Z})$

$H^0(\mathbb{Z}/N) = \mathbb{Z}$

$H^1(\mathbb{Z}/N) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/N, \mathbb{Z}) = 0$

$e := \mathrm{Euler}(\mathbb{Z} \xrightarrow{N} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/N) \in H^2(\mathbb{Z}/N)$

$\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}/N$ $\quad f(\bar{x}, \bar{y}) = \left[\frac{x+y}{N}\right] - \left[\frac{x}{N}\right] - \left[\frac{y}{N}\right]$ で代表される

$$H^q(\mathbb{Z}) \underset{\text{あとで } B\mathbb{Z}=S^1}{\cong} H^q(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } q = 0,1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$q \geq 1$

$$\begin{tikzcd} H^{q+1}(\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^q(\mathbb{Z}/N) \arrow[r, "\cup e", "\cong"'] & H^{q+2}(\mathbb{Z}/N) \arrow[r] & H^{q+2}(\mathbb{Z}) \arrow[d, equal] \\ 0 & & & 0 \end{tikzcd}$$

q: odd ≥ 1 のとき $H^q(\mathbb{Z}/N) = H^1(\mathbb{Z}/N) = 0$.

q: even ≥ 2 のとき $H^q(\mathbb{Z}/N) = H^2(\mathbb{Z}/N)$)

$$\begin{tikzcd} H^1(\mathbb{Z}/N) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(\mathbb{Z}) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, equal] & H^0(\mathbb{Z}/N) \arrow[r, "\cup e"] \arrow[d, equal] & H^2(\mathbb{Z}/N) \arrow[r] & H^2(\mathbb{Z}) \arrow[d, equal] \\ 0 & \mathbb{Z} \arrow[r, "\text{実はN倍}"', "\text{あとで}"'] & \mathbb{Z} & & 0 \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow H^2(\mathbb{Z}/N) \cong \mathbb{Z}/N$.

$$H^{2p}(\mathbb{Z}/N) \overset{\cup e^{p-1}}{\cong} H^2(\mathbb{Z}/N) = (\mathbb{Z}/N)e \cong \mathbb{Z}/N.$$

したがって

$$H^*(\mathbb{Z}/N) = \mathbb{Z}[e]/(Ne), \quad \deg e = 2.$$

次回は Tor, Ext との関係

o. Date . .

§3 射影分解

今日やること

G：群，M：左G加群，$\mathbb{Z}$：自明G加群

$n \geqq 0$

$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \cong H^n(G; M)$

$\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}G}_n(M, \mathbb{Z}) \cong H_n(G; M)$

Ext，Torについて復習する

R：単位結合環（たとえば$\mathbb{Z}G$）

M：左R加群

定義 M：R-projective

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall f : A \to B$ R-modulesの全射

${}^\forall \varphi : M \to B$ R-homom

${}^\exists \xi : M \to A$ R-homom

s.t. $\varphi = f \circ \xi$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "{}^\exists\xi"'] \arrow[d, "{}^\forall\varphi"] & \\ A \arrow[r, "{}^\forall f"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

補題 3.1 M：R-moduleについて

M：R-projective

$\Longleftrightarrow$ MはあるR-自由加群のR-直和因子に同型である

（証明略）

とくにR-自由加群はR-projective

例 $R = \mathbb{Z}G$ 群環

$\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$，$\sum a_x x \mapsto \sum a_x$ augmentation map ring homom $\varepsilon(uv) = \varepsilon(u)\varepsilon(v)$

$IG := \mathrm{Ker}\,\varepsilon \subset \mathbb{Z}G$ augmentation ideal

一般にIGは$\mathbb{Z}G$の$\mathbb{Z}G$-直和因子ではない

さらにIGは$\mathbb{Z}G$-projectiveではない。

例外が自由群

No. Date . .

定理 3.2 $G=F(S)$ 集合Sの生成する自由群について次の$\mathbb{Z}G$-同型が成立つ

$$IG=\bigoplus_{s\in S}(\mathbb{Z}G)(s-1)\cong(\mathbb{Z}G)^{\oplus S}$$

とくに IG は $\mathbb{Z}G$-free である

証明 $s\in S$ について crossed homomorphism

$$\frac{\partial}{\partial s}: G\to\mathbb{Z}G$$

であって $\forall t\in S$ $\frac{\partial t}{\partial s}=\delta_{ts}$ (Kronecker's delta) をみたすものがただ1つ存在する Fox' free differential という

($\because$) $G\to\mathbb{Z}G\rtimes G$ 準同型で $t\mapsto(\delta_{st},t)$ をみたすものをとれ)

Fundamental formula for free calculus

$$\forall x\in G,\quad \sum_{s\in S}\frac{\partial x}{\partial s}(s-1)=x-1$$

($\because$) 左辺 $=d(x)$ とおくと

$$d(xy)=\sum\frac{\partial(xy)}{\partial s}(s-1)=\sum\frac{\partial x}{\partial s}(s-1)+\sum x\frac{\partial y}{\partial s}(s-1)$$

$$=d(x)+xd(y)\quad\text{crossed homom.}$$

右辺も crossed homomorphism $(xy-1=x-1+x(y-1))$

$\forall t\in S$ $d(t)=\sum\delta_{ts}(s-1)=t-1$

生成元での値が一致するので G 全体でも一致する //

$\frac{\partial}{\partial s}$ を $\mathbb{Z}G$ に $\mathbb{Z}$-線型にのばす

$$\frac{\partial}{\partial s}(uv)=\varepsilon(v)\frac{\partial u}{\partial s}+u\frac{\partial v}{\partial s}\quad(\forall u\ \forall v\in\mathbb{Z}G)$$

(#) $$\sum_{s\in S}\frac{\partial u}{\partial s}(s-1)=u-\varepsilon(u)\quad(\forall u\in\mathbb{Z}G)$$

定理の証明をはじめる

$$\varphi:(\mathbb{Z}G)^{\oplus S}\to IG,\quad (u_s)_{s\in S}\mapsto\sum_{s\in S}u_s(s-1)$$

$$\psi: IG\to(\mathbb{Z}G)^{\oplus S}\quad v\mapsto\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_{s\in S}$$

とおく (#)より $\varphi\psi(v)=v$ $(\forall v\in IG)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum u_s(s+1)\right) = \sum \varepsilon(s+1)u_s + u_s\delta_{st} = u_t$$

だから $\psi\varphi(u_s)_{s\in S} = (u_s)_{s\in S}$. ゆえに φとψは互いに逆になる //

一般論にもどって

R：単位結合環

M, N：左R加群

<u>定義</u> $\widetilde{X}_* = \{X_n, \partial_n\}_{n\geq 0}$: Mの射影R分解

$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$
0) X_n：射影R加群 $(n\geq 0)$
$\partial_n : X_n \to X_{n-1}$ R準同型 $(n\geq 1)$
$\partial_0 : X_0 \to M$ R準同型
1) $\to X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1} \to \cdots \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0} M \to 0$ (exact)

このとき

$$X_* := \{\to X_n \to \cdots \to X_1 \to X_0\}$$

とおく。これはchain複体である

<u>定理3.3</u>

$\widetilde{X}_* = \{X_n, \partial_n\}_{n\geq 0}$: Mの射影R分解

$\widetilde{Y}_* = \{Y_n, \partial'_n\}_{n\geq 0}$: N

$\alpha : M \to N$

$\Rightarrow \exists f_* : X_* \to Y_*$ chain map

s.t.
$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{\partial_0} & M \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ Y_0 & \xrightarrow{\partial'_0} & N \end{array}$$

このようなchain map f_*はchain homotopyを除き一意的である。

(証明略)

<u>定義</u> M, N：左R加群，L：右R加群

$\widetilde{X}_*$：Mの射影R分解

$n\geq 0$

$$\mathrm{Ext}^n_R(M,N) \overset{\mathrm{def}}{=} H^n(\mathrm{Hom}_R(X_*, N))$$
$$\mathrm{Tor}^R_n(L,M) \overset{\mathrm{def}}{=} H_n(L\otimes_R X_*)$$

($\widetilde{X}_*$のとり方によらない。同型写像も一意にきまる $\Leftarrow$ Th 3.3)

No. Date . .

群のcohomologyにもどる

G：群

M：左G加群 ($mx = x^{-1}m$ $x \in G$, $m \in M$によって右G加群とみなす)

$\mathbb{Z}$：自明G加群

補題3.4. $n \geqq 0$

$$H^n(G;M) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$$

$$H_n(G;M) = \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}G}_n(M, \mathbb{Z})$$

証明 $\tilde{P}_*$：standard bar resolution

$\widetilde{P_*/D_*}$：normalized bar resolution

$C^*(G;M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_*/D_*, M)$

$C_*(G;M) = M \otimes_{\mathbb{Z}G} P_*$

$P_n = \bigoplus_{x_1,\cdots,x_n} \mathbb{Z}G[x_1|\cdots|x_n]$ free $\mathbb{Z}G$ module

P_n/D_n：free $\mathbb{Z}G$-module

$\tilde{P}_*$, $\widetilde{P_*/D_*}$：$\mathbb{Z}$のfree $\mathbb{Z}G$-resolution //

注意 $\mathbb{Z}$の別の$\mathbb{Z}G$-projective resolution $\tilde{X}_*$についても

同型写像

$$H^n(G;M) \cong H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(X_*, M))$$

$$H_n(G;M) \cong H_n(M \otimes_{\mathbb{Z}G} X_*)$$

は一意に定まる ($\Leftarrow$ Th.3.3のchain mapの一意性)

例 $G = F(S)$：集合Sの生成する自由群

補題3.5. $\forall M$：左G加群 $\forall q \geqq 2$

$$H^q(G;M) = H_q(G;M) = 0$$

証明 Th.3.2から

$$0 \to IG \hookrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

は$\mathbb{Z}$の$\mathbb{Z}G$-free resolutionである

ゆえに $q \geqq 2$について

$$H^q(G;M) = H^q(\leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(IG,M) \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G,M)) = 0$$
$$H_q(G;M) = H_q(\to 0 \to 0 \to M\otimes_{\mathbb{Z}G} IG \to M\otimes_{\mathbb{Z}G}\mathbb{Z}G) = 0 \quad //$$

とくに $S=\{t\}$ 一点集合 のとき

$G=\mathbb{Z}$ infinite cyclic group

M：左 G 加群

$H^q(\mathbb{Z};M) = H_q(\mathbb{Z};M) = 0$ for $\forall q \geq 2$

$IG = (\mathbb{Z}G)(t-1) \cong \mathbb{Z}G$

$0 \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ $\quad$ $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}G$ free resolution

$$H^0(\mathbb{Z};M) = \mathrm{Ker}((1-t): M\to M) = M^t$$
$$H^1(\mathbb{Z};M) = \mathrm{Coker}((1-t): M\to M) = M/(1-t)M$$
$$H_0(\mathbb{Z};M) = \mathrm{Coker}((1-t): M\to M) = M/(1-t)M$$
$$H_1(\mathbb{Z};M) = \mathrm{Ker}((1-t): M\to M) = M^t$$

Poincaré duality

$B\mathbb{Z} = S^1$

とくに $H^q(\mathbb{Z};\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } q=0,1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

例 $n\geq 1$. $G = \mathbb{Z}/n = \langle t \rangle$ cyclic group of order n

$N := 1+t+\cdots+t^{n-1} \in \mathbb{Z}G$

$\cdots \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ $\quad$ free resolution

(∵) $u = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i \in \mathbb{Z}G$

$Nu = \sum a_i t^i N = \sum a_i N = \varepsilon(u) N.$

$Nu = 0 \Leftrightarrow \varepsilon(u) = 0.$

$N(1-t) = 0$ ($\Rightarrow$ chain cpx になっている)

$\mathrm{Ker}\,N (= \mathrm{Ker}\,\varepsilon) \subset \mathrm{Im}(1-t)$

(∵) $\varepsilon(u)=0$ とする

$\sum a_i t^i = \sum a_i t^i - \sum a_i = \sum a_i (t-1)(t^{i-1}+\cdots+t+1)$

$= (t-1)\sum a_i (t^{i-1}+\cdots+1) \in \mathrm{Im}(1-t).$ //

$\mathrm{Ker}(1-t) \subset \mathrm{Im}\,N$

(∵) $(1-t)u = 0$ とする t^i の係数をくらべて $a_i = a_{i+1}$

ゆえに $u = a_0 N \in \mathrm{Im}\,N$ // //

o. Date . .

M : left G-module $\quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \cong M$, $f \mapsto f(1)$

$$H^q(G;M) = H^q(\leftarrow M \xleftarrow{1-t} M \xleftarrow{N} M \xleftarrow{1-t} M)$$

$$= \begin{cases} M^G & \text{if } q=0 \\ M^G/NM & \text{if } q \geqq 2 \text{ even} \\ \mathrm{Ker}(N: M \to M)/(1-t)M & \text{if } q \geqq 1 \text{ odd} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とくに $M = \mathbb{Z}$ trivial G-module については $N = m$, $1-t = 0$ だから

$$H^q(\mathbb{Z}/m ; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } q=0 \\ \mathbb{Z}/m & \text{if } q \geqq 2 \text{ even} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

一番重要な例

定理3.6 X : 弧状連結, 局所弧状連結, 半局所単連結位相空間

$\pi : \widetilde{X} \to X$: 普遍被覆

$\widetilde{X} \simeq_w *$ (弱)可縮 (または $\forall q \geqq 2$ $\pi_q(X) = 0$)

$\Rightarrow$ $H^*(X;\mathbb{Z}) \cong H^*(\pi_1(X);\mathbb{Z})$

$H_*(X;\mathbb{Z}) \cong H_*(\pi_1(X);\mathbb{Z})$

注意 一般のな G加群 M についても同様のことが成立つ (来週)

証明も来週やる. ― 要するに $\widetilde{S}_*(\widetilde{X})$ が $\mathbb{Z}$ の free resolution になっている.

注意 任意の群 G について

$$\pi_q(X) = \begin{cases} G & \text{if } q=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

をみたす連結CW複体 X が存在し homotopy を除いて一意的

$X = BG$ と書き, 群 G の分類空間 (classifying space) とよぶ

例 $S^1 = B\mathbb{Z}$ $\quad H^*(\mathbb{Z};\mathbb{Z}) = H^*(S^1;\mathbb{Z})$

例 $n \geqq 2$

$$Y_n := \{(z_1, \cdots, z_n) ; 1 \leqq {}^\forall i < {}^\forall j \leqq n,\ z_i \neq z_j\}$$

$$= \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{1 \leqq i < j \leqq n} \{z_i = z_j\}$$

$\mathfrak{S}_n \curvearrowright Y_n \quad \sigma(z_1,\cdots,z_n) = (z_{\sigma(1)},\cdots,z_{\sigma(n)})$ free action

$B_n := \pi_1(Y_n/\mathfrak{S}_n)$ Artin braid group

$Y_n/\mathfrak{S}_n = \{f(z) \in \mathbb{C}[z]$; 最高次係数$=1$で重根をもたないn次多項式

$\forall g \geq 2 \quad \pi_g(Y_n/\mathfrak{S}_n) = 0$

(∵) $\pi_g(Y_n/\mathfrak{S}_n) = \pi_g(Y_n) \quad (g \geq 2)$

nの帰納法で $\pi_g(Y_n) = 0$ を示す.

$n=1. \quad Y_1 = \mathbb{C} \simeq *$

$Z_{n-1} := \mathbb{C} \setminus (n-1)$ pts

$Z_{n-1} \to Y_n \to Y_{n-1}$ fiber bundle になっている

$(z_1,\cdots,z_n) \mapsto (z_1,\cdots,z_{n-1})$

$\widetilde{Z}_{n-1} = \mathbb{C}$ 又は $H = \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im} z > 0\}$ ゆえに

$\pi_g(Z_{n-1}) = 0 \quad (\forall g \geq 2)$

$$\begin{array}{ccccc} \pi_g(Z_{n-1}) & \to & \pi_g(Y_n) & \to & \pi_g(Y_{n-1}) \\ \| & & & & \| \\ 0 & & & & 0 \end{array} \quad \text{(exact)}$$

帰納法の仮定

帰納法が進む //

$$H^*(B_n ; \mathbb{Z}) = H^*(Y_n/\mathfrak{S}_n ; \mathbb{Z})$$

<u>$n=3$</u> $\quad Y_3/\mathfrak{S}_3 = \{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$; 重根をもたない$\}$

$\wr\wr$ 根の平行移動

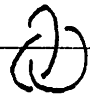
$\{z^3 + a_2 z + a_3$; 重根をもたない$\}$

$\|$

$\{(a_2, a_3) \in \mathbb{C}^2 ; 27a_3^2 + 4a_2^3 \neq 0\}$

$\|$

$(S^3 \setminus K) \times]0,\infty[$

ただし $K =$  trefoil knot

ゆえに

$$H^*(B_3 ; \mathbb{Z}) \cong H^*(S^3 \setminus K ; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 0,1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

o. Date

(§3. 射影分解 (つづき))

<u>注意</u>(再) 任意の群 G について

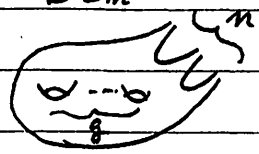
$$\pi_g(X) = \begin{cases} G & \text{if } g=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

をみたす連結CW複体 X が homotopy 同値を除いて一意的に存在する
これを $X = BG$ と書き 群 G の<u>分類空間</u> (classifying space) とよぶ

<u>例</u> (1) $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{R}^n \simeq *$

$T^n = B\mathbb{Z}^n$

(2) 先週の例 $Y_n/\mathfrak{S}_n = BB_n$

(3) $g, n \geqq 0$, $\Sigma_g^n :=$ 

$(g,n) \neq (0,0)$ のとき

$\widetilde{\Sigma_g^n} = \mathbb{H} (= \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\})$ または $\mathbb{C} \simeq *$

ゆえに $\Sigma_g^n = B\pi_1(\Sigma_g^n)$

(4) $n \geqq 1$

$\mathbb{Z}/n = \{\zeta \in \mathbb{C} ; \zeta^n = 1\}$ 同一視

$\mathbb{Z}/n \curvearrowright S^{2m+1} = \{(z_0, \cdots, z_m) \in \mathbb{C}^{m+1} ; \sum |z_i|^2 = 1\}$

$\zeta(z_0, \cdots, z_m) = (\zeta z_0, \cdots, \zeta z_m)$ free action

$L^{2m+1}(n) := S^{2m+1}/\mathbb{Z}/n$ lens space

$L^{2m+1}(n) \hookrightarrow L^{2m+3}(n)$

$(z_0, \cdots, z_m) \longmapsto (z_0, \cdots, z_m, 0)$

$L(n) := \lim_{m \to \infty} L^{2m+1}(n) = \bigcup_{m=0}^{\infty} L^{2m+1}(n)$ lens space

$\widetilde{L(n)} = \lim_{m\to\infty} S^{2m+1} = S^\infty \simeq *$

$L(n) = B(\mathbb{Z}/n)$

(5) G_1, G_2 ; 群

$B(G_1 \times G_2) = BG_1 \times BG_2$

$(\because\ \pi_g(X \times Y) = \pi_g(X) \times \pi_g(Y))$

o. Date . .

局所系の(コ)ホモロジー

X : 弧状連結, 局所弧状連結, 半局所単連結 Hausdorff空間

$\pi : \tilde{X} \to X$: 普遍被覆空間

$\tilde{*} \in \tilde{X} \overset{\pi}{\mapsto} * \in X$ 基点

$G = \pi_1(X, *)$ 被覆変換群

G は $\tilde{X}$ に右作用している.

$x = [l] \in G$, $\tilde{l}$: l の lift, $\tilde{l}(0) = \tilde{*}$ とすると $\tilde{l}(1) = \tilde{*}x$

いつものように左作用に見直す ($\tilde{p} \in \tilde{X}$, $x \in G$ $x\tilde{p} := \tilde{p}x^{-1}$)

$X = \tilde{X}/G$

局所系 (local system, locally constant sheaf)

M : Abel 群 (離散位相を入れる)

定義 $\varpi : \mathcal{S} \to X$ X 上の Abel 群 M を fiber とする局所系

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
0) $\mathcal{S}, X$: 位相空間, ϖ : 連続写像

1) $\forall p \in X$ $\varpi^{-1}(p)$ ($=: \mathcal{S}_p$ とかく) に Abel 群の構造が入っている

2) (局所自明性)

$\forall p \in X, p \in {}^{\exists}U \overset{\text{open}}{\subset} X$, ${}^{\exists}\varphi : \varpi^{-1}(U) \to U \times M$ homeo

s.t. $pr_1 \circ \varphi = \varpi : \varpi^{-1}(U) \to U$. $\quad (g, m) \mapsto g \in U$, $\downarrow pr_1$

$\forall g \in U$ $\varphi|_{\mathcal{S}_g} : \mathcal{S}_g \to \{g\} \times M$ Abel 群の同型

例 (1) X : n 次元位相多様体

$\mathcal{S}_p = H_n(X, X - \{p\} ; \mathbb{Z})$ $(p \in X)$

となる X 上の局所系がとれる. orientation sheaf

(2) $F \to E \overset{\pi}{\to} B$: fiber bundle, $q \geq 0$

$\mathcal{H}^q{}_p = H^q(\pi^{-1}(p) ; \mathbb{Z})$ $(p \in B)$

となる B 上の局所系 $\mathcal{H}^q$ がとれる

<u>重要な例</u> または一般的な状況で

$G \curvearrowright \tilde{X}$, $\tilde{X}/G = X$

M : 左 G 加群

$G \curvearrowright \tilde{X} \times M$ 対角作用

$$x(\tilde{p}, m) := (x\tilde{p}, xm) = (\tilde{p}x^{-1}, xm) \quad (x \in G,\ \tilde{p} \in \tilde{X},\ m \in M)$$

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}^M := (\tilde{X} \times M)/G$$

$$[\tilde{p}, m] := (\tilde{p}, m) \bmod G \in \mathcal{S}$$

$$\varpi : \mathcal{S} \to X \quad [\tilde{p}, m] \mapsto \pi(\tilde{p})$$

これは局所系となる

<u>補題 3.7</u> X, $\pi : \tilde{X} \to X$, 上のとおり, $G = \pi_1(X, *)$

任意の局所系 $\varpi : \mathcal{S} \to X$ は ある G 加群 M によって

$\mathcal{S} \cong \mathcal{S}^M$ となる

(証明略)

以下, 局所系は $\mathcal{S}^M$ の形のものだけを考える

<u>平行移動</u>

$l : [0,1] \to X$ 連続写像 (つまり path)

$\tilde{l} : [0,1] \to \tilde{X}$: l の lift (つまり $\pi \circ \tilde{l} = l$ なる path)

$l_* : \mathcal{S}_{l(0)} \to \mathcal{S}_{l(1)}$, $[\tilde{l}(0), m] \mapsto [\tilde{l}(1), m]$, 平行移動とよぶ

lift $\tilde{l}$ のとり方によらない (∵) 別の lift は $x\tilde{l}$, $x \in G$, と書ける

$[x\tilde{l}(0), m] = [\tilde{l}(0), x^{-1}m] \mapsto [\tilde{l}(1), x^{-1}m] = [x\tilde{l}(1), m]$

l の homotopy 類だけできまる (∵) $l \simeq l' \ \mathrm{rel}\ \partial$, $\tilde{l}'(0) = \tilde{l}(0)$ ならば $\tilde{l}'(1) = \tilde{l}(1)$

<u>path の積</u> l_1, l_2 : X の path $l_1(1) = l_2(0)$

$$(l_2 l_1)(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} l_1(2t) & (0 \le t \le \frac{1}{2}) \\ l_2(2t-1) & (\frac{1}{2} \le t \le 1) \end{cases}$$

←

$$(l_2 l_1)_* = l_{2*} l_{1*} : \mathcal{S}_{l_1(0)} \to \mathcal{S}_{l_1(1)} = \mathcal{S}_{l_2(0)} \to \mathcal{S}_{l_2(1)}$$

$l(0) = l(1) = *$ のとき $x = [l] \in G$ とすると

$\tilde{l}(0) = \tilde{*}$ なる lift $\tilde{l}$ について $\tilde{l}(1) = \tilde{*}x = x^{-1}\tilde{*}$

$l_*([\tilde{*}, m]) = [x^{-1}\tilde{*}, m] = [\tilde{*}, xm]$ G の M への作用に一致す

o. Date . .

局所系の特異(コ)ホモロジー $X, \tilde{X}, G=\pi_1(X,*), M$ これまで通り

$\mathcal{S}=\mathcal{S}^M$ とする

$n \geq 0$ $\Delta^n=\{(x_0,x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1};\ x_i\geq 0,\ \sum x_i=1\}$ standard n-simplex

$*:=(1,0,\cdots,0)\in\Delta^n$

$C(\Delta^n,X):=\{\sigma:\Delta^n\to X\ ;$ 連続写像$\}$

$S_n(X;\mathcal{S}):=\{\underbrace{\sum_{\sigma\in C(\Delta^n,X)} a_\sigma\sigma}_{\text{形式和}}\ ;\ a_\sigma\in\mathcal{S}_{\sigma(*)}$, 有限個の$\sigma$を除いて$a_\sigma=0\}$

$0\leq i\leq n$

$\partial_i:\Delta^{n-1}\to\Delta^n,\ (x_0,\cdots,x_n)\mapsto(x_0,\cdots,x_{i-1},0,x_i,\cdots,x_n)$

$\partial_i(*)=*\quad(i\geq 1)$

$\partial_0(*)=(0,1,0,\cdots,0)\neq(1,0,\cdots,0)=*$

$\gamma:[0,1]\to\Delta^n\quad t\mapsto(1-t,t,0,\cdots,0)$

$\gamma(0)=*,\ \gamma(1)=\partial_0(*)$

$\partial\left(\sum_\sigma a_\sigma\sigma\right)\overset{\text{def}}{=}\sum_\sigma(\sigma\circ\gamma)_*(a_\sigma)(\sigma\circ\partial_0)+\sum_\sigma\sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_\sigma(\sigma\circ\partial_i)\in S_{n-1}(X;\mathcal{S})$

$\partial:S_n(X;\mathcal{S})\to S_{n-1}(X;\mathcal{S})$

$\partial\partial=0$ (checkする必要はない, あとでわかる)

$S_*(X;\mathcal{S}):=\{S_n(X;\mathcal{S}),\partial\}_{n\geq 0}$

$H_n(X;\mathcal{S}):=H_n(S_*(X;\mathcal{S}))$

局所系$\mathcal{S}$に係数をもつXの第n homology群

$S^n(X;\mathcal{S})=\{f:C(\Delta^n,X)\to\mathcal{S}\ ;\ \text{map},\ \forall\sigma\in C(\Delta^n,X),\ f(\sigma)\in\mathcal{S}_{\sigma(*)}\}$

$(df)(\sigma)\overset{\text{def}}{=}(\sigma\circ\gamma)_*^{-1}f(\sigma\circ\partial_0)+\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i f(\sigma\circ\partial_i),\quad\sigma\in C(\Delta^{n+1},X)$

$d:S^n(X;\mathcal{S})\to S^{n+1}(X;\mathcal{S})$

$dd=0$

$S^*(X;\mathcal{S}):=\{S^n(X;\mathcal{S}),d\}_{n\geq 0}$

$H^n(X;\mathcal{S}):=H^n(S^*(X;\mathcal{S}))$

局所系$\mathcal{S}$に係数をもつXの第n cohomology群

$\mathcal{L} = X \times \mathbb{Z}$ 自明局所系のとき

$S_*(X : X \times \mathbb{Z}) = S_*(X)$

$S^*(X : X \times \mathbb{Z}) = S^*(X)$

と書く.

$S_n(X) = \mathbb{Z}C(\Delta^n, X)$

$S^n(X) = \mathrm{Hom}(S_n(X), \mathbb{Z})$

である.

注意 X が CW 複体のとき

$C_n(X : \mathcal{L}) = H_n(X^n, X^{n-1} ; \mathcal{L})$ （X^n は X の n-骨格）

$C^n(X : \mathcal{L}) = H^n(X^n, X^{n-1} ; \mathcal{L})$

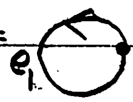
によって (co)chain 複体 $C_*(X : \mathcal{L})$, $C^*(X : \mathcal{L})$ が定義されて

その (co)homology は $H_*(X : \mathcal{L})$, $H^*(X : \mathcal{L})$ にひとしい

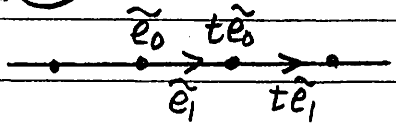
とくに X が（頂点全体に全順序が入っている）単体複体の場合

$C_*(X : \mathcal{L})$ たちは $S_*(X : \mathcal{L})$ たちと同様に定義される

例 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = B\mathbb{Z}$

$=$ 

, $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$

$\mathbb{R} =$ 

M : 左 $\mathbb{Z}$ 加群 $\Rightarrow$ $\mathcal{L} = \mathcal{L}^M$: S^1 上の局所系

$$C_n(S^1 : \mathcal{L}) = \begin{cases} Me_0 & \text{if } n = 0 \\ Me_1 & 1 \\ 0 & \geq 2 \end{cases}$$

$\partial(me_1) = mt - m = (t^{-1} - 1)m$

$H_0(S^1 : \mathcal{L}) = M/(t^{-1}-1)M = M/(t-1)M = H_0(\mathbb{Z} : M)$

$H_1(S^1 : \mathcal{L}) = \mathrm{Ker}(t^{-1}-1 : M \to M) = M^t = H_1(\mathbb{Z} : M)$

No. Date

もとにもどって $X, \tilde{X}, G=\pi_1(X), M, \mathcal{L}=\mathcal{L}^M$ これまで通り

$G \curvearrowright \tilde{X}$ 自由な作用, $X=\tilde{X}/G$

$S_*(\tilde{X})$: 左G加群, ∂ はG準同型である

以下, $n \geq 0$, 各 $\sigma \in C(\Delta^n, X)$ について lift $\tilde{\sigma} \in C(\Delta^n, \tilde{X})$ を1つ固定する

すると $\forall \tau \in C(\Delta^n, \tilde{X}), \exists! x \in G,\ \tau = x(\widetilde{\pi\circ\tau})$ つまり

$$C(\Delta^n, \tilde{X}) = \{x\tilde{\sigma} : x\in G, \sigma \in C(\Delta^n, X)\} \underset{G\text{-set}}{\cong} G\times C(\Delta^n, X)$$

(∂_i たちは保たない)

$$S_n(\tilde{X}) \cong \mathbb{Z}(G\times C(\Delta^n, X)) = (\mathbb{Z}G)C(\Delta^n, X)$$

$\mathbb{Z}G$-free module になっている

補題3.8 次の(co)chain複体の同型が成立つ

(1) $S_*(X;\mathcal{L}) = M \otimes_{\mathbb{Z}G} S_*(\tilde{X})$

(2) $S^*(X;\mathcal{L}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(S_*(\tilde{X}), M)$

(ここから局所系の $\partial\partial=0$, $dd=0$ もわかる)

証明 (1) $\alpha : M\otimes_{\mathbb{Z}G} S_*(\tilde{X}) \to S_*(X;\mathcal{L})$

$\alpha(m\otimes\tau) \overset{\text{def}}{=} [\tau(*), m](\pi\circ\tau) \quad (\tau \in C(\Delta^n, \tilde{X}), m\in M)$

(well-defined) $\forall x\in G\ [x\tau(*), xm] = [\tau(*), m]$

(chain map) 各自でcheckする $\partial\alpha(m\otimes\tau) = \alpha(m\otimes\partial\tau)$

$$\begin{aligned}
&\partial\alpha(m\otimes\tau) = \partial([\tau(*), m](\pi\circ\tau)) \qquad \left(\begin{matrix} i\geq 1 \text{のとき} \\ \partial_i(*) = * \end{matrix}\right)\\
&= (\pi\circ\tau\circ\gamma)_*[\tau(*), m](\pi\circ\tau\circ\partial_0) + \sum(-1)^i[\tau\circ\partial_i(*), m](\pi\circ\tau\circ\partial_i)\\
&\quad (\pi\circ\tau\circ\gamma \text{ の lift として } \tau\circ\gamma \text{ がとれる})\\
&= [\tau\circ\partial_0(*), m](\pi\circ\tau\circ\partial_0) + \sum(-1)^i[\tau\circ\partial_i(*), m](\pi\circ\tau\circ\partial_i)\\
&= \alpha(m\otimes\tau\circ\partial_0) + \sum(-1)^i\alpha(m\otimes(\tau\circ\partial_i))\\
&= \alpha(m\otimes\partial\tau)
\end{aligned}$$

逆をつくる

$\beta : S_*(X;\mathcal{L}) \to M\otimes_{\mathbb{Z}G} S_*(\tilde{X})$

$\beta(a_\sigma\sigma) \overset{\text{def}}{=} m_{\tilde{\sigma}}\otimes\tilde{\sigma}$ ただし $a_\sigma = [\tilde{\sigma}(*), m_{\tilde{\sigma}}] \in \mathcal{L}_{\sigma(*)}$

(lift $\tilde{\sigma}$ のとり方によらない) $[x\tilde{\sigma}(*), m_{x\tilde{\sigma}}] = a_\sigma = [x\tilde{\sigma}(*), xm_{\tilde{\sigma}}]$

ゆえに $m_{x\tilde{\sigma}} = xm_{\tilde{\sigma}}$ そこで $m_{x\tilde{\sigma}}\otimes_G x\tilde{\sigma} = m_{\tilde{\sigma}}\otimes\tilde{\sigma}$

αとβは互いに逆（各自）　$\tau = x(\widetilde{\pi\circ\tau})$

$$\begin{cases} \beta\alpha(m\otimes\tau) = \beta([\tau(*), m](\pi\circ\tau)) = \beta([x(\widetilde{\pi\circ\tau})(*), m](\pi\circ\tau)) \\ = x^{-1}m\otimes(\widetilde{\pi\circ\tau}) = m\otimes x(\widetilde{\pi\circ\tau}) = m\otimes\tau \\ \alpha\beta([\tilde\sigma(*), m_{\tilde\sigma}]\sigma) = \alpha(m_{\tilde\sigma}\otimes\tilde\sigma) = [\tilde\sigma(*), m_{\tilde\sigma}]\sigma \end{cases}$$

(2) $\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(S_*(\tilde X), M) \to S^*(X;\mathcal{L})$

$\alpha(f)(\sigma) \overset{\mathrm{def}}{=} [\tilde\sigma(*), f(\tilde\sigma)] \in \mathcal{L}_{\sigma(*)}$, $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(S_*(\tilde X), M)$, $\sigma\in C(\Delta^n, X)$

(lift $\tilde\sigma$ のとり方によらない) $[x\tilde\sigma(*), f(x\tilde\sigma)] = [\tilde\sigma(*), f(\tilde\sigma)]$

(cochain map) 各自でcheckする $(d\alpha(f))(\sigma) = \alpha(df)(\sigma)$

$$\begin{cases} \exists^1 x_i\in G \quad \widetilde{\sigma\circ\partial_i} = x_i(\tilde\sigma\circ\partial_i) \\ (d\alpha(f))(\sigma) = (\sigma\circ\gamma)^{-1}_*\alpha(f)(\sigma\circ\partial_0) + \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i\alpha(f)(\sigma\circ\partial_i) \\ = (\sigma\circ\gamma)^{-1}_*[\widetilde{\sigma\circ\partial_0}(*), f(\widetilde{\sigma\circ\partial_0})] + \sum(-1)^i[\widetilde{\sigma\circ\partial_i}(*), f(\widetilde{\sigma\circ\partial_i})] \\ = (\sigma\circ\gamma)^{-1}_*[x_0\tilde\sigma\circ\partial_0(*), x_0f(\tilde\sigma\circ\partial_0)] + \sum(-1)^i[x_i\tilde\sigma\circ\partial_i(*), x_if(\tilde\sigma\circ\partial_i)] \\ = (\sigma\circ\gamma)^{-1}_*[\tilde\sigma\circ\partial_0(*), f(\tilde\sigma\circ\partial_0)] + \sum(-1)^i[\tilde\sigma(*), f(\tilde\sigma\circ\partial_i)] \\ \quad (\sigma\circ\gamma \text{ の lift として } \tilde\sigma\circ\gamma \text{ がつかえる}) \\ = [\tilde\sigma(*), f(\tilde\sigma\circ\partial_0)] + \sum(-1)^i[\tilde\sigma(*), f(\tilde\sigma\circ\partial_i)] \\ = [\tilde\sigma(*), (df)(\tilde\sigma)] \\ = \alpha(df)(\sigma) \end{cases}$$

逆をつくる

$\beta : S^*(X;\mathcal{L}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(S_*(\tilde X), M)$　$g\in S^*(X;\mathcal{L})$, $\tau\in C(\Delta^n, \tilde X)$

$\beta(g)(\tau) \overset{\mathrm{def}}{=} m_\tau$, ただし $[\tau(*), m_\tau] = g(\pi\circ\tau)$

(G-準同型) $[x\tau(*), m_{x\tau}] = g(\pi\circ(x\tau)) = g(\pi\circ\tau) = [\tau(*), m_\tau]$

ゆえに $\beta(g)(x\tau) = m_{x\tau} = xm_\tau = x\beta(g)(\tau)$

αとβは互いに逆

$$\begin{cases} \alpha\beta(g)(\sigma) = [\tilde\sigma(*), \beta(g)(\tilde\sigma)] = [\tilde\sigma(*), m_{\tilde\sigma}] = g(\pi\circ\tilde\sigma) = g(\sigma) \\ [\tau(*), \beta\alpha(f)(\tau)] = \alpha(f)(\pi\circ\tau) \underset{(\tau \text{ は } \pi\circ\tau \text{ の lift})}{=} [\tau(*), f(\tau)] \text{ ゆえに } \beta\alpha(f)(\tau) = f(\tau) \end{cases}$$

//

以上により

o. Date

定理 3.9 $X, \tilde{X}, G = \pi_1(X), M$ これまで通りとする。
さらに $\tilde{X} \simeq_w *$ (弱)可縮, つまり $\pi_q(X) = 0$ ($\forall q \geqq 2$) とすると同型

$$H^*(X;\mathcal{M}) \cong H^*(G;M)$$

$$H_*(X;\mathcal{M}) \cong H_*(G;M)$$

が定まる.

証明 $S_*(\tilde{X})$ は $\mathbb{Z}G$-free module である
仮定より $H_*(\tilde{X}) = \mathbb{Z}$ (in dim. 0) だから
$S_*(\tilde{X}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ は $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}G$-free resolution である
あとは補題 3.8 による //

§4 (余)誘導表現

<u>言い忘れていたこと</u>

$G=\{1\}$ 自明群のとき

$$H^*(G;M)=H_*(G;M)=M \text{ (in dim 0)}$$

(∵) ・ $P_*/D_* = \mathbb{Z}G[\ ]$ (in dim 0)
・ $BG = *$)

G：群

$H\subset G$ 部分群，$i: H \hookrightarrow G$ inclusion とする

M：左 H 加群 について

$$\mathrm{Ind}_H^G M \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{Z}G\otimes_{\mathbb{Z}H} M \quad \text{induced module}$$

$$\mathrm{Coind}_H^G M \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G;M) \quad \text{coinduced module}$$

((注) $\mathbb{Z}G$ は両側 G 加群である。
$\otimes_{\mathbb{Z}H}$ は $\mathbb{Z}G$ の右 H 加群としてのtensor積である)

$$\iota: M \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G M,\quad m \longmapsto 1\otimes m$$

$$\pi: \mathrm{Coind}_H^G M \longrightarrow M,\quad f \longmapsto f(1)$$

これらは左 G 加群になり，π，ι は H-準同型である

実際 $x,y\in G$，$m\in M$ について

$$x(y\otimes m) := (xy)\otimes m$$

とくに $x\in H$，$y=1$ のとき

$$x\iota(m) = x(1\otimes m) = x\otimes m = 1\otimes xm = \iota(xm)$$

また $x,y\in G$，$f\in \mathrm{Coind}_H^G M$ について

$$(xf)(y) := f(yx) \qquad \left((x'(x''f))(y) = (x''f)(yx') = f(yx'x'') \right) = ((x'x'')f)(y)$$

とくに $x\in H$ のとき

$$\pi(xf) = (xf)(1) = f(x) = xf(1) = x\pi(f)$$

普遍性 (1) $\forall N$：左 G 加群

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\forall f"] \arrow[d, "\iota"'] & N \\ \mathrm{Ind}_H^G M \arrow[ur, dashed, "\exists! \tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\forall f : M \to N$ H-homom

$\exists! \tilde{f} : \mathrm{Ind}_H^G M \to N$ G-homom

s.t. $f = \tilde{f} \circ \iota$

($\because$ $\tilde{f}(x \otimes m) := x f(m)$ とすればよい)

(2) $\forall N$：左 G 加群

$$\begin{tikzcd} \forall N \arrow[r, "\forall g"] \arrow[d, dashed, "\exists! \hat{g}"'] & M \\ \mathrm{Coind}_H^G M \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

$\forall g : N \to M$ H-homom

$\exists! \hat{g} : N \to \mathrm{Coind}_H^G M$ G-homom

s.t. $g = \pi \circ \tilde{g}$

($\because$ $\hat{g}(m)(x) = x g(m)$ とすればよい)

何故このようなことを考えるか？

定理 4.1 (Shapiro Lemma) M：左 H 加群について

(1) 合成写像

$$H_*(H : M) \xrightarrow{\iota_*} H_*(H : \mathrm{Ind}_H^G M) \xrightarrow{i_*} H_*(G : \mathrm{Ind}_H^G M)$$

は同型である

(2) 合成写像

$$H^*(G : \mathrm{Coind}_H^G M) \xrightarrow{i^*} H^*(H : \mathrm{Coind}_H^G M) \xrightarrow{\pi_*} H^*(H : M)$$

は同型である

証明 (1) $P_*^G \to \mathbb{Z} \to 0$ G の standard bar resolution

$P_*^H \to \mathbb{Z} \to 0$ H

P_m^G : free $\mathbb{Z}G$-module $\Rightarrow$ free $\mathbb{Z}H$ module

($\because$ $\mathbb{Z}G$: $\mathbb{Z}H$-free)

$P_*^G \to \mathbb{Z} \to 0$ は $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}H$-free resolution とみなせる

$$\begin{array}{ccc} P_*^H & \to & \mathbb{Z} \\ {\scriptstyle i_*}\downarrow & & \| \\ P_*^G & \to & \mathbb{Z} \end{array}$$

これは free resolution の chain homotopy equivalence

ゆえに $i_* : H_*(P_*^H \otimes_{\mathbb{Z}H} M) \to H_*(P_*^G \otimes_{\mathbb{Z}H} M)$ は同型

$$P_*^G \otimes_{\mathbb{Z}H} M = P_*^G \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M = P_*^G \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathrm{Ind}_H^G M$$

$$u \otimes m \longmapsto u \otimes 1 \otimes m = u \otimes \iota(m)$$

かくして

$$H_*(H:M) = H_*(P_*^H \otimes_{\mathbb{Z}H} M) \cong H_*(P_*^G \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathrm{Ind}_H^G M) = H_*(G:\mathrm{Ind}_H^G M)$$

$$v \otimes m \longmapsto i_*(v) \otimes i(m)$$

//

(2) $F_*^G \to \mathbb{Z} \to 0$: G の ~~normalized~~ standard bar resolution

$i \uparrow$ 　　$\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}H$-free resolution とみなせる

$F_*^H \to \mathbb{Z} \to 0$: H の ~~normalized standard bar resolution~~

(1) と同様に

$$i^* : H^*(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(F_*^G, M)) \to H^*(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_*^H, M)) = H^*(H:M)$$

これは同型である

$\mathrm{Coind}_H^G M$ の普遍性により

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(F_*^G, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_*^G, \mathrm{Coind}_H^G M)$$

$$\pi \circ f \longleftarrow f$$

$$H^*(G:\mathrm{Coind}_H^G M) = H^*(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_*^G, \mathrm{Coind}_H^G M)) = H^*(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(F_*^G, M))$$

$$f \longmapsto \pi \circ f$$

$i^* \wr\|$

$$\pi \circ f \circ i \quad H^*(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(F_*^H, M)) = H^*(H:M)$$

//

$\mathrm{Coind}_H^G M$ と $\mathrm{Ind}_H^G M$ の関係

$x \in G \mapsto \bar{x} = x \bmod H \in G/H$

$\mathbb{Z}G \cong \bigoplus_{\bar{x} \in G/H} x(\mathbb{Z}H)$

$\mathrm{Ind}_H^G M \cong \bigoplus_{\bar{x} \in G/H} xM$ ← 直和

~~$\mathrm{Coind}_H^G M \cong \mathrm{Map}(G/H, M)$~~ ← 直積

G/H が有限なら直和と直積は同じだが

G/H が無限なら直和と直積はかなりちがう

補題 4.2 $\#(G/H) \neq \infty$ のとき 左 G 加群の自然な同型

$$\mathrm{Coind}_H^G M \cong \mathrm{Ind}_H^G M$$

が成立つ.

証明 $\alpha : M \to \mathrm{Coind}_H^G M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)$

$$\alpha(m)(z) = \begin{cases} zm & \text{if } z \in H \\ 0 & \text{if } z \notin H \end{cases} \quad \begin{pmatrix} m \in M \\ z \in G \end{pmatrix}$$

No. Date . .

$\alpha(m)$ は H-homom である (各自)

α は H-homom である

$\forall y \in H$ について ($z \in H \Leftrightarrow yz \in H$)

$$\alpha(m)(yz) = \begin{cases} yzm & \text{if } z \in H \\ 0 & \text{if } z \notin H \end{cases} = y\,\alpha(m)(z)$$

$$(y\alpha(m))(z) = \begin{cases} zym & \text{if } z \in H \\ 0 & \text{if } z \notin H \end{cases} = \alpha(ym)(z)$$

$\mathrm{Ind}_H^G M$ の普遍性により

$$\tilde{\alpha} : \mathrm{Ind}_H^G M \to \mathrm{Coind}_H^G M \quad G\text{-homom}$$
$$x \otimes m \mapsto x\alpha(m)$$

が定義できる (ここまでは $\#(G/H) \lneq \infty$ を使っていない)

逆を構成する

$$\beta : \underset{\substack{\Psi \\ f}}{\mathrm{Coind}_H^G} M \to \mathrm{Ind}_H^G M$$

$$\beta(f) = \sum_{\bar{x} \in G/H} x \otimes f(x^{-1}) \quad \left(\begin{array}{l} \text{仮定} \#(G/H) \lneq \infty \text{により} \\ \text{有限和として定義できる} \end{array}\right)$$

$y \in H$ $\quad xy \otimes f(y^{-1}x^{-1}) = xy \otimes y^{-1}f(x^{-1}) = x \otimes f(x^{-1})$

x のとり方によらない

$\tilde{\alpha}$ と β は互いに逆である (各自)

(∵) $z \in G$ について

$$\tilde{\alpha}\beta(f)(z) = \tilde{\alpha}\Big(\sum_{\bar{x} \in G/H} x \otimes f(x^{-1})\Big)(z) = \sum \big(x\,\alpha(f(x^{-1}))\big)(z)$$
$$= \sum \alpha(f(x^{-1}))(zx)$$
$$= z x_z f(x_z^{-1}) \quad \text{ただし } x_z \in G \text{ は } zx_z \in H \text{ をみたす}$$
$$= f(zx_z x_z^{-1}) \quad (\because\ zx_z \in H)$$
$$= f(z)$$

$$\beta\tilde{\alpha}(z \otimes m) = \beta(z\alpha(m)) = \sum_{\bar{x} \in G/H} x \otimes (z\alpha(m))(x^{-1})$$
$$= \sum_{\bar{x} \in G/H} x \otimes \alpha(m)(x^{-1}z) = x_z \otimes x_z^{-1} z m \quad \left(\begin{array}{l} \text{ただし } x_z \in G \text{ は} \\ x_z^{-1}z \in H \text{ をみたす} \end{array}\right)$$
$$= x_z x_z^{-1} z \otimes m \quad (\because\ x_z^{-1}z \in H)$$
$$= z \otimes m \quad //$$

・$\mathrm{Coind}_H^G M$ より $\mathrm{Ind}_H^G M$ の方がわかりやすいので主に $\mathrm{Ind}_H^G M$ で考える

・M が G 加群のとき inclusion $i: H \hookrightarrow G$ により H 加群とみなしたものを $\mathrm{Res}_H^G M$ と書くことにする

・$G/H = \{xH : x \in G\}$ には G が左から作用するので $\mathbb{Z}(G/H)$ は左 G 加群となる。

補題 4.3 M が左 G 加群のとき G-同型

$$\mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_H^G M \cong \mathbb{Z}(G/H) \otimes_{\mathbb{Z}} M$$

が成立つ。但、右辺は G が対角作用するものとする。とくに Shapiro Lemma により

$$H_*(G : \mathbb{Z}(G/H) \otimes M) = H_*(H : M)$$

さらに $\#(G/H) < \infty$ ならば

$$H^*(G : \mathbb{Z}(G/H) \otimes M) = H^*(H : M)$$

となる □

系 4.4 $H = \{1\}$ のとき

$$H_*(G : \mathbb{Z}G \otimes M) = M \ (\text{in dim } 0)$$

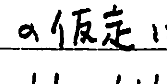
さらに $\#G < \infty$ ならば

$$H^*(G : \mathbb{Z}G \otimes M) = M \ (\text{in dim } 0) \ \square$$

注意 $\# G/H < \infty$ の仮定は必要。

例 (1) $G = \mathbb{Z}$, $H = \{1\}$. $\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{Z} = \mathbb{Z}G$

$$H^1(G : \mathbb{Z}G) = \mathbb{Z} \neq 0 = H^1(\{1\} : \mathbb{Z})$$

(2) $g \geq 1$. $\Sigma_g =$  $= B\pi_1(\Sigma_g)$, $G = \pi_1(\Sigma_g)$

$$H^g(G : \mathbb{Z}G) = H^g(\Sigma_g : \mathbb{Z}G) \underset{\substack{\text{Poincaré} \\ \text{duality}}}{\cong} H_{2-g}(\Sigma_g : \mathbb{Z}G)$$

$$= H_{2-g}(G : \mathrm{Ind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z}) = H_{2-g}(\{1\} : \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (g = 2) \\ 0 & (g \neq 2) \end{cases}$$

補題の証明 $\pi : G \to G/H$, $x \mapsto \bar{x} = xH$.

$$\mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_H^G M = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$$

$$\alpha : \mathbb{Z}(G/H) \otimes_{\mathbb{Z}} M \to \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$$

$$\bar{x} \otimes m \longmapsto x \otimes x^{-1} m$$

o. Date . .

well-defined
$(y \in H,\ xy \otimes y^{-1}x^{-1}m = x \otimes x^{-1}m)$
G-homom
$(z \in G,\ \alpha(z(\bar{x} \otimes m)) = \alpha(\overline{zx}) \otimes zm) = zx \otimes x^{-1}z^{-1}zm = zx \otimes x^{-1}m = z\alpha(\bar{x} \otimes m))$
逆を構成する.

$$\beta : \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M \to \mathbb{Z}(G/H) \otimes M$$
$$x \otimes m \longmapsto \pi(x) \otimes xm$$

well-defined
$(y \in H,\ xy \otimes m \mapsto \pi(x) \otimes xym,\ x \otimes ym \mapsto \pi(x) \otimes xym)$
互いに逆

$$\left(\begin{aligned} \alpha\beta(x \otimes m) &= \alpha(\pi(x) \otimes xm) = x \otimes x^{-1}xm = x \otimes m \\ \beta\alpha(\bar{x} \otimes m) &= \beta(x \otimes x^{-1}m) = \bar{x} \otimes xx^{-1}m = \bar{x} \otimes m \end{aligned}\right) //$$

<u>transfer map</u> $i : H \hookrightarrow G$ inclusion map
M : 左 G 加群 とする. 通常は

$$\mathrm{cor}^G_H := i_* : H_*(H:M) \to H_*(G:M)$$
$$\mathrm{res}^G_H := i^* : H^*(G:M) \to H^*(H:M)$$

が定義されるが, $\#(G/H) < \infty$ のとき transfer map

$$\mathrm{res}^G_H : H_*(G:M) \to H_*(H:M)$$
$$\mathrm{cor}^G_H : H^*(H:M) \to H^*(G:M)$$

が定義されて次をみたす

<u>補題4.5</u> $\forall u \in H_*(G:H)$ または $H^*(G:H)$ について

$$\mathrm{cor}^G_H \mathrm{res}^G_H u = \#(G/H) u$$

transfer map の定義と補題4.5の証明は次回行う
<u>応用</u>
$a \in \mathbb{N}_{>0}$.
<u>定義</u> a が M で<u>可逆</u>(invertible)である
$\Longleftrightarrow$ 写像 $a : M \to M,\ m \mapsto am$ が同型である.

系4.6 $\#(G/H)$ が M で可逆である(たとえば M が $\mathbb{Q}G$-加群)
$\Longrightarrow$ $i_*: H_*(H:M) \to H_*(G:M)$ 全射
$i^*: H^*(G:M) \to H^*(H:M)$ 単射 —

とくに $M=\mathbb{Q}$:自明 G 加群で成立つ.
有理(co)homology は有限指数部分群の方が全体の群より難しい

$H=\{1\}$ のとき $\forall n \geq 1$ $H^n(H:M) = H_n(H:M) = 0$ だから
系4.7 $\#G<\infty$ のとき $\forall M$: G 加群 $\forall n \geq 1$
$\forall u \in H^n(G:M)$ または $H_n(G:M)$ について
$(\#G)u = 0$ —

とくに k:体, $\mathrm{ch}\,k \nmid \#G$, M: kG-加群 ならば
$H_*(G:M) = M_G$ in dim. 0
$H^*(G:M) = M^G$ in dim 0

o. Date

(§4 (余)誘導表現 (つづき))

<u>今日やること</u> transfer の定義と誘導表現の幾何的意味

G：群
$H < G$ 部分群. $i: H \hookrightarrow G$ inclusion
M：左 H 加群

$\mathrm{Ind}_H^G M = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$

$\mathrm{Coind}_H^G M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)$

$\iota: M \to \mathrm{Ind}_H^G M,\ m \mapsto 1 \otimes m$

$\pi: \mathrm{Coind}_H^G M \to M,\ f \mapsto f(1)$

$\Rightarrow$ Shapiro Lemma

$H_*(G : \mathrm{Ind}_H^G M) = H_*(H : M)$

$H^*(G : \mathrm{Coind}_H^G M) = H^*(H : M)$

$\#(G/H) \lneq \infty$ のとき (前回 β と書いた)

β; $\mathrm{Coind}_H^G M \cong \mathrm{Ind}_H^G M$

$f \mapsto \beta(f) := \sum_{x \in G/H} x \otimes f(x^{-1})$ (#$G/H < \infty$ だから有限和として定義できる)

以下

$\# G/H < \infty$

M：左 G 加群

として transfer

$i^! = \mathrm{res}_H^G : H_*(G : M) \to H_*(H : M)$

$i_! = \mathrm{cor}_H^G : H^*(H : M) \to H^*(G : M)$

を定義する.

まず, M は G module だから

$\pi' : \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M \to M$

$x \otimes m \mapsto xm$

$\iota' : M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)$

$m \mapsto \iota'(m),\quad \iota'(m)(x) = xm$

が定義できる. (co)homology をとると

$$
\begin{tikzcd}
H_*(G:M) \arrow[r, "\iota'_*"] \arrow[ddr, "i^! = res^G_H"'] & H_*(G:Coind^G_H M) \arrow[d, "\beta_*", "\cong"'] \\
\circlearrowleft & H_*(G:Ind^G_H M) \arrow[d, equal, "\text{Shapiro Lemma}"] \\
& H_*(H:M)
\end{tikzcd}
$$

とかく

$i^! = res^G_H : H_*(G:M) \to H_*(H:M)$ が定義できた. transfer

$$
\begin{tikzcd}
H^*(G:Ind^G_H M) \arrow[r, "\pi'_*"] & H^*(G:M) \\
H^*(G:Coind^G_H M) \arrow[u, "\beta_*", "\cong"'] & \circlearrowleft \\
H^*(H:M) \arrow[u, equal, "\text{Shapiro Lemma}"] \arrow[uur, "i_! = cor^G_H"'] &
\end{tikzcd}
$$

とかく

$i_! = cor^G_H : H^*(H:M) \to H^*(G:M)$ が定義できた. transfer

補題4.5. $\forall u \in H_*(G:M)$ または $H^*(G:M)$

$$cor^G_H \circ res^G_H\, u = \#(G/H)\, u$$

証明 まず $\pi' \circ \beta \circ \iota'$ を計算する

$$M \xrightarrow{\iota'} Coind^G_H M \xrightarrow{\beta} Ind^G_H M \xrightarrow{\pi'} M$$

$$m \longmapsto \iota'(m) \longmapsto \sum x \otimes \iota'(m)(x) \longmapsto \sum x\, \iota'(m)(x^{-1}) = \sum x x^{-1} m$$
$$= (\# G/H)\, m$$

(homology)

$$
\begin{tikzcd}
H_*(G:M) \arrow[r, "\iota'_*"] \arrow[ddd, "cor^G_H \circ res^G_H"'] & H_*(G:Coind^G_H M) \arrow[d, "\beta_*", "\cong"'] \\
\circlearrowleft & H_*(G:Ind^G_H M) \arrow[ddl, "\pi'_*"'] \\
& H_*(H:Ind^G_H M) \arrow[u, "i_*"'] \\
H_*(G:M) & H_*(H:M) \arrow[l, "i_*"] \arrow[u, "\iota_*"']
\end{tikzcd}
$$

(π'_* と i_* は可換
$\pi' \circ \iota(m) = \pi'(1 \otimes m) = m$)

$\pi' \circ \beta \circ \iota' = \# G/H$ より

$cor^G_H \circ res^G_H = \# G/H$

(cohomology)

$$\begin{tikzcd} H^*(G:M) \arrow[r, "i^*"] \arrow[ddd, "\mathrm{cor}^G_H \circ \mathrm{res}^G_H"'] \arrow[ddr, "\iota'_*"] & H^*(H:M) \\ & H^*(H:\mathrm{Coind}^G_H M) \arrow[u, "\pi_*"'] \\ & H^*(G:\mathrm{Coind}^G_H M) \arrow[u, "i^*"'] \arrow[d, "\beta_*"] \\ H^*(G:M) & H^*(G:\mathrm{Ind}^G_H M) \arrow[l, "\pi'_*"] \end{tikzcd}$$

(i^*とπ_*は可換

$(\pi \circ \iota')(m) = \iota'(m)(1) = m$)

$\pi' \circ \beta \circ \iota' = \# G/H$ より

$\mathrm{cor}^G_H \circ \mathrm{res}^G_H = \# G/H$ //

注意 $M = \mathbb{Z}$ 自明G加群のとき

$\mathrm{res}^G_H : H^*(G:\mathbb{Z}) \to H^*(H:\mathbb{Z})$

は環準同型だが

$\mathrm{cor}^G_H : H^*(H:\mathbb{Z}) \to H^*(G:\mathbb{Z})$

は環準同型ではない，とくに

$\mathrm{cor}^G_H(1) = \mathrm{cor}^G_H \mathrm{res}^G_H(1) = (\# G/H)\,1$

例 $n, m \geq 1$ $G = \mathbb{Z}/nm$, $H = \mathbb{Z}/n$

$i : \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/mn$, $x \bmod n \mapsto mx \bmod mn$ 単射.

iによって $H \subset G$ とみる

$M = \mathbb{Z}$ 自明G加群について

$\mathrm{res}^G_H : H^*(G:\mathbb{Z}) \to H^*(H:\mathbb{Z})$ および

$\mathrm{cor}^G_H : H^*(H:\mathbb{Z}) \to H^*(G:\mathbb{Z})$

をしらべる

$u := \mathrm{Euler}(\mathbb{Z} \xrightarrow{mn} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/mn) \in H^2(G:\mathbb{Z})$

$v := \mathrm{Euler}(\mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n) \in H^2(H:\mathbb{Z})$

とおくと

$H^*(G:\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[u]/(mnu)$

$H^*(H:\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[v]/(nv)$

o. Date

$$\mathrm{res}^G_H u = v$$

∵) $f : \mathbb{Z}/mn \times \mathbb{Z}/mn \to \mathbb{Z}$ cocycle　　[ ] : Gauß記号

$$f(x \bmod mn,\ y \bmod mn) = \left[\frac{x+y}{mn}\right] - \left[\frac{x}{mn}\right] - \left[\frac{y}{mn}\right]$$

$$u = [f]$$

$$(\mathrm{res}^G_H f)(x \bmod n,\ y \bmod n) = \left[\frac{mx+my}{mn}\right] - \left[\frac{mx}{mn}\right] - \left[\frac{my}{mn}\right]$$

$$= \left[\frac{x+y}{n}\right] - \left[\frac{x}{n}\right] - \left[\frac{y}{n}\right]$$

ゆえに $\mathrm{res}^G_H u = [\mathrm{res}^G_H f] = v$ //

res^G_H は環準同型なので

$$\mathrm{res}^G_H u^p = v^p \quad (\forall p \geq 0)$$

$$\mathrm{cor}^G_H v^p = \mathrm{cor}^G_H \mathrm{res}^G_H u^p = m u^p \in H^{2p}(G;\mathbb{Z})$$

$m > 1$ のとき環準同型ではない

<u>レポート問題5</u>　$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

$$f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とする. f が単射のとき

$$f^*_* : H^*_*(\mathbb{Z}^2;\mathbb{Z}) \to H^*_*(\mathbb{Z}^2;\mathbb{Z}) \quad \text{および}$$

$$f^! : H^*_*(\mathbb{Z}^2;\mathbb{Z}) \to H^*_*(\mathbb{Z}^2;\mathbb{Z})$$

を記述せよ ― (次回の $f^!$ の幾何的記述を使う)

<u>誘導表現の幾何的な意味</u>

X : 弧状連結, 局所弧状連結, 半局所単連結 Hausdorff空間

$\tilde{\pi} : \tilde{X} \to X$　普遍被覆　$\tilde{*} \in \tilde{X} \mapsto * \in X$

$G = \pi_1(X, *) \curvearrowright \tilde{X}$　左作用

$X = \tilde{X}/G$

$H < G$ subgroup

$\hat{X} := \tilde{X}/H$

$\hat{\pi} : \tilde{X} \to \hat{X}$　$\tilde{p} \mapsto \tilde{p} \bmod H$

$\pi : \hat{X} \to X$　$\tilde{p} \bmod H \mapsto \tilde{p} \bmod G$　$(\tilde{p} \in \tilde{X})$

この被覆写像を考える.

M : 左H加群

$\mathcal{S}^M := (\tilde{X} \times M)/H$ 対角作用による商空間

$\hat{X}$ 上の局所系である

$[\tilde{p}, m] := (\tilde{p}, m) \bmod H \in \mathcal{S}^M \quad ((\tilde{p}, m) \in \tilde{X} \times M)$

とかく

同様に

$\mathcal{S}^{\mathrm{Ind}_H^G M} := (\tilde{X} \times \mathrm{Ind}_H^G M)/G$

$\mathcal{S}^{\mathrm{Coind}_H^G M} := (\tilde{X} \times \mathrm{Coind}_H^G M)/G$

これらは X 上の局所系となる

補題 4.6 (Shapiro Lemma)

被覆写像 $\pi : \hat{X} \to X$ は次の同型を誘導する.

$H_*(\hat{X} ; \mathcal{S}^M) \xrightarrow{\cong} H_*(X ; \mathcal{S}^{\mathrm{Ind}_H^G M})$

$H^*(\hat{X} ; \mathcal{S}^M) \xleftarrow{\cong} H^*(X ; \mathcal{S}^{\mathrm{Coind}_H^G M})$

証明 Lemma 3.8 を使う

$S_*(\hat{X} ; \mathcal{S}^M) = S_*(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}H} M = S_*(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}G} \overbrace{\mathbb{Z}G \otimes M}^{\mathrm{Ind}_H^G M} = S_*(X ; \mathcal{S}^{\mathrm{Ind}_H^G M})$

この同型を具体的に書き下すと

$H_*(\hat{X} ; \mathcal{S}^M) \xrightarrow{\iota_*} H_*(\hat{X} ; \mathcal{S}^{\mathrm{Ind}_H^G M}) \xrightarrow{\pi_*} H_*(X ; \mathcal{S}^{\mathrm{Ind}_H^G M})$

となる (各自)

$\tau : \Delta^n \to \hat{X}$ conti. map について τ の lift $\tilde{\tau} : \Delta^n \to \tilde{X}$ をとる $m \in M$ について

$[\tilde{\tau}(*), m]\tau \longmapsto \tilde{\tau} \otimes m \longmapsto \tilde{\tau} \otimes 1 \otimes m \longmapsto [\tilde{\tau}, \iota(m)](\pi \circ \tau)$

となっている

$S^*(\hat{X} ; \mathcal{S}^M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(S_*(\tilde{X}), M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(S_*(\tilde{X}), \mathrm{Coind}_H^G M)$

$= S^*(X ; \mathcal{S}^{\mathrm{Coind}_H^G M})$

この同型を具体的に書き下すと

$H^*(X ; \mathcal{S}^{\mathrm{Coind}_H^G M}) \xrightarrow{\pi^*} H^*(\hat{X} ; \mathcal{S}^{\mathrm{Coind}_H^G M}) \xrightarrow{\pi_*} H^*(\hat{X} ; \mathcal{S}^M)$

となる (各自)

$\tau, \tilde{\tau}$ をさきほどのようにとる. $g \in S^*(X ; \mathcal{S}^{\mathrm{Coind}_H^G M})$ について

$\beta(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(S_*(\tilde{X}), \mathrm{Coind}_H^G M)$ とすると

$[\tilde{\tau}(*), \beta(g)(\tilde{\tau})] = g(\pi \circ \tau)$

となる $\beta(g)$ は $\beta(g)(1) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(S_*(\tilde{X}), M)$ にうつり, これは

$(\tau \mapsto [\tilde{\tau}(*), \beta(g)(\tilde{\tau})(1)] = g((\pi \circ \tau)(1))) \in S^*(\hat{X} ; \mathcal{S}^M)$ にうつる //

o. Date

$\mathcal{S}^{\mathrm{Ind}_H^G M}$ の幾何的意味

写像

$$\alpha : \mathcal{S}^M \to \mathcal{S}^{\mathrm{Ind}_H^G M}$$

$$[\tilde{p}, m] \mapsto [\tilde{p}, 1\otimes m]$$

を考える。(well-defined) $y\in H$ について

$$[y\tilde{p}, m] \mapsto [y\tilde{p}, 1\otimes m] = [\tilde{p}, y^{-1}\otimes m]$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$[\tilde{p}, y^{-1}m] \mapsto [\tilde{p}, 1\otimes y^{-1}m]$$

連続性は明らか。

$p\in X \leftarrow \tilde{p}\in\tilde{X}$

α の $\mathcal{S}^M|_{\pi^{-1}(p)}$ への制限をしらべる

$G\to G/H$, $x\mapsto xH =: \bar{x}$ とかく

$s : G/H \to G$ section

$\overline{s(\bar{x})} = \bar{x}$ $(\forall x\in G)$

$\mathbb{Z}G = \bigoplus_{\bar{x}\in G/H} s(\bar{x})\mathbb{Z}H$ (右 H 加群として)

$\mathbb{Z}G\otimes_{\mathbb{Z}H} M = \bigoplus_{\bar{x}\in G/H} s(\bar{x})\otimes M$ ($\mathbb{Z}$ 加群として)

$\pi^{-1}(p) = \{\hat{\pi}(x^{-1}\tilde{p}) : x\in G\}$

$= \{\hat{\pi}(s(\bar{x})^{-1}\tilde{p}) : \bar{x}\in G/H\}$ ($y\in H$ について $\hat{\pi}(y^{-1}x^{-1}\tilde{p}) = \hat{\pi}(x^{-1}\tilde{p})$)

ゆえに

$$\mathcal{S}^M|_{\pi^{-1}(p)} = \coprod_{\bar{x}\in G/H} [s(\bar{x})^{-1}\tilde{p}, M]$$

$\alpha([s(\bar{x})^{-1}\tilde{p}, m]) = [s(\bar{x})^{-1}\tilde{p}, 1\otimes m] = [\tilde{p}, s(\bar{x})\otimes m]$ $(\forall m\in M)$

したがって

$$\alpha : \bigoplus_{q\in\pi^{-1}(p)} \mathcal{S}^M_q \xrightarrow{\cong} \mathcal{S}^{\mathrm{Ind}_H^G M}_p$$

X 上の局所系 $\pi_*\mathcal{S}^M$ で

$$(\pi_*\mathcal{S}^M)_p = \bigoplus_{q\in\pi^{-1}(p)} \mathcal{S}^M_q \qquad (\forall p\in X)$$

となるものが定義できる (direct image)。α により同型

$$\pi_*\mathcal{S}^M = \mathcal{S}^{\mathrm{Ind}_H^G M}$$ が成立つ

$$-2xy = y^2 - (x+y)^2 + x^2$$

Date 09・12・4 No. 1

(§4. (余)誘導表現 (つづき))

<u>transferの幾何的意味</u>

X: 弧状連結, 局所弧状連結, 半局所単連結 Hausdorff空間

$\tilde{\pi}: \tilde{X} \to X$ 普遍被覆 $\tilde{*} \in \tilde{X} \mapsto * \in X$ 基点

$G := \pi_1(X, *) \curvearrowright \tilde{X}$ 左作用

$X = \tilde{X}/G$

$H < G$ subgroup

$\hat{X} := \tilde{X}/H$

$\hat{\pi}: \tilde{X} \to \hat{X}$ $\tilde{p} \mapsto \tilde{p} \bmod H$ $(\tilde{p} \in \tilde{X})$

$\pi: \hat{X} \to X$ $\tilde{p} \bmod H \mapsto \tilde{p} \bmod G$

この被覆写像を考えている

M: 左H加群

$\mathcal{S}^M := (\tilde{X} \times M)/H$ 対角作用による商空間

$\hat{X}$上の局所系である

$[\tilde{p}, m] := (\tilde{p}, m) \bmod H \in \mathcal{S}^M_{\hat{\pi}(\tilde{p})}$ $((\tilde{p}, m) \in \tilde{X} \times M)$

とかく

$\mathcal{S}^{\mathrm{Ind}_H^G M}$, $\mathcal{S}^{\mathrm{Coind}_H^G M}$: X上の局所系

(<u>前回</u> $\mathcal{S}^{\mathrm{Ind}_H^G M} = \pi_* \mathcal{S}^M$ direct image sheaf)

<u>Lem 4.6. (Shapiro Lemma)</u>

$$\begin{cases} \pi_*: H_*(\hat{X}; \mathcal{S}^M) \xrightarrow{\cong} H_*(X; \mathcal{S}^{\mathrm{Ind}_H^G M}) \\ \pi^*: H^*(X; \mathcal{S}^{\mathrm{Coind}_H^G M}) \xrightarrow{\cong} H^*(\hat{X}; \mathcal{S}^M) \end{cases}$$

以下, transferを扱う

$\# G/H = \deg \pi \neq \infty$

M: 左G加群

とする

$$\beta: \mathrm{Coind}_H^G M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ind}_H^G M = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$$

$$f \longmapsto \beta(f) := \sum_{x \in G/H} x \otimes f(x^{-1}) \quad (\text{有限和})$$

o. Date . .

(homology) $\pi^! = res^G_H$ の幾何的定義

$\beta\iota' : M \xrightarrow{\iota'} \mathrm{Coind}^G_H M \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ind}^G_H M$

$\iota'(m)(x) = xm \qquad \beta\iota'(m) = \sum_{x \in G/H} x \otimes x^{-1} m$

$$\begin{array}{ccc} H_*(X : \mathscr{S}^M) & \xrightarrow{(\beta\iota')_*} & H_*(X : \mathscr{S}^{\mathrm{Ind}^G_H M}) \\ & \searrow^{\pi^! \text{ と定義する}} \quad \circlearrowleft & \cong \uparrow \pi_* \\ & & H_*(\hat{X} : \mathscr{S}^M) \end{array}$$

$\pi^!$ を書き下す

$\sigma : \Delta^n \to X$ conti. map. $\quad * = (1, 0, \cdots, 0) \in \Delta^n$

$\hat{\sigma} : \Delta^n \to \hat{X}$ σ の lift , $m \in M$

$$\begin{array}{cc} [\hat{\sigma}(*), m]\sigma \in S_*(X : \mathscr{S}^M) & \\ \downarrow & \downarrow (\beta\iota')_* \\ [\hat{\sigma}(*), \sum_{x \in G/H} x \otimes x^{-1}m]\sigma \in S_*(X : \mathscr{S}^{\mathrm{Ind}^G_H M}) & \\ \| & \\ \sum_{x \in G/H} [x^{-1}\hat{\sigma}(*), 1 \otimes x^{-1}m]\sigma & \uparrow \\ \uparrow & \\ \sum_{x \in G/H} [x^{-1}\hat{\sigma}(*), x^{-1}m]\,\hat{\pi}\circ(x^{-1}\hat{\sigma}) \in S_*(\hat{X} : \mathscr{S}^M) & \end{array}$$

ゆえに

$$\pi^!([\hat{\sigma}(*), m]\sigma) = \sum_{x \in G/H} [x^{-1}\hat{\sigma}(*), x^{-1}m]\,\hat{\pi}\circ(x^{-1}\hat{\sigma})$$

がえられた

ちなみに

$$\pi_*\pi^!([\hat{\sigma}(*), m]\sigma) = \pi_*(\quad) = \sum_{x \in G/H} [x^{-1}\hat{\sigma}(*), x^{-1}m]\sigma$$

$$= \sum_{x \in G/H} [\hat{\sigma}(*), m]\sigma = (\# G/H)[\hat{\sigma}(*), m]$$

つまり $\pi_*\pi^! = \# G/H : H_*(X : \mathscr{S}^M) \to H_*(X : \mathscr{S}^M)$

- $M = \mathbb{Z}$ 自明 G 加群 のとき

$$\pi^!(\sigma) = \sum_{x \in G/H} \hat{\pi}\circ(x^{-1}\hat{\sigma}) = \sum_{\substack{\hat{\sigma} : \Delta^n \to \hat{X} \\ \sigma \text{ の lift}}} \hat{\sigma} \quad (\sigma \text{ の lift の総和})$$

となる

- さらに X が closed oriented n-manifold のとき $\hat{X}$ もそうで

$[X] \in H_n(X : \mathbb{Z})$
$[\hat{X}] \in H_n(\hat{X} : \mathbb{Z})$ 基本類

$\pi^![X] = [\hat{X}]$

$\pi_*[\hat{X}] = (\# G/H)[X]$

(∵) X が単体分割されているときに示す

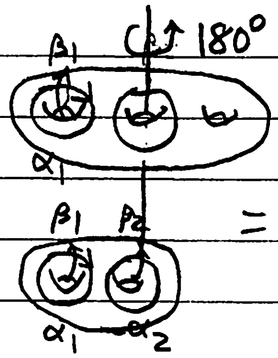
$[X] = \left[\sum_{\substack{\sigma:\text{正の向きの}\\ X\text{の}m\text{単体}}} \sigma\right]$

このとき $\pi^![X] = \sum_\sigma (\pi^!\sigma) = \sum_{\substack{\hat{\sigma}:\text{正の向きの}\\ \hat{X}\text{の}m\text{単体}}} \hat{\sigma} = [\hat{X}]$

$\deg \pi = \# G/H$ から後半は之られるが

$\pi_*[\hat{X}] = \pi_*\pi^![X] = (\# G/H)[X]$ からもわかる //

例

$\hat{X} =$ 

$\pi \downarrow$ 二重被覆

$X =$

$\pi^! : H_1(X:\mathbb{Z}) \to H_1(\hat{X}:\mathbb{Z})$

$\pi^!\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_3$

$\pi^!\beta_1 = \beta_1 + \beta_3$

$\pi^!\alpha_2 = \alpha_2$

$\pi^!\beta_2 = 2\beta_2$

(cohomology) $\pi_! = \mathrm{cor}^G_H$ の幾何的定義

$\mathrm{Coind}^G_H M \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ind}^G_H M \xrightarrow{\pi'} M$

$\ni f \qquad\qquad x \otimes m \longmapsto xm$

$(\pi'\beta)(f) = \sum_{x \in G/H} x(f(x^{-1}))$

$$\begin{array}{ccc} H^*(\hat{X}; \mathcal{S}^M) & \searrow^{\pi_! \text{と定義する}} & \\ \pi^*\uparrow\wr & \circlearrowleft & \\ H^*(X; \mathcal{S}^{\mathrm{Coind}^G_H M}) & \xrightarrow[(\pi'\beta)_*]{} & H^*(X; \mathcal{S}^M) \end{array}$$

$\sigma : \Delta^m \to X$ conti.

$(\hat{\sigma} : \Delta^m \to \hat{X}$ σ の lift$)$

$\hat{g} \in S^*(\hat{X}; \mathcal{S}^M)$ とすると次が成立つ(各自)

$(\pi_!\hat{g})(\sigma) = \sum_{\substack{\hat{\sigma}:\Delta^m \to \hat{X}\\ \sigma\text{の lift}}} \hat{g}(\hat{\sigma}) \bmod G \in \mathcal{S}^M_{\sigma(*)}$

No. Date . .

証) $g \in S^*(X; \mathcal{L}^{\mathrm{Coind}_H^G M})$ を $\pi^* g = \hat{g}$ となるようにとると

$$(\pi_! \hat{g})(\sigma) = ((\pi'\beta)_* g)(\sigma)$$

である.

$$g(\sigma) = [\tilde{\sigma}(*), f_{\tilde{\sigma}}],\quad f_{\tilde{\sigma}} \in \mathrm{Coind}_H^G M$$

略 と表すと $\forall x \in G$ について $g(\sigma) = [x^{-1}\tilde{\sigma}(*), x^{-1}f_{\tilde{\sigma}}]$ だから

$$\hat{g}(\hat{\pi}(x^{-1}\tilde{\sigma})) = (\pi^* g)(\hat{\pi}(x^{-1}\tilde{\sigma})) = [x^{-1}\tilde{\sigma}(*), (x^{-1}f_{\tilde{\sigma}})(1)]$$
$$= [x^{-1}\tilde{\sigma}(*), f_{\tilde{\sigma}}(x^{-1})] \in \mathcal{L}^M_{\hat{\pi}(x^{-1}\tilde{\sigma})(*)}$$

となる. ゆえに $\mathcal{L}^M_{\sigma(*)}$ において

$$(\pi_! \hat{g})(\sigma) = ((\pi'\beta)_* g)(\sigma) = (\pi'\beta)_*[\tilde{\sigma}(*), f_{\tilde{\sigma}}] = [\tilde{\sigma}(*), (\pi'\beta)(f_{\tilde{\sigma}})]$$
$$= [\tilde{\sigma}(*), \sum_{x \in G/H} x(f_{\tilde{\sigma}}(x^{-1}))] = \sum_{x \in G/H} [x^{-1}\tilde{\sigma}(*), f_{\tilde{\sigma}}(x^{-1})]$$
$$= \sum_{x \in G/H} \hat{g}(\hat{\pi}(x^{-1}\tilde{\sigma})) \bmod G = \sum_{\substack{\hat{\sigma}:\Delta^n \to \hat{X} \\ \hat{\sigma} \text{ は } \sigma \text{ の lift}}} \hat{g}(\hat{\sigma}) \bmod G$$

となる. これが示すべきことであった //

とくに $M = \mathbb{Z}$ 自明 G 加群 のとき 次が成立つ.

$$(\pi_! \hat{g})(\sigma) = \hat{g}\Big(\sum_{\substack{\hat{\sigma}:\Delta^n \to \hat{X} \\ \hat{\sigma} \text{ は } \sigma \text{ の lift}}} \hat{\sigma}\Big) = \hat{g} \circ \pi^!(\sigma)$$

例 $\# G/H = 2$, $M = \mathbb{Z}/2$: 自明 G 加群 の場合

$H \triangleleft G$ 正規, $G/H (= \langle t \rangle$ とかく$) \cong \mathbb{Z}/2$

$$\mathrm{Coind}_H^G \mathbb{Z}/2 = \mathrm{Ind}_H^G \mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z}[G/H] \otimes \mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z}/2[G/H]$$

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\iota'} \mathbb{Z}/2[G/H] \xrightarrow{\pi'} \mathbb{Z}/2 \to 0 \quad (\text{exact})$$
$$m \longmapsto m + mt$$
$$m' + m''t \longmapsto m' + m''$$

cohomology 完全列をとり, Shapiro Lemma を使うと

$$\to H^*(X; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\pi^*} H^*(\hat{X}; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\pi_!} H^*(X; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\delta^*} H^{*+1}(X; \mathbb{Z}/2) \to \cdots$$
(exact)

となる. これを 二重被覆 $\pi: \hat{X} \to X$ の Gysin 完全列 という

レポート問題 6

$w_1 := \delta^*(1) \in H^1(X; \mathbb{Z}/2)$ とおく (第一 Stiefel-Whitney 類)

$$\delta^* u = w_1 \cup u \qquad \forall u \in H^*(X; \mathbb{Z}/2)$$

となることを示せ. (「範囲外」?)

例 $\hat{X} = S^n$, $X = \mathbb{RP}^n$ について Gysin 完全列を考えると

$$H^0(\mathbb{RP}^n) \xrightarrow[\cong]{\pi^*} H^0(S^n) \xrightarrow{0} H^0(\mathbb{RP}^n) \xrightarrow[\cong]{\cup w_1} H^1(\mathbb{RP}^n) \to \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{H^1(S^n)}$$

$1 \leqq q \leqq n-2$ について

$$\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{H^q(S^n)} \to H^q(\mathbb{RP}^n) \xrightarrow[\cong]{\cup w_1} H^{q+1}(\mathbb{RP}^n) \to \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{H^{q+1}(S^n)}$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{H^{n-1}(S^n)} \to H^{n-1}(\mathbb{RP}^n) \xrightarrow[\cong]{\cup w_1} H^n(\mathbb{RP}^n) \xrightarrow{0} H^n(S^n) \xrightarrow[\cong]{\pi_!} H^n(\mathbb{RP}^n)$$

$\pi^![\mathbb{RP}^n]_2 = [S^n]_2$ mod 2 基本類

となるから 次がえられる

$$H^*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[w_1]/(w_1^{n+1})$$

No. Date . .

§5 Lyndon-Hochschild-Serre spectral 系列 (LHS s.s.)

G：群

M：左 G 加群

$C^n(G:M) = \{f : \overbrace{G\times\cdots\times G}^{n} \to M : \text{map} \quad f(\cdots,\overset{\exists}{1},\cdots)=0\}$ 正規化条件

$H^n(G:M) = H^n(C^*(G:M))$

$K \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} Q$ 群の拡大（§2よりひろい意味）

つまり K, G, Q：群、ι, π：準同型

π：全射、ι：単射、$\iota(K) = \mathrm{Ker}\,\pi$ （$\overset{\text{とくに}}{\lhd} G$ 正規）

$G \curvearrowright C^n(K:M)$ 共役による作用

$\gamma \in G$, $f \in C^n(K:M)$

$(\gamma f)(x_1,\cdots,x_n) := \gamma(f(\gamma^{-1}x_1\gamma,\cdots,\gamma^{-1}x_n\gamma))$

$\begin{cases} \gamma f \in C^n(K:M) & \text{正規化条件を保つ} \\ d(\gamma f) = \gamma(df) & \text{明らか} \end{cases}$

ゆえに $G \curvearrowright H^n(K:M)$

<u>この作用の意味</u>

$C_\gamma : K \to K \quad x \mapsto \gamma^{-1}x\gamma$ 共役作用

M^γ：C_γ を通して K が作用しているときの M $\neq$ もとの M

$x\cdot m = \gamma^{-1}x\gamma m$ 　　K加群としては別もの

$\gamma : M^\gamma \to M$, $\begin{pmatrix} m & \mapsto & \gamma m \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ \gamma^{-1}x\gamma m & \mapsto & x\gamma m \end{pmatrix}$ K-同型

$$\begin{array}{ccc} H^*(K:M) & \xrightarrow{C_\gamma^*} & H^*(K:M^\gamma) \\ & \searrow \;\circlearrowleft\; \swarrow \gamma_* & \\ & H^*(K:M) & \end{array}$$

いま定義した γ の作用

<u>補題 5.1.</u> K の $H^*(K:M)$ への作用は自明である

とくに G の作用は $Q = G/K$ の作用を定める

証明 $\gamma \in K$ とする

$$\Phi_\gamma : C^n(K;M) \to C^{n-1}(K;M)$$

$$(\Phi_\gamma f)(x_1, \cdots, x_{n-1}) := \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j f(x_1, \cdots, x_j, \gamma, \gamma^{-1}x_{j+1}\gamma, \cdots, \gamma^{-1}x_n\gamma)$$

$$(d\Phi_\gamma + \Phi_\gamma d)(f) = \gamma f - f \quad \text{(各自) (たぶん)} \quad //$$

かくして

$H^*(K;M)$: 左 Q 加群

定理5.2 (Lyndon, Hochschild-Serre)

$K \to G \to Q$ 群の拡大

M : 左 G 加群

について次の自然な spectral 系列が存在する

$$E_2^{p,q} = H^p(Q; H^q(K;M)) \Rightarrow H^{p+q}(G;M)$$

これを LHS s.s. とよぶ

K と Q の cohomology で G の cohomology を近似している.

s.s. については来週.

o. Date

(§5. LHS s.s. (つづき))

Th. 5.2 (Lyndon, Hochschild-Serre)

$K \overset{i}{\hookrightarrow} G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Q$ 群の拡大

M : 左 G 加群

について自然な spectral 系列が存在する

$$E_2^{p,q} = H^p(Q; H^q(K;M)) \Rightarrow H^{p+q}(G;M)$$

spectral 系列 (s.s.) についてはプリント (河田敬義「ホモロジー代数」(岩波基礎数学) より) に定義がある。 $E_{r+1}^{p,q} = \dfrac{E_r^{p,q} \cap \mathrm{Ker}\, d_r}{E_r^{p,q} \cap \mathrm{Im}\, d_r}$, $E_\infty^{p,q} = gr_p H^{p+q}$

さらに LHS s.s. は cup 積と compatible である。

N : 別の左 G 加群, $E_r^{p,q}(M)$, $E_r^{p,q}(N)$, $\cdots$: $M, N, \cdots$ についての LHS s.s.

とすると G の cup 積が s.s. の cup 積

$$\cup : E_r^{p,q}(M) \times E_r^{p',q'}(N) \longrightarrow E_r^{p+p',q+q'}(M \otimes N)$$
$$(u, v) \longmapsto u \cup v$$

を誘導し、

$$d_r(u \cup v) = (d_r u) \cup v + (-1)^{p+q} u \cup (d_r v)$$

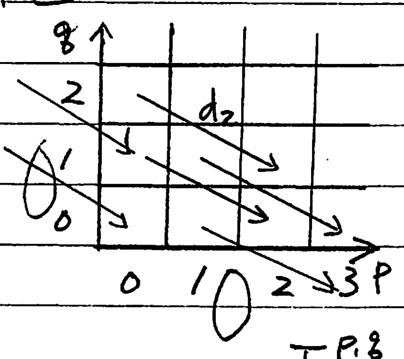
をみたす。$r=2$ のとき この cup 積は Q と K の cup 積に符号をのぞき一致する。つまり同型 $\rho : E_2^{p,q}(M) \cong H^p(Q; H^q(K;M))$ について

$$\rho(u \cup v) = (-1)^{q'p} \rho(u) \cup \rho(v)$$

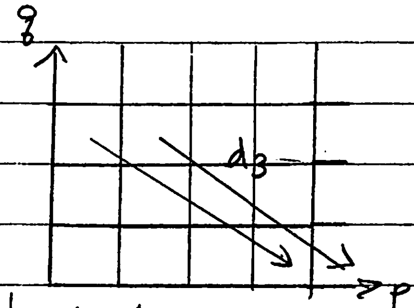
となる。

s.s. の図

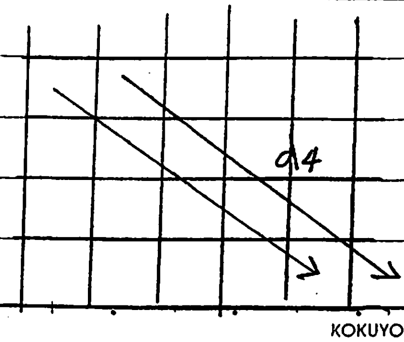
$E_2^{p,q} =$



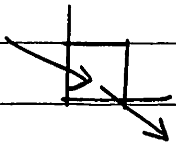
$E_3^{p,q} =$



$E_4^{p,q} =$



<u>p+q=0</u>　すべての $n \geqq 2$ について $d_n^{0,0}=0$, $E_n^{0,0} \cap \mathrm{Im}\, d_n = 0$ だから



$$E_3^{0,0} = \frac{E_2^{0,0} \cap \mathrm{Ker}\, d_2}{E_2^{0,0} \cap \mathrm{Im}\, d_2} = \frac{E_2^{0,0}}{0} = E_2^{0,0}$$

$E_4^{0,0} = E_3^{0,0}, \cdots, E_{n+1}^{0,0} = E_n^{0,0}, \cdots$ ゆえに

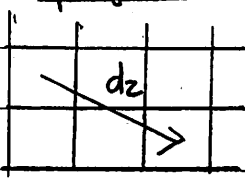
$$E_2^{0,0} = E_3^{0,0} = \cdots = E_\infty^{0,0}$$

いま, E^0 では $E^0 = F_0 E^0 \supset F_1 E^0 = 0$ ゆえに

$$E^0 = F_0 E^0 / F_1 E^0 = E_\infty^{0,0} = E_2^{0,0}$$

∴つまり $H^0(G;M) = H^0(Q;H^0(K;M))$ (これはあたりまえ)

<u>p+q=1</u>



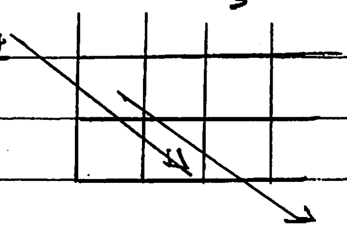
$d_2^{0,1} : E_2^{0,1} \to E_2^{2,0}$ だけが non-trivial

$E_3^{1,0} = E_2^{1,0}$, $E_3^{0,1} = \mathrm{Ker}\, d_2^{0,1} \subset E_2^{0,1}$

$0 \to E_3^{1,0} \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0}$ (exact) ——①

$n \geqq 3$ のとき

$d_n = 0$



ゆえに

$(E_2^{1,0} =) E_3^{1,0} = E_4^{1,0} = \cdots = E_\infty^{1,0}$

$E_3^{0,1} = E_4^{0,1} = \cdots = E_\infty^{0,1}$

$$E^1 = F_0 E^1 \supset F_1(E^1) \supset F_2 E^1 = 0$$

$E^1 / F_1(E^1) = E_\infty^{0,1}$, $F_1(E^1) = E_\infty^{1,0}$

$$0 \to \underset{\underset{E_2^{1,0}}{\parallel}}{E_\infty^{1,0}} \to E^1 \to \underset{\underset{E_3^{0,1}}{\parallel}}{E_\infty^{0,1}} \to 0 \quad \text{(exact)} \text{ ——②}$$

ついでに $E_3^{2,0}$ をみておくと $n \geqq 3$ のとき $d_n = 0$ だから

$$E_2^{2,0} / d_2(E_2^{0,1}) = E_3^{2,0} = E_\infty^{2,0} = F_1(E^2) \subset E^2$$

ゆえに $E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \to E^2$ (exact) ——③

①②③をあわせると

$$0 \to E_2^{1,0} \to E^1 \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{0,1} \to E^2 \quad \text{(exact)}$$

5-term exact sequence ともいう

LHS.s.s. の場合

$$0 \to H^1(Q;H^0(K;M)) \xrightarrow{\pi^*} H^1(G;M) \xrightarrow{\iota^*} H^0(Q;H^1(K;M)) \xrightarrow{d_2} H^2(Q;H^0(K;M))$$

$$\to H^2(G;M) \quad \text{(exact)}$$

homology についても LHS s.s. は成立つ (詳細略)
5-term exact seq は次のようになる

$H_2(G;M) \xrightarrow{\pi_*} H_2(Q;H_0(K;M)) \xrightarrow{d^2} H_0(Q;H_1(K;M)) \xrightarrow{\iota_*} H_1(G;M) \xrightarrow{\pi_*} H_1(Q;H_0(K;M)) \to$
(exa

これを使って

__Hopf の定理__ 群 G が次の表示をもつとする
生成元 x_s $(s \in S)$
関係式 r_t $(t \in T)$
つまり r_t は集合 S の生成する自由群 $F = F(S)$ の元で

$$R := \langle \sigma r_t \sigma^{-1} ; t \in T, \sigma \in F \rangle \triangleleft F \quad \text{正規部分群}$$

とおくと 対応 $s \in S \mapsto x_s \in G$ が同型 $F/R \cong G$ を定める
つまり 群の拡大 $R \to F \to G$ がえられる 5-term exact seq をかくと
M : 左 G 加群 について

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(F;M) & \to & H_2(G;H_0(R;M)) & \to & H_0(G;H_1(R;M)) & \to & H_1(F;M) \\ \| & & \| & & \| & & \to H_1(G;H_0(R;M)) \to \\ 0 & & H_2(G;M) & & (H_1(R)\otimes M)_G & & \| \\ & & & & & & H_1(G;M) \end{array}$$

ゆえに

$$0 \to H_2(G;M) \to (H_1(R)\otimes M)_G \to H_1(F;M) \to H_1(G;M) \to 0 \quad \text{(exact)}$$

理屈の上では 群の表示があれば $H_2(G;M)$, $H^2(G;M)$ は計算できる

- とくに $M = \mathbb{Z}$ 自明 G 加群のとき $H_*(\ ) = H_*(\ ;\mathbb{Z})$ とすると

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to H_2(G) \to & H_1(R)_G & \to & H_1(F) \\ & \| & & \| \\ & H_1(R)_F & & F/[F,F] \end{array}$$

$H_1(R) = R/[R,R]$ であるが, $\rho \in R$, $\sigma \in F$ について

$$\sigma[\rho] - [\rho] = [\sigma\rho\sigma^{-1}] + [\rho^{-1}] = [\sigma\rho\sigma^{-1}\rho^{-1}] = [[\sigma,\rho]] \quad ([x,y] = xyx^{-1}y^{-1})$$

ゆえに

$$H_1(R)_F = H_1(R)/\langle \sigma[\rho]-[\rho] ; \sigma \in F, \rho \in R \rangle = H_1(R)/([F,R] \text{ の image})$$
$$= R/[F,R] \quad (\because [R,R] \subset [F,R])$$

o. Date

かくして

$$H_2(G) = \mathrm{Ker}(H_1(R)_F \to H_1(F)) = \mathrm{Ker}(R/[F,R] \to F/[F,F])$$
$$= R \cap [F,F] / [F,R] \quad (\because [F,R] \subset [F,F])$$

定理5.3 (Hopf) $G = F/R$, (F: free group) とすると

$$H_2(G;\mathbb{Z}) = (R\cap[F,F])/[F,R]$$

例1 (曲面群) $g \geqq 1$

$$G = \langle \alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_g, \beta_g \,;\, \rho := \prod_{i=1}^{g} [\alpha_i, \beta_i] = 1 \rangle$$
$$R = \langle \sigma\rho\sigma^{-1} ; \sigma \in F_{2g} \rangle \triangleleft F_{2g} = F$$

$R \subset [F,F]$ なので $H_2(G) = R/[F,R]$

R の任意の元 x は

$$x = \sigma_1 \rho^{\varepsilon_1} \sigma_1^{-1} \sigma_2 \rho^{\varepsilon_2} \sigma_2^{-1} \cdots \sigma_n \rho^{\varepsilon_n} \sigma_n^{-1}, \quad \varepsilon_i = \pm 1, \ \sigma_i \in F$$

という形をしている。

$$\varphi(x) := \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \in \mathbb{Z}$$

とおけば well-defined な準同型 $\varphi: R \to \mathbb{Z}$ がえられる。

$\varphi(\rho) = 1$ より φ は全射である。$\varphi([\sigma,\rho]) = \varphi(\sigma\rho\sigma^{-1}\rho^{-1}) = 1-1 = 0$

だから $[F,R] \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$ である。また

$$\sigma_1\rho\sigma_1^{-1}\sigma_2\rho^{-1}\sigma_2^{-1} = \sigma_2(\sigma_2^{-1}\sigma_1\rho\sigma_1^{-1}\sigma_2\rho^{-1})\sigma_2^{-1} = \sigma_2[\sigma_2^{-1}\sigma_1, \rho]\sigma_2^{-1}$$
$$\in [F,R]$$

であるから $\mathrm{mod}\,[F,R]$ で $x \equiv \rho^{\Sigma\varepsilon_i} = \rho^{\varphi(x)}$ となる。そこで

$\mathrm{Ker}\,\varphi \subset [F,R]$ となり $\mathrm{Ker}\,\varphi = [F,R]$ がわかった。

以上により $\varphi: H_2(G) \cong \mathbb{Z}$ である。

例2 $F = F(S)$ free group.

$\Gamma_n = \Gamma_n(F)$ lower central series $\Gamma_1 = F$, $\Gamma_{n+1} = [\Gamma_n, F]$

$n \geqq 1$, $N := F/\Gamma_{n+1}$ nilpotent group. $R = \Gamma_{n+1} \cap \Gamma_2$

$$H_1(N) = (F/\Gamma_{n+1}) / [F/\Gamma_{n+1}, F/\Gamma_{n+1}] = F/\Gamma_{n+1}[F,F] = F^{ab}$$

$$H_2(N) = R \cap [F,F]/[F,R] = \Gamma_{n+1}\cap\Gamma_2/[F,\Gamma_{n+1}] = \Gamma_{n+1}/\Gamma_{n+2}$$

$\parallel$

(F^{ab} の自由Lie代数の $(n+1)$次の元の全体)

S.S.の一般論 filtered cochain complex

仮定 $A = \{A^n, d\}_{n \geqq 0}$: cochain complex

$d(A^n) \subset A^{n+1}$

$dd = 0$

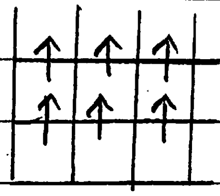
$(A_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ (decreasing) filtration $A_p \cap A^n = F_p(A^n) = A_p^n$ とか

$A_p \supset A_{p+1} \quad (\forall p \in \mathbb{Z})$

$p \leqq 0$ のとき $A_p = A$

$p \gneqq n$ のとき $A_p^n = 0$

$d(A_p) \subset A_p$



E_0 d_0

このとき、まず

$$E_0^{p,q} \overset{def}{=} A_p^{p+q}/A_{p+1}^{p+q},$$

$$d_0^{p,q} \overset{def}{=} (A_p/A_{p+1} \text{ の coboundary 作用素})$$

とおく $q<0$ なら $A_p^{p+q} = 0$ より $E_0^{p,q} = 0$. $p<0$ なら $A_p = A_{p+1}$ より

$E_0^{p,q} = 0$ である

そうすると

$$E_1^{p,q} = \frac{E_0^{p,q} \cap \mathrm{Ker}\, d_0}{E_0^{p,q} \cap \mathrm{Im}\, d_0} = H^{p+q}(A_p, A_{p+1})$$

となる

$$d_1^{p,q} \overset{def}{=} \delta^* : E_1^{p,q} = H^{p+q}(A_p, A_{p+1}) \longrightarrow H^{p+q+1}(A_{p+1}, A_{p+2}) = E_1^{p+1,q}$$

三対 (A_p, A_{p+1}, A_{p+2}) の連結準同型

あとは $1 \leqq r \leqq +\infty$ について

$$Z_r^{p,q} \overset{def}{=} \mathrm{Im}(j^* : H^{p+q}(A_p, A_{p+r}) \to H^{p+q}(A_p, A_{p+1})) \subset E_1^{p,q}$$

$$B_r^{p,q} \overset{def}{=} \mathrm{Im}(\delta^* : H^{p+q-1}(A_{p-r+1}, A_p) \to H^{p+q}(A_p, A_{p+1})) \subset E_1^{p,q}$$

とおくと

$$0 = B_1^{p,q} \subset \cdots \subset B_r^{p,q} \subset B_{r+1}^{p,q} \subset \cdots \subset B_\infty^{p,q} \subset Z_\infty^{p,q} \subset \cdots \subset Z_{r+1}^{p,q} \subset Z_r^{p,q} \subset \cdots \subset Z_1^{p,q} = E_1^{p,q}$$

となる $p+q$ に対して r が充分大きいと $B_r^{p,q} = B_\infty^{p,q} = Z_\infty^{p,q} = Z_r^{p,q}$ とな

事実 coboundary 作用素 d は 同型

$$d : Z_r^{p,q}/Z_{r+1}^{p,q} \cong B_{r+1}^{p+r, q-r+1}/B_r^{p+r, q-r+1}$$

を誘導する

$E_r^{p,q} \overset{\text{def}}{=} Z_r^{p,q}/B_r^{p,q}$

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} = Z_r^{p,q}/B_r^{p,q} \twoheadrightarrow Z_r^{p,q}/Z_{r+1}^{p,q} \overset{d}{\cong} B_{r+1}^{p+r,q-r+1}/B_r^{p+r,q-r+1} \subset E_r^{p+r,q-r+1}$$

と定義する（$d_1^{p,q}$ はさっきの δ^* に一致する）

事実 $\begin{cases} \mathrm{Ker}\, d_r^{p,q} = Z_{r+1}^{p,q}/B_r^{p,q} \\ \mathrm{Im}\, d_r^{p-r,q+r-1} = B_{r+1}^{p,q}/B_r^{p,q} \end{cases}$

したがって $d_r \circ d_r = 0$ であって

$$\mathrm{Ker}\, d_r^{p,q}/\mathrm{Im}\, d_r^{p-r,q+r-1} = Z_{r+1}^{p,q}/B_{r+1}^{p,q} = E_{r+1}^{p,q}$$

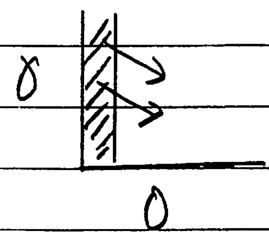
となる。他方

$$F_p H^m(A) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Im}(H^m(A_p) \to H^m(A))$$

と定義すると

事実 $E_\infty^{p,q} \cong F_p(H^{p+q}(A))/F_{p+1}(H^{p+q}(A))$

となる。これで spectral 系列がえられた



$E_{r+1}^{0,q} = \mathrm{Ker}\, d_r^{0,q} \subset E_r^{0,q}$ だから

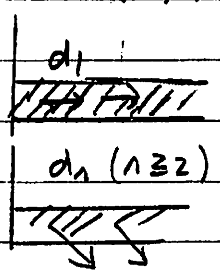
$$E_\infty^{0,q} \subset \cdots \subset E_{r+1}^{0,q} \subset E_r^{0,q} \subset \cdots \subset E_1^{0,q} = H^q(A/A_1)$$

となる。他方 $E_\infty^{0,q} = F_0 H^q(A)/F_1 H^q(A) = H^q(A)/F_1 H^q(A)$ である

補題 5.4 合成写像

$$H^q(A) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,q} \subset H^q(A/A_1)$$

は商写像 $A \to A/A_1$ の誘導する準同型に一致する。



$S^* := \{E_1^{*,0}, d_1\}$ cochain complex

$$E_1^{p,0} = H^p(A_p, A_{p+1}) = \frac{\mathrm{Ker}(A_p^p/\underbrace{A_{p+1}^p}_{=0} \to A_p^{p+1}/A_{p+1}^{p+1})}{\mathrm{Im}(\underbrace{A_p^{p-1}}_{0}/A_{p+1}^{p-1} \to A_p^p/A_{p+1}^p)}$$

$$= \mathrm{Ker}(A_p^p \to A_p^{p+1}/A_{p+1}^{p+1}) \subset A_p^p \subset A^p$$

$\pi : S^p = E_1^{p,0} \subset A_p^p \subset A^p$ と定める

事実 π は cochain map である

他方 $r \geqq 2$ について

$$E_{r+1}^{p,0} = E_r^{p,0} / E_r^{p,0} \cap \mathrm{Im}\, d_r \xleftarrow[\text{quotient map}]{} E_r^{p,0}$$

$$H^p(S^*) = E_2^{p,0} \twoheadrightarrow E_3^{p,0} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_\infty^{p,0}$$ 全射の列

また $E_\infty^{p,0} = F_p H^p(A) \subset H^p(A)$

<u>補題 5.5.</u> 合成写像

$$H^p(S^*) \twoheadrightarrow E_\infty^{p,0} \subset H^p(A)$$

は π の誘導する準同型に一致する ——

すべての構成は cup 積 と compatible である

ɔ. Date . .

(§5. LHS s.s. (つづき))

[HS] G. Hochschild and J.-P. Serre
"Cohomology of Group Extensions"
Trans. AMS 74 (1953) 110–134 Chapter II

$K \to G \to Q$ 群の拡大

M : 左 G 加群

$A = C^*(G:M)$

filtered cochain complex $\Rightarrow$ spectral sequence

A に二種類の filtration (A_p) と (A_p^*) を入れる

(A_p) : cup 積と適合している

(A_p^*) : $E_2^{p,q}$ の計算に使う

$A_p^* \subset A_p$. $H^*(A_p/A_p^*) = 0$ (ゆえに (A_p) の s.s $\cong$ (A_p^*) の s.s.)

(A_p) について $A_p^n = A_p \cap A^n \subset A^n = C^n(G:M)$

$A_p^n \overset{\text{def}}{=} \{ f \in A^n ;\ x_1, \cdots, x_n$ のうち $n-p+1$ 個が K に属するとき $f(x_1, \cdots, x_n) = 0 \}$

$d A_p^n \subset A_p^{n+1}$

cup 積と適合している $\cup (A_p^n \otimes A_{p'}^{n'}) \subset A_{p+p'}^{n+n'}$

(証明略)

(A_p^*) について $A_p^{*n} = A_p^* \cap A^n \subset A^n = C^n(G:M)$

$A_p^{*n} = \{ f \in A^n ;\ f(x_1, \cdots, x_n)$ が $x_1, \cdots, x_{n-p}$ および同値類 $x_{n-p+1}K, \cdots, x_n K$ のみに依存する $\}$

$d(A_p^{*n}) \subset A_p^{*n+1}$

$\because)$ $f \in A_p^{*n}$, $x_1, \cdots, x_{n+1} \in G$ とする

$$
\begin{aligned}
&(df)(x_1, \cdots, x_{n+1}) \\
&= \underbrace{x_1 f(x_2, \cdots, x_{n+1})}_{(\mathrm{I})} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-p} (-1)^i f(x_1, \cdots, x_i x_{i+1}, \cdots, x_{n+1})}_{(\mathrm{II})} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{i=n-p+1}^{n} (-1)^i f(x_1, \cdots, x_{n-p}, \cdots x_i x_{i+1}, \cdots, x_{n+1})}_{(\mathrm{III})} + \underbrace{(-1)^{n+1} f(x_1, \cdots, x_n)}_{(\mathrm{IV})}
\end{aligned}
$$

o. Date

(I) $x_1, \cdots, x_{n-p+1}$ と $x_{n-p+2}K, \cdots, x_{n+1}K$ のみに依存する
(II) $x_1, \cdots, x_i x_{i+1}, \cdots, x_{n-p+1}$ と $x_{n-p+2}K, \cdots, x_{n+1}K$ のみに依存する
(III) K は正規部分群だから $x_i x_{i+1}K = (x_iK)(x_{i+1}K)$ となるので
$x_1, \cdots, x_{n-p}$ と $x_{n-p+1}K, \cdots, x_{n+1}K$ のみに依存する
(IV) $x_1, \cdots, x_{n-p}$ と $x_{n-p+1}K, \cdots, x_nK$ のみに依存する //

$A_p^* \subset A_p$

(∵) $f \in A_p^{*n}$ とし $x_1, \cdots, x_n$ のうち少なくとも $n-p+1$ 個が K に属しているとする
このとき $x_{n-p+1}, \cdots, x_n$ のうち少なくとも 1つ(x_iとする)は K に属している
$x_iK = K = 1K$ だから $f(x_1, \cdots, x_n) = f(\cdots 1 \cdots) = 0$ となる //

補題 5.4 $H^*(A_p/A_p^*) = 0$
((証明略) [HS] p.119 Lemma 1
具体的な homotopy の作り方を与えている)
したがって cohomology 完全列から
$$H^*(A_p^*) \xrightarrow{\cong} H^*(A_p)$$
A_p^*/A_{p+1}^* と A_p/A_{p+1} の cohomology 完全列の間の準同型に
5-lemma を施して
$$\begin{array}{ccc} H^*(A_p^*/A_{p+1}^*) & \xrightarrow{\cong} & H^*(A_p/A_{p+1}) \\ \| & & \| \\ E_1^{*,p} & & E_1^p \end{array}$$

s.s. のつくり方から $\forall r \geq 1$ について $E_r^* \cong E_r$ となる

$E_1^{*p,q}$ を同定する
$$K \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} G/K = Q$$
$\pi: G \to G/K,\ x \mapsto \pi(x) = xK =: \bar{x}$ とかく
π の section $G/K \to G,\ \bar{x} \mapsto \bar{x}^*$ をとる
$\pi(\bar{x}^*) = \bar{x}\ (\forall \bar{x} \in G/K),\ \bar{1}^* = 1$

準同型

$$\eta_p : A_p^{*\,p+q} \longrightarrow C^p(G/K ; C^q(K ; M)),\quad f \mapsto \eta_p(f)$$

を

$$\eta_p(f)(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_p)(\sigma_1,\cdots,\sigma_q) := f(\sigma_1,\cdots,\sigma_q,\bar{x}_1^*,\cdots,\bar{x}_p^*) \qquad \bar{x}_i \in G/K,\ \sigma_j \in K$$

によって決める

- $\eta_p(f)$ は section $\bar{x}^*$ のとり方によらない ($\Leftarrow f \in A_p^{*\,p+q}$)
- $\eta_p(A_{p+1}^{*\,p+q}) = 0$ (∵) $f \in A_{p+1}^*$ ならば $\sigma_q K = K$ より σ_q を 1 でおきかえられる
- $\eta_p(df) = d_K \circ \eta_p(f)$

ただし. $d_K = d : C^q(K ; M) \to C^{q+1}(K ; M)$ (証略. 直接計算)

かくして cochain map

$$\eta_p : A_p^* / A_{p+1}^* \longrightarrow C^p(G/K ; C^*(K ; M))$$

がえられる.

<u>補題5.5.</u> η_p は同型

$$\Phi : E_1^{*\,p,q} = H^{p+q}(A_p^*/A_{p+1}^*) \underset{\cong}{\xrightarrow{\eta_p}} C^p(G/K ; H^q(K ; M))$$

を与える. ([HS] p.121 Theorem 1) ——

<u>$E_2^{*\,p,q}$ の同定</u>

$$E_2^{*\,p,q} = \frac{E_1^{*\,p,q} \cap \operatorname{Ker} d_1}{E_1^{*\,p,q} \cap \operatorname{Im} d_1}$$

$$\begin{array}{ccc}
H^{p+q-1}(A_{p-1}^*/A_p^*) & \xrightarrow{d_1^{p-1,q} = \delta^*} & H^{p+q}(A_p^*/A_{p+1}^*) \\
\Phi \downarrow \wr\!\wr & \circlearrowleft \text{ up to sign} & \Phi \downarrow \wr\!\wr \\
C^{p-1}(G/K ; H^q(K ; M)) & \xrightarrow[d_{G/K}]{} & C^p(G/K ; H^q(K ; M))
\end{array}$$

(証). $\forall e \in H^{p+q-1}(A_{p-1}^*/A_p^*)$

$e = [f],\ f \in A_{p-1}^{*\,p+q-1},\ df \in A_p^{*\,p+q}$

$d_1^{p-1,q} e = [df] \in H^{p+q}(A_p^*/A_{p+1}^*)$ $\quad C^q(K ; M)$

公式 $\exists h \in C^p(G/K ; C^{q-1}(K ; M))$ (fによって線型にきまる)

これがキモ

$$\eta_p(df)(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_p) = (-1)^q d_{G/K}(\eta_{p-1}(f))(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_p) + d_K(h(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_p))$$

$(\forall \bar{x}_i \in G/K)$

いま $H^q(K;M)$ でみると $d_K(f(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_p))$ は 0 だから

$$\phi d_1 e = (-1)^q d_{G/K}\,\phi(e)$$

となる //

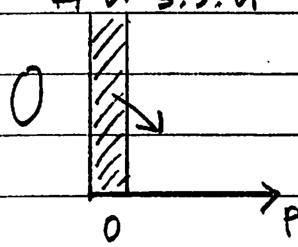
ゆえに

$$E_2^{*p,q} \overset{\phi}{\cong} H^p(G/K;\, H^q(K;M))$$

さらに $E_2^{p,q} \cong E_2^{*p,q} = H^p(G/K;H^q(K;M))$ は cup 積と適合している
(略)

これで LHS s.s. がえられた //

再び s.s. の一般論



$E_n^{0,q}$ を考える

$E_{n+1}^{0,q} = \mathrm{Ker}\, d_n^{0,q} \subset E_n^{0,q}$ だから

$E_\infty^{0,q} \subset \cdots \subset E_{n+1}^{0,q} \subset E_n^{0,q} \subset \cdots \subset E_1^{0,q} = H^q(A/A_1)$

となる

他方 $E_\infty^{0,q} = F_0H^q(A)/F_1H^q(A) = H^q(A)/F_1H^q(A)$ である

s.s. のつくり方から次がわかる

<u>補題 5.6.</u> 合成写像

$$H^q(A) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,q} \subset H^q(A/A_1)$$

は商写像 $A \to A/A_1$ の誘導する準同型に一致する —

LHS.s.s. の場合, 商写像は

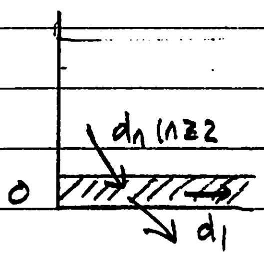
$$A^q = A_0^{*q} \to A_0^{*q}/A_1^{*q} \xrightarrow{\eta_0} C^0(G/K;\, C^q(K;M))$$

$$f \longmapsto f|K$$

となっている. そこで

$$H^q(G;M) \twoheadrightarrow E_\infty^{*0,q} \hookrightarrow H^q(K;M)^{G/K} \subset H^q(K;M)$$

は制限写像 $\iota^*: H^q(G;M) \to H^q(K;M)$ に他ならない.



次に $E_n^{p,0}$ を考える

$S^* = \{E_1^{p,0}, d_1\}_{p\ge 0}$: cochain complex

$$E_1^{p,0} = H^p(A_p, A_{p+1}) = \frac{\mathrm{Ker}(A_p^p/\overset{=0}{A_{p+1}^p} \to A_p^{p+1}/A_{p+1}^{p+1})}{\mathrm{Im}(\overset{=0}{A_p^{p-1}}/A_{p+1}^{p-1} \to A_p^p/A_{p+1}^p)}$$

$$= \mathrm{Ker}(A_p^p \to A_p^{p+1}/A_{p+1}^{p+1}) \subset A_p^p \subset A^p$$

$\pi ; S^p = E_1^{p,0} < A_p^p < A^p$

と定める

事実 π は cochain map である

他方 $n \geq 2$ について

$$E_{n+1}^{p,0} = E_n^{p,0}/E_n^{p,0} \cap \mathrm{Im}\, d_n \xleftarrow[\text{quotient map}]{} E_n^{p,0}$$

$H^p(S^*) = E_2^{p,0} \twoheadrightarrow E_3^{p,0} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_\infty^{p,0}$ 全射の列

また $E_\infty^{p,0} = F_p E^p < E^p = H^p(A)$

次も s.s. のつくり方から分る

補題 5.7 合成写像

$$H^p(S^*) \twoheadrightarrow E_\infty^{p,0} \hookrightarrow H^p(A)$$

は π の誘導する準同型に一致する ―

LHS.s.s. の場合

$E_1^{*p,0} < A_p^{*p}$

$f \in A_p^{*p} \Leftrightarrow f(x_1, \cdots x_p)$ は $x_1K, \cdots, x_pK$ のみに依存する

$\Leftrightarrow f \in C^p(G/K : M)$

さらに

$f \in E_1^{p,0} \Leftrightarrow f \in \mathrm{Ker}\, d_K \Leftrightarrow f \in C^p(G/K : M^K)$

ゆえに $S^* = C^*(G/K : M^K)$ となる

そこで上の $\pi : E_1^{*,p,0} \hookrightarrow A^p$ は

$$\pi^* : C^p(G/K : M^K) \longrightarrow C^p(G : M)$$

に他ならない. Lemma 5.7 より

$$H^p(S^*) \twoheadrightarrow E_\infty^{*p,0} \hookrightarrow H^p(G : M)$$

は π^* に一致する

重要な例

中心拡大のGysin完全列

$\mathbb{Z} \to G \xrightarrow{\pi} Q$　$\mathbb{Z}$による中心拡大 (拡大であって $\mathbb{Z} \subset \mathrm{Center}(G)$)

$\sigma: Q \to G$ section

$\pi\circ\sigma = 1_Q$, $\sigma(\bar{1})=1$

$e_\sigma(\bar{x},\bar{y}) := \sigma(\bar{x})\sigma(\bar{y})\sigma(\bar{x}\bar{y})^{-1} \in \mathbb{Z}$. $(\bar{x},\bar{y}\in Q)$ Euler cocycle

$e = \mathrm{Euler}(\mathbb{Z}\to G\to Q) := [e_\sigma] \in H^2(Q;\mathbb{Z})$ Euler class (σのとり方によらない)

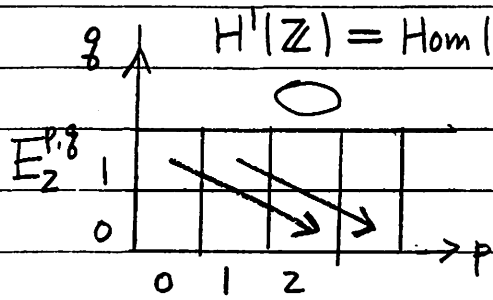
M: 左Q加群とする ($\Rightarrow$ $\mathbb{Z}$の作用は自明, $H^q(\mathbb{Z};M) = H^q(\mathbb{Z})\otimes M$)

LHS s.s. を書いてみる

$$E_2^{p,q} = H^p(Q;H^q(\mathbb{Z})\otimes M) \Rightarrow H^{p+q}(G;M)$$

$$H^q(\mathbb{Z}) = H^q(S^1) = \begin{cases}\mathbb{Z} & (q=0,1)\\ 0 & (q\neq 0,1)\end{cases}$$

$$H^1(\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(H_1(\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}1_{\mathbb{Z}}$$

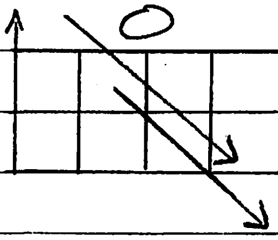


$$\begin{cases} E_3^{n,0} = E_2^{n,0}/\mathrm{Im}\, d_2^{n-2,1} \\ E_3^{n-1,1} = \mathrm{Ker}\, d_2^{n-1,1} \subset E_2^{n-1,1}\end{cases}$$

ゆえに

$$0\to E_3^{n-1,1}\to E_2^{n-1,1}\xrightarrow{d_2} E_2^{n+1,0}\to E_3^{n+1,0}\to 0 \ (\text{exact})$$

$r\geq 3$ のとき　$d_r = 0$ だから



$$E_3^{p,q} = E_\infty^{p,q}$$

ゆえに

$$0\to E_3^{n,0}\to E^n\to E_3^{n-1,1}\to 0 \ (\text{exact})$$

したがって

いまの場合

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to E_2^{n-1,1} & \xrightarrow{d_2} & E_2^{n+1,0} & \xrightarrow{\pi^*} & E^{n+1} & \longrightarrow & E_2^{n,1} & \to \cdots & (\text{exact}) \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \\
\to H^{n-1}(Q;H^1(\mathbb{Z})\otimes M) & \xrightarrow{d_2} & H^{n+1}(Q;M) & \xrightarrow{\pi^*} & H^{n+1}(G;M) & \to & H^n(Q;H^1(\mathbb{Z})\otimes M) & \to &
\end{array}$$

$\pi_\sharp$ と書く
Gysin map とよぶ

d_2 を調べる

$M=\mathbb{Z}$ 自明G加群　$\mathbb{Z}\subset \mathrm{Center}(G)$ より $Q \curvearrowright H^1(\mathbb{Z})$ 自明

$$H^0(Q;H^1(\mathbb{Z})) = H^1(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}1_{\mathbb{Z}}$$

$$d_2 : H^0(Q ; H^1(\mathbb{Z})) \to H^2(Q ; \mathbb{Z})$$
$$1_{\mathbb{Z}} \longmapsto d_2(1_{\mathbb{Z}}) \qquad e$$

補題 5.8. $-d_2(1_{\mathbb{Z}}) = e \in H^2(Q ; \mathbb{Z})$

証明 π, σ 上の通り

$s := \sigma\pi : G \to G$.

$f : G \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto f(x) := x\, s(x)^{-1}$

$f \in C^1(G ; \mathbb{Z}) = A_0^{*1}$

$r_0(f) = f|_{\mathbb{Z}} = 1_{\mathbb{Z}}$

$df \in C^2(G ; \mathbb{Z})$

s.s. のつくり方から

$d_2(1_{\mathbb{Z}}) = [r_2(df)] \in H^2(Q ; \mathbb{Z})$.

$(df)(x, y) = x f(y)_{①} - f(xy)_{②} + f(x)_{③}$

$= s(xy) y^{-1} x^{-1}{}_{②}\ x y s(y)^{-1} x^{-1}{}_{①}\ x s(x)^{-1}{}_{③}$

$= s(xy) s(y)^{-1} s(x)^{-1} = -e_\sigma(\pi(x), \pi(y))$

ゆえに

$r_2(df) = -e_\sigma \in Z^2(Q ; \mathbb{Z})$ //

一般の M について

$$\begin{array}{ccc} E_2^{p-2,1} & \xrightarrow{d_2} & E_2^{p,0} \\ \| & \circlearrowleft & \| \\ 1_{\mathbb{Z}} \cup u \in H^{p-2}(Q ; H^1(\mathbb{Z}) \otimes M) & & H^p(Q ; M) \\ \uparrow \quad \uparrow\wr & \nearrow_{-e\cup} & \\ u \in H^{p-2}(Q ; M) & & \end{array}$$

(∵) $u \in H^{p-2}(Q ; M) = E_2^{p-2,0}$

ゆえに $d_2 u = 0$

$d_2(1_{\mathbb{Z}} \cup u) = (d_2 1_{\mathbb{Z}}) \cup u - 1_{\mathbb{Z}} \cup \overbrace{d_2 u}^{0}$

$= -e \cup u$ //

以上により

$$\to H^{p-2}(Q ; M) \xrightarrow{e\cup} H^p(Q ; M) \xrightarrow{\pi^*} H^p(G ; M) \xrightarrow{\pi_\#} H^{p-1}(Q ; M) \to \cdots$$

(exact)

Gysin 完全列

$\left(\mathbb{Z} \to B_3 \to SL_2(\mathbb{Z}) \Rightarrow H^*(SL_2(\mathbb{Z}) ; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[e]/(12e) \right)$

o. Date . .

(§5. LHS s.s. (つづき))

中心拡大のGysin完全列

$\mathbb{Z} \to G \to Q$　$\mathbb{Z}$による中心拡大（拡大であって $\mathbb{Z} \subset \mathrm{Center}(G)$）

$\sigma : Q \to G$ section

$\pi \circ \sigma = 1_Q$, $\sigma(\bar{1}) = 1$

$e_\sigma(\bar{x}, \bar{y}) := \sigma(\bar{x})\sigma(\bar{y})\sigma(\overline{xy})^{-1} \in \mathbb{Z}$ $(\bar{x}, \bar{y} \in Q)$ Euler cocycle

$e = \mathrm{Euler}(\mathbb{Z} \to G \to Q) := [e_\sigma] \in H^2(G ; \mathbb{Z})$ Euler class（σのとり方によらない）

M : 左Q加群とする（$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}$の作用は自明. $H^g(\mathbb{Z} ; M) = H^g(\mathbb{Z}) \otimes M$）

$H^1(\mathbb{Z} ; \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cdot 1_{\mathbb{Z}}$

LHS s.s. により

$$\to H^{n-1}(Q ; H^1(\mathbb{Z}) \otimes M) \xrightarrow{d_2} H^{n+1}(Q ; M) \xrightarrow{\pi^*} H^{n+1}(G ; M) \xrightarrow[\text{Gysin map}]{\pi_\sharp} H^n(Q ; H^1(\mathbb{Z}) \otimes M) \to \cdots$$
(exact)

d_2を調べる

まず $M = \mathbb{Z}$ 自明加群の場合を考える.

$\mathbb{Z} \subset \mathrm{Center}(G)$ より $Q \curvearrowright H^1(\mathbb{Z})$ 自明.

$H^0(Q ; H^1(\mathbb{Z})) = H^1(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} 1_{\mathbb{Z}}$

$$\begin{array}{ccc} d_2 : H^0(Q ; H^1(\mathbb{Z})) & \to & H^2(Q ; \mathbb{Z}) \\ \Psi\ \ 1_{\mathbb{Z}} & \longmapsto & d_2(1_{\mathbb{Z}}),\ \Psi\ e \end{array}$$

補題 5.8. $-d_2(1_{\mathbb{Z}}) = e \in H^2(Q ; \mathbb{Z})$

証明 π, σ 上の通り.

$s := \sigma\pi : G \to G$

$f : G \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto f(x) := x s(x)^{-1}$

$f \in C^1(G ; \mathbb{Z}) = A_0^{*1}$

$r_0(f) = f|_{\mathbb{Z}} = 1_{\mathbb{Z}}$

$df \in C^2(G ; \mathbb{Z})$

s.s. のつくり方から

$d_2(1_{\mathbb{Z}}) = [r_2(df)] \in H^2(Q ; \mathbb{Z})$

$(df)(x, y) = x f(y)_{①} - f(xy)_{②} + f(x)_{③}$

$= s(xy) y^{-1} x^{-1}_{②}\ x y s(y)^{-1} x^{-1}_{①}\ x s(x)^{-1}_{③}$

$= s(xy)s(y)^{-1}s(x)^{-1} = -e_\sigma(\pi(x),\pi(y))$

ゆえに

$$r_2(df) = -e_\sigma \in Z^2(Q;\mathbb{Z}) \quad //$$

一般の M について

$$\begin{tikzcd}
E_2^{p-2,1} \arrow[rr, "d_2"] \arrow[d, equal] & & E_2^{p,0} \arrow[d, equal] \\
u \cup 1_{\mathbb{Z}} \in H^{p-2}(Q;H^1(\mathbb{Z})\otimes M) & & H^p(Q;M) \\
u \in H^{p-2}(Q;M) \arrow[u, mapsto] \arrow[u, "\cong"'] \arrow[urr, "-e\cup"'] & &
\end{tikzcd}$$

(∵) $u \in H^{p-2}(Q;M) = E_2^{p-2,0}$

ゆえに $d_2 = 0$

$d_2(1_{\mathbb{Z}} \cup u) = (d_2 1_{\mathbb{Z}}) \cup u - 1_{\mathbb{Z}} \cup \overset{0}{\cancel{d_2 u}}$

$= -e \cup u \quad //$

以上により

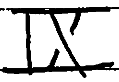
$$\cdots \to H^{p-2}(Q;M) \xrightarrow{e\cup} H^p(Q;M) \xrightarrow{\pi^*} H^p(G;M) \xrightarrow{\pi_\#} H^{p-1}(Q;M) \to \cdots$$

(exact)

Gysin 完全列という

<u>例</u> cohomology 環 $H^*(SL_2(\mathbb{Z});\mathbb{Z})$ の計算

$B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \,;\, \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \rangle$ braid group on 3 strings

$\sigma_1 =$  $\sigma_2 =$ 

$\varphi : B_3 \to SL_2\mathbb{Z}, \quad \varphi(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \varphi(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

((well-defined) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$)

φ は全射である(レポート問題3)

<u>レポート問題7</u> $\mathrm{Ker}\,\varphi$ は $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^4$ の生成する無限巡回群であって $\mathrm{Ker}\,\varphi < \mathrm{Center}(B_3)$ である.(中心拡大であることを示せば充分)

(参考文献). J. Milnor "Introduction to Algebraic K-theory" (Princeton U.P.) p. 83. Theorem 10.5

かくして

$$\mathbb{Z} \to B_3 \to SL_2\mathbb{Z} \quad \text{中心拡大}$$

$$e := \mathrm{Euler}(\mathbb{Z} \to B_3 \to SL_2\mathbb{Z}) \in H^2(SL_2\mathbb{Z};\mathbb{Z}),$$

!!(Gysin 完全列をしらべる)

$$H^*(\ ) = H^*(\ ;\mathbb{Z})$$

以前の結果を引用する

$$H_1(SL_2\mathbb{Z};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/12 \quad \text{(レポート問題4)}$$

普遍係数定理から

$$H^1(SL_2\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/12, \mathbb{Z}) = 0$$

$$H^2(SL_2\mathbb{Z}) = \underbrace{\mathrm{Hom}(H_2(SL_2\mathbb{Z}), \mathbb{Z})}_{\mathbb{Z}\text{-free}} \oplus \mathbb{Z}/12$$

§3の定理3.6のあとの計算から

$$H^*(B_3) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (*=0,1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

Gysin 完全列をしらべる

$$\begin{array}{ccccccccc} H^1(SL_2\mathbb{Z}) & \to & H^1(B_3) & \xrightarrow{\text{inj}} & H^0(SL_2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cup e} & H^2(SL_2\mathbb{Z}) & \to & H^2(B_3) \\ \| & & \| & & \| & & & & \| \\ 0 & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & & & 0 \end{array}$$

ゆえに $H^2(SL_2\mathbb{Z})$ は e の生成する有限巡回群だから

$$H^2(SL_2\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/12)e \cong \mathbb{Z}/12$$

$g \geqq 1$ のとき

$$\begin{array}{ccccccc} H^{g+1}(B_3) & \to & H^g(SL_2\mathbb{Z}) & \underset{\cong}{\xrightarrow{\cup e}} & H^{g+2}(SL_2\mathbb{Z}) & \to & H^{g+2}(B_3) \\ \| & & & & & & \| \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

ゆえに $g = 2p+1$: odd $\geqq 3$ のとき

$$H^{2p+1}(SL_2\mathbb{Z}) \cong H^1(SL_2\mathbb{Z}) = 0$$

$g = 2p$: even $\geqq 4$ のとき

$$H^{2p}(SL_2\mathbb{Z}) \overset{\cup e^{p-1}}{\cong} H^2(SL_2\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/12)e$$

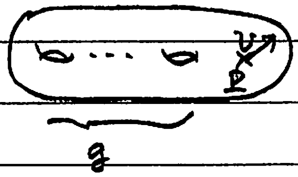
$$H^{2p}(SL_2\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/12)e^p \cong \mathbb{Z}/12$$

ゆえに

$$H^*(SL_2\mathbb{Z};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[e]/(12e)$$

§6 写像類群への応用

以下, $g \geqq 2$ とする

$\Sigma_g :=$  種数 g の有向閉曲面

$\Sigma_g \ni p$

$0 \neq v \in T_p \Sigma_g$

$\mathcal{M}_g := \{ f : \Sigma_g \to \Sigma_g$ 向きを保つ微分同相$\} / \text{isotopy}$

$\mathcal{M}_{g,*} := \{ f \quad // \quad , f(p) = p \} / _{p\text{を動かさない isotopy}}$

$\mathcal{M}_{g,1} := \{ f \quad // \quad , f(p) = p, (df)_p(v) = v \} / _{p\text{と}v\text{を動かさない isotopy}}$

<u>写像類群</u> (mapping class group) または Teichmüller modular 群とよぶ

((注) $g=1$ のときは $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_{1,*} = SL_2\mathbb{Z}$, $\mathcal{M}_{1,1} = B_3$ である)

$\mathcal{M}_{g,*} \curvearrowright \pi_1 := \pi_1(\Sigma_g, p)$ (∵ 基本群の homotopy 不変性)

<u>forgetful homomorphisms</u>

$\varpi : \mathcal{M}_{g,1} \to \mathcal{M}_{g,*}$, $[f] \mapsto [f]$, 接 vector v を忘れる

$\pi : \mathcal{M}_{g,*} \to \mathcal{M}_g$. $[f] \mapsto [f]$ 基点 p を忘れる

<u>補題 6.1</u>

(1) ϖ は全射で $\operatorname{Ker} \varpi$ は vector v の一回転が生成する無限巡回群であり, $\operatorname{Ker} \varpi \subset \operatorname{Center} \mathcal{M}_{g,1}$ をみたす. つまり

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{M}_{g,1} \xrightarrow{\varpi} \mathcal{M}_{g,*} \to 1 \quad \text{中心拡大}$$

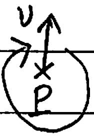
(2) π は全射で $\operatorname{Ker} \pi$ は点 p の slide に対応していて $\pi_1 = \pi_1(\Sigma_g, p)$ に同型である. つまり

$$1 \to \pi_1 \to \mathcal{M}_{g,*} \to \mathcal{M}_g \to 1 \quad (\text{exact})$$

(ごく最近、この完全列を Birman exact sequence とよぶ人たちがいる)

証明略。気持ちをのべる

(1) 全射性は v を保つように isotopy で動かせばよい。



$\mathrm{Ker}\,\varpi \cong \mathbb{Z}$ は $[f] \in \mathrm{Ker}\,\varpi$ について f を 1_{Σ_g} に isotopy で動かすとき v が何回転するか数えればよい

$\mathcal{M}_{g,1}$ の元は isotopy で動かして P の近傍で id にできる $\Rightarrow \mathrm{Ker}\,\varpi < \mathrm{Center}$

(2) 全射性は P を保つように isotopy で動かせばよい

点 P の slide $\in \mathrm{Ker}\,\pi$ は明らか。$[f] \in \mathrm{Ker}\,\pi$ とすると f を 1_{Σ_g} に isotopy で動かすときの P の軌跡を考えると、その軌跡に沿って P を slide させたものと f は $\mathcal{M}_{g,*}$ においてひとしい //

$$e := \mathrm{Euler}(\mathbb{Z} \to \mathcal{M}_{g,1} \to \mathcal{M}_{g,*}) \in H^2(\mathcal{M}_{g,*};\mathbb{Z})$$

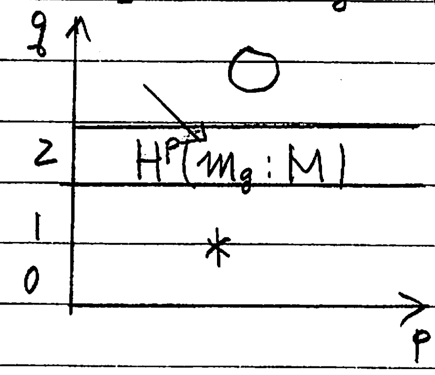
Euler class

$\pi_1 \to \mathcal{M}_{g,*} \to \mathcal{M}_g$ の LHS s.s. を書いてみる

M : $\mathcal{M}_g$-module とする。π_1 の M への作用は自明だから

$$H^q(\pi_1;M) = H^q(\pi_1)\otimes M \underset{\substack{g\geq 2\text{より} \\ \Sigma_g = K(\pi_1,1)}}{=} H^q(\Sigma_g)\otimes M = \begin{cases} M & (q=0,2) \\ H^1(\Sigma_g)\otimes M & (q=1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{M}_g; H^q(\pi_1)\otimes M) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{M}_{g,*};M)$$



$E_2^{p,2}$ に注目する。

$$E_\infty^{p,2} = F_pH^{p+2}(\mathcal{M}_{g,*};M)/F_{p+1}H^{p+2}(\mathcal{M}_{g,*};M)$$

であるが、いまの状況では $q \geq 3$ について $E_\infty^{p,q} = 0$ より、

$F_pH^{p+2} = H^{p+2}$ ゆえに標準射影

$$H^{p+2}(\mathcal{M}_{g,*};M) \twoheadrightarrow E_\infty^{p,2}$$

が定義できる

また、

$$E_2^{p,2} \supset \mathrm{Ker}\,d_2^{p,2} = E_3^{p,2} \supset \mathrm{Ker}\,d_3^{p,2} = E_4^{p,2} = E_5^{p,2} = E_\infty^{p,2}$$

o. Date

したがって合成写像
$$\pi_! : H^{p+2}(\mathcal{M}_{g,*} ; M) \twoheadrightarrow E_\infty^{p,2} \subset E_2^{p,2} = H^p(\mathcal{M}_g ; M)$$
が定義できる. これを $\pi_!$ と書き Gysin map または ファイバー積分 とよぶ

$i \geqq 0$
$$e^{i+1} \in H^{2i+2}(\mathcal{M}_{g,*} ; \mathbb{Z})$$
定義 (D. Mumford, 森田茂之)
$$e_i := \pi_!(e^{i+1}) \in H^{2i}(\mathcal{M}_g ; \mathbb{Z}) \quad \text{第}i\text{森田Mumford類}$$
(第 i tautological 類ともいう Mumfordはじめ代数幾何では
$$\kappa_i := \pi_!((-e)^{i+1}) = (-1)^{i+1} e_i \text{ をつかう})$$
$$e_0 = e|_{\pi_1 \Sigma_g} = \langle e(T\Sigma_g), [\Sigma_g] \rangle = 2-2g$$
となる. つまり. 曲面の Euler 数の高次化になっている

定理 (I. Madsen - M. Weiss) $* < \frac{2}{3}g$ のとき (安定域という)
$$H^*(\mathcal{M}_g ; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[e_i ; i \geqq 1]$$

(注) $* < \frac{2}{3}g$ であっても, $H^*(\mathcal{M}_g ; \mathbb{Z})$ には MM class 以外に沢山ある
(Madsen-Weiss の結果をもとに S. Galatius が計算している)

安定域について Madsen-Weiss より前に次がわかっていた

Harer stability theorem (J. Harer) $* < \frac{1}{2}g$ のとき 忘却準同型は同型
$$H^*(\mathcal{M}_g ; \mathbb{Z}) \cong H^*(\mathcal{M}_{g,*} ; \mathbb{Z})$$
をみたし. $H^*(\mathcal{M}_g ; \mathbb{Z})$ は g によらない ($\mathbb{Q}$-係数では $\frac{2}{3}g$ まで拡張する)

$\mathbb{Z} \to \mathcal{M}_{g,1} \xrightarrow{\varpi} \mathcal{M}_{g,*}$ の Gysin 列をかくと

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to H^{p-1}(\mathcal{M}_{g,1} ; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varpi_\#} & H^{p-2}(\mathcal{M}_{g,*} ; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cup e} & H^p(\mathcal{M}_{g,*} ; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varpi^*} & H^p(\mathcal{M}_{g,1} ; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varpi_\#} & \\
 & & & & \uparrow \pi^* & \circlearrowleft & \cong & & \\
 & & & & H^p(\mathcal{M}_g ; \mathbb{Z}) & & & &
\end{array}$$
$p < \frac{1}{2}g$ のとき同型
(Harer stability)

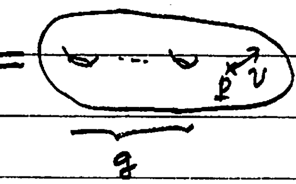
とくに安定域では ϖ^* は全射で $\varpi_\# = 0$. ゆえに

系 (J. Harer) $H^*(\mathcal{M}_{g,*} ; \mathbb{Z}) = H^*(\mathcal{M}_g ; \mathbb{Z})[e]$ $\quad (* < \frac{1}{2}g \text{ のとき})$

次回から MM class の twisted version について.

(§6 写像類群への応用 (つづき))

$g \geq 2$

$\Sigma_g =$  $p \in \Sigma_g,\ 0 \neq v \in T_p\Sigma_g$

$\mathcal{M}_g := \{f : \Sigma_g \to \Sigma_g \text{ ori. pres. diffeo}\}/\text{isotopy}$

$\mathcal{M}_{g,*} := \{f : \Sigma_g \to \Sigma_g \text{ —''—},\ f(p) = p\}/$ pを動かさないisotopy

$\mathcal{M}_{g,1} := \{f : \Sigma_g \to \Sigma_g \text{ —''— } f(p) = p,\ (df)_p(v) = v\}/$ pとvを動かさないisotopy

$\mathcal{M}_{g,*} \curvearrowright \pi_1 := \pi_1(\Sigma_g, p)$

$\mathcal{M}_g \curvearrowright H := H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$

((注) Poincaré duality により $H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z}) = H^1(\Sigma_g;\mathbb{Z})$ だが、この同型は $\mathcal{M}_g$ 準同型.)

forgetful exact sequences

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{M}_{g,1} \xrightarrow{\varpi} \mathcal{M}_{g,*} \to 1 \quad \text{central extension}$$

$$1 \to \pi_1 \to \mathcal{M}_{g,*} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}_g \to 1 \quad \text{(exact)}$$

(注) $\mathcal{M}_{g,*}$ の π_1 への共役作用は通常の作用に一致する.

M : $\mathcal{M}_g$-module について π の Gysin map

$$\pi_! : H^{p+2}(\mathcal{M}_{g,*}; M) \to H^p(\mathcal{M}_g; M)$$

が定義できる.

$$e := \mathrm{Euler}(\mathbb{Z} \to \mathcal{M}_{g,1} \xrightarrow{\varpi} \mathcal{M}_{g,*}) \in H^2(\mathcal{M}_{g,*}; \mathbb{Z})$$

$i \geq 0$

$$e_i := \pi_!(e^{i+1}) \in H^{2i}(\mathcal{M}_g; \mathbb{Z}) \quad \text{the } i\text{-th Morita-Mumford class}$$

$(e_0 = 2 - 2g \in H^0(\mathcal{M}_g; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z})$

これの twisted version を考える

$\mathcal{M}_g$ は π_1 に作用しないので $\mathcal{M}_{g,*}$ で考える

$$\overline{\mathcal{M}} = \overline{\mathcal{M}_{g,*}} := \mathcal{M}_{g,*} \times_{\mathcal{M}_g} \mathcal{M}_{g,*} = \{(\varphi, \psi) \in \mathcal{M}_{g,*} \times \mathcal{M}_{g,*} ;\ \pi(\varphi) = \pi(\psi)\}$$

$(\varphi, \psi) \in \overline{\mathcal{M}}$ とすると $\pi(\varphi) = \pi(\psi)$ より $\psi\varphi^{-1} \in \pi_1$

$\overline{\mathcal{M}} \overset{\cong}{\longrightarrow} \pi_1 \rtimes \mathcal{M}_{g,*}$ (半直積)

$(\varphi, \psi) \mapsto (\psi\varphi^{-1}, \varphi)$

$(\varphi, \gamma\varphi) \leftarrow (\gamma, \varphi)$

$$\left(\begin{array}{l} (\varphi,\psi)(\varphi',\psi') = (\varphi\varphi', \psi\psi') \\ \mapsto \psi\psi'(\varphi\varphi')^{-1} = \psi\psi'\varphi'^{-1}\varphi^{-1} = \psi\varphi^{-1}\varphi(\psi'\varphi'^{-1})\varphi^{-1} \end{array} \right)$$

$k_0 : \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow H = H_1(\Sigma_g ; \mathbb{Z}) = \pi_1^{ab}$

$(\varphi,\psi) \longmapsto [\psi\varphi^{-1}]$

と定義する

1-cocycle である

$$\left[\begin{array}{l} (\because)\ k_0((\varphi,\psi)(\varphi',\psi')) = [(\psi\varphi^{-1})(\varphi\psi'\varphi'^{-1}\varphi^{-1})] \\ \quad = [\psi\varphi^{-1}] + \varphi_*[\psi'\varphi'^{-1}] = k_0(\varphi,\psi) + \varphi_* k_0(\varphi',\psi') \end{array} \right.$$

(注) k_0 は

$\pi_1 \rtimes \mathcal{M}_{g,*} \to \pi_1^{ab}$ $(\gamma,\varphi) \mapsto [\gamma]$

とみることができる. 一般に群 G について 1-cocycle

$G \rtimes \mathrm{Aut}\, G \to G^{ab}$ $(\gamma,\varphi) \mapsto [\gamma]$

を定義することができる

$k_0|G = 1_{G^{ab}} \in H^1(G ; G^{ab}) = \mathrm{Hom}(G^{ab}, G^{ab})$

$\pi : \overline{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}_{g,*}$ $(\varphi,\psi) \mapsto \varphi$

$\bar{\pi} : \overline{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}_{g,*}$ $(\varphi,\psi) \mapsto \psi$

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathcal{M}} \arrow[r, "\bar{\pi}"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{M}_{g,*} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{M}_{g,*} \arrow[r, "\pi"'] & \mathcal{M}_g \end{tikzcd} \qquad \bar{e} := \bar{\pi}^* e \in H^2(\overline{\mathcal{M}} ; \mathbb{Z})$$

$i, j \geq 0$

$\bar{e}^i k_0^j \in H^{2i+j}(\overline{\mathcal{M}} ; \Lambda^j H)$

ここで $k_0^j \in H^j(\overline{\mathcal{M}} ; \Lambda^j H)$ は k_0 を j 回 cup 積したもの

$k_0^{\otimes j} \in H^j(\overline{\mathcal{M}} ; H^{\otimes j})$

に写像

$H^{\otimes j} \longrightarrow \Lambda^j H$, $x_1 \otimes \cdots \otimes x_j \mapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_j$

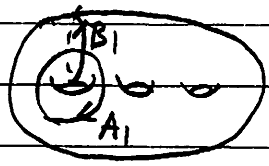
を適用したもの

twisted Morita-Mumford class $i, j \geq 0,\ 2i+j-2 \geq 0$ について

$$m_{i,j} := \pi_!(\bar{e}^i k_0^j) \in H^{2i+j-2}(\mathcal{M}_{g,*}; \Lambda^j H)$$

$$m_{i+1,0} = \pi_!(\bar{e}^{i+1}) = \pi^*(e_i) \in H^{2i}(\mathcal{M}_{g,*}; \mathbb{Z})$$

$m_{0,2}$ について　$m_{0,2} \in H^0(\mathcal{M}_{g,*}; \Lambda^2 H) \subset \Lambda^2 H$

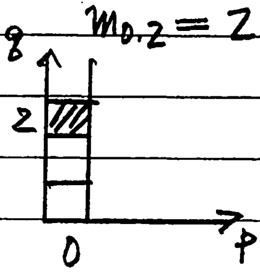


$A_i, B_i \in H = H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})\quad 1 \leq i \leq g$

基底であって $A_i \cdot B_j = -B_i \cdot A_j = \delta_{ij}$.

$A_i \cdot A_j = B_i \cdot B_j = 0$ をみたす

$m_{0,2} = 2 \sum A_i \wedge B_i \in \Lambda^2 H$ となることを示す



$$m_{0,2} = \pi_!(k_0^2) = \iota^*(k_0^2) \in H^2(\pi_1; \Lambda^2 H) = \Lambda^2 H$$

(ただし

$\iota : \pi_1 \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}} = \pi_1 \rtimes \mathcal{M}_{g,*}\quad \gamma \longmapsto (\gamma, 1)$)

同型 $H^2(\pi_1) \cong \mathbb{Z}$ について

$\Sigma_g = B\pi_1$ だから $H_2(\pi_1; \mathbb{Z}) = H_2(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

$H_2(\pi_1; \mathbb{Z})$ の生成元で値をとることにより $H^2(\pi_1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ がえられる

$$\pi_1 = \langle \alpha_i, \beta_i ; \prod_{i=1}^{g} [\alpha_i, \beta_i] = 1 \rangle$$

$$[\alpha_i] = A_i,\ [\beta_i] = B_i \in H$$

$w_j \in \{\alpha_i^{\pm}, \beta_i^{\pm}\}$ を

$$\prod_{i=1}^{g} [\alpha_i, \beta_i] = w_1 w_2 \cdots w_{4g}\quad (\text{word としての等式})$$

によって定義する. つまり

$$w_1 = \alpha_1,\ w_2 = \beta_1,\ w_3 = \alpha_1^{-1},\ \cdots,\ w_{4g} = \beta_g^{-1}$$

$$\widetilde{w}_j := w_1 w_2 \cdots w_j = \alpha_1 \beta_1 \cdots w_j \in \pi_1$$

$$\widetilde{w}_0 = 1,\ \widetilde{w}_{4g} = \prod_{i=1}^{g} [\alpha_i, \beta_i] = 1$$

ここでは $C_*(G;\mathbb{Z})$ は normalized standard bar resolution によるものとする
つまり $[\cdots|1|\cdots]=0$ とする

補題6.2

$$[\Sigma_g]:=\sum_{j=1}^{4g}[\widetilde{w_{j-1}}|w_j]-\sum_{i=1}^{g}\left([\alpha_i|\alpha_i^{-1}]+[\beta_i|\beta_i^{-1}]\right)\in C_2(\pi_1;\mathbb{Z})$$

とおくと cycle であって $1_H^{\otimes 2}\in H^2(\pi_1;H^{\otimes 2})$ で値をとると

$$\langle 1_H^{\otimes 2},[\Sigma_g]\rangle=\sum_{i=1}^{g}A_i\otimes B_i-B_i\otimes A_i$$

をみたす. とくに $[\Sigma_g]\in H_2(\pi_1;\mathbb{Z})$ は生成元である

(証) $\partial[\Sigma_g]=\sum_{j=1}^{4g}[w_j]-[\widetilde{w_{j-1}}w_j]+[\widetilde{w_{j-1}}]-\sum_{i=1}^{g}[\alpha_i^{-1}]-\underbrace{[1]}_{0}+[\alpha_i]+[\beta_i^{-1}]-\underbrace{[1]}_{0}+[\beta_i]$

$$=\sum_{j=1}^{4g}[w_j]-\sum_{j=1}^{4g}[\widetilde{w_j}]-[\widetilde{w_{j-1}}]-\sum_{j=1}^{4g}[w_j]$$

$$=-[\widetilde{w_{4g}}]+[\widetilde{w_0}]=-[1]+[1]=0$$

ゆえに $[\Sigma_g]$ は 2-cycle である.

そのhomology類は $H_2(\Sigma_g;\mathbb{Z})$ において生成元の整数倍 (a倍とする).

$$\langle 1_H^{\otimes 2},[\Sigma_g]\rangle=\sum_{j=1}^{4g}[\widetilde{w_{j-1}}]\otimes[w_j]+\sum_{i=1}^{g}A_i\otimes A_i+B_i\otimes B_i$$

($[\ ]$ は homology class)

($[\widetilde{w_{4i}}]=0$ なので)

$$=\sum_{i=1}^{g}0\otimes A_i+A_i\otimes B_i+(A_i+B_i)\otimes(-A_i)+(\cancel{A_i}+B_i\cancel{-A_i})\otimes(-B_i)+A_i\otimes A_i+B_i\otimes B_i$$

$$=\sum_{i=1}^{g}A_i\otimes B_i-B_i\otimes A_i$$

これを割りきる整数は ±1 のみ. ゆえに $a=\pm1$ で $[\Sigma_g]\in H_2(\Sigma_g;\mathbb{Z})$ は
生成元になっている. //

系6.3 $m_{0,2}=2\sum_{i=1}^{g}A_i\wedge B_i\in\Lambda^2H$

(証) $m_{0,2}=\pi_1(k_0^2)=\iota^*k_0^2=\langle 1_H^2,[\Sigma_g]\rangle$
$\underset{\text{Lem6.2}}{=}\sum A_i\wedge B_i-B_i\wedge A_i=2\sum A_i\wedge B_i$ //

$m_{0,3}$ について　$m_{0,3}=-6\tilde{k}\in H^1(\mathcal{M}_{g,*};\Lambda^3H)$

$\tilde{k}$ = 第1拡大Johnson準同型 (ここでは略)

$m_{1,1}$ について　$m_{1,1} \in H^1(\mathcal{M}_{g,*};H)$

補題 6.4　$\iota^* m_{1,1} = -(2-2g)1_H \in H^1(\pi_1;H) = \mathrm{Hom}(H,H)$

(証) $\pi : \overline{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}_{g,*}$　$(\varphi,\psi) \mapsto \varphi$

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(\pi_1) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, hook, "\iota"] & \pi_1 \arrow[d, hook, "\iota"] \\ \overline{\mathcal{M}} \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{M}_{g,*} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & & \pi_1 \\ \pi^{-1}(\pi_1) = \pi_1 \times \pi_1 \arrow[urr, "pr_2"] \arrow[d, "\pi = pr_1"] & \ni (\varphi,\psi) \arrow[ur, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \psi \\ \pi_1 & \varphi & \end{tikzcd}$$

$(\iota^* k_0)(\varphi,\psi) = [\psi\varphi^{-1}] = [\psi] - [\varphi] = (pr_2^* 1_H - pr_1^* 1_H)(\varphi,\psi)$

$\iota^* k_0 = pr_2^* 1_H - pr_1^* 1_H$

$\iota^*(\bar{e}) = pr_2^*(e) = pr_2^*(e(T\Sigma_g))$

$e(T\Sigma_g) = \mathrm{Euler}(\mathbb{Z} \to \pi_1(T\Sigma_g \setminus 0\text{-section}) \to \pi_1) \in H^2(\pi_1;\mathbb{Z})$

したがって

$\iota^*(m_{1,1}) = \iota^* \pi_!(\bar{e}k_0) \overset{\text{LHS s.s の自然性}}{=} \pi_! \iota^*(\bar{e}k_0)$

$= \pi_!(\underbrace{pr_2^*(e)(pr_2^*(1_H)}_{=0} - pr_1^*(1_H)))$　0 (∵ $e \cup 1_H \in H^3(\Sigma_g;H) = 0$)

$= -pr_{1!}(pr_2^*(e)\, pr_1^*(1_H))$

$= -pr_{1!}(pr_2^*(e))\, 1_H$ (∵ LHS s.s は cup積と compatible)

$= -\langle e(T\Sigma_g), [\Sigma_g] \rangle$

$= -(2-2g)$ (∵ Poincaré-Hopf) //

他方

定理 6.5 (森田)　$g \geqq 2$ について

$$H^1(\mathcal{M}_{g,*}; H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}$$

であり生成元を $\pi_1 < \mathcal{M}_{g,*}$ に制限すると $\pm(2-2g)1_H \in H^1(\pi_1;H)$ となる。

この定理から

系 6.6　$g \geqq 2$ について $m_{1,1} \in H^1(\mathcal{M}_{g,*};H)$ は生成元である。

No. Date . .

定理6.5の証明について

$\mathbb{Z} \to \mathcal{M}_{g,1} \xrightarrow{\varpi} \mathcal{M}_{g*}$ の Gysin 列より

$$0 \to H^1(\mathcal{M}_{g*}; H) \underset{\cong}{\xrightarrow{\varpi^*}} H^1(\mathcal{M}_{g,1}; H) \to H^0(\mathcal{M}_{g*}; H)$$

$\| $ (各自) 0

$\mathcal{M}_{g,1}$ で示せばよい

森田：$\mathcal{M}_{g,1}$ の表示を使った精密な計算

他方 安定域 $g \gg 1$ では $H^1(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ を Harer stability から示すことができる

$P, P' \in \Sigma_g,\ P \neq P',\ 0 \neq v \in T_P\Sigma_g$

$\pi_1' := \pi_1(\Sigma_g \setminus \{P\}, P') \cong F(\{\alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_g, \beta_g\})$ free group

$\mathcal{M}_{g,1}^1 \overset{\text{def}}{=} \{f : \Sigma_g \to \Sigma_g \text{ ori. pres. diffeo}, f(P) = P\ (df)_P(v) = v, f(P') = P'\}$ / P, P', v を保つ isotopy

$1 \to \pi_1' \to \mathcal{M}_{g,1}^1 \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}_{g,1} \to 1$ forgetful exact sequence

前回と同様に Harer stability により

$$H^*(\mathcal{M}_{g,1}^1; \mathbb{Z}) = H^*(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbb{Z})[e] \quad (* \ll g)$$

とくに

$$\pi^* : H^*(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbb{Z}) \to H^*(\mathcal{M}_{g,1}^1; \mathbb{Z}) \text{ injective} \quad (* \ll g)$$

$$H^2(\mathcal{M}_{g,1}^1; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}e \oplus \pi^* H^2(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus H^2(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbb{Z})$$

forgetful exact seq の LHS s.s. を書く

π_1' : free, $(\pi_1')^{ab} = \pi_1^{ab} = H$ により

q	
1	$H^p(\mathcal{M}_{g,1}; H)$
0	$H^p(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbb{Z})$
	p

Gysin 完全列が成立つ とくに Gysin map

$$H^2(\mathcal{M}_{g,1}) \underset{\text{inj}}{\xrightarrow{\pi^*}} H^2(\mathcal{M}_{g,1}^1) \xrightarrow{\pi_\sharp} H^1(\mathcal{M}_{g,1}; H) \xrightarrow{d_2} H^3(\mathcal{M}_{g,1}) \underset{\text{inj}}{\xrightarrow{\pi^*}} H^3(\mathcal{M}_{g,1}^1)$$

$H^2(\mathcal{M}_{g,1}^1) = \mathbb{Z}e \oplus \pi^* H^2(\mathcal{M}_{g,1})$, $d_2 = 0$

ゆえに

$$H^1(\mathcal{M}_{g,1}; H) = \mathbb{Z}(\pi_\sharp e) \cong \mathbb{Z}$$

がわかる. もう少しがんばると $\pi_\sharp e = m_{1,1}$ も証明できる //

この議論を精密化すると次がえられる

<u>定理</u> (Looijenga; K.-森田)

$* \ll g$ のとき

$$H^*(\mathcal{M}_{g,*}; \Lambda^* H \otimes \mathbb{Q}) = H^*(\mathcal{M}_{g,*}; \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}[m_{i,j};\ j \geq 1]$$

Madsen-Weiss の定理とくみあわせると

$$H^*(\mathcal{M}_{g,*}; \Lambda^* H \otimes \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[e, m_{i,j};\ i,j \geq 0,\ i+j \geq 2] \quad (* \ll g)$$

となる.

o. Date . .

(§6. 写像類群への応用 (つづき))

今日やること・Euler類 $e \in H^2(\mathcal{M}_{g,*};\mathbb{Z})$ を使って

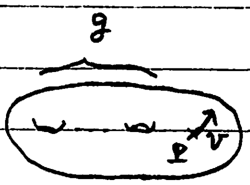
M : $\mathbb{Z}[\frac{1}{2-2g}][\mathcal{M}_g]$-module について LHS s.s. から直和分解

$$H^*(\mathcal{M}_{g,*};M) = H^*(\mathcal{M}_g;M) \oplus H^{*-1}(\mathcal{M}_g;H\otimes M) \oplus H^{*-2}(\mathcal{M}_g;M)$$

が導かれることを示す

- $m_{1,1} \in H^1(\mathcal{M}_{g,*};H)$ を使って直和分解を具体的に記述する
- 応用を少しだけ

$g \geqq 2$

$\Sigma_g =$ 

$p \in \Sigma_g$, $0 \neq v \in T_p\Sigma_g$

$\pi_1 = \pi_1(\Sigma_g, p)$

$\mathcal{M}_g = \{f : \Sigma_g \to \Sigma_g$ ori. pres. diffeo$\}$ / isotopy

$\mathcal{M}_{g,*} = \{f : \Sigma_g \to \Sigma_g$ 〃, $f(p) = p\}$ / pを保つisotopy

$\mathcal{M}_{g,1} = \{f : \Sigma_g \to \Sigma_g$ 〃, $f(p) = p$, $(df)_p(v) = v\}$ / pとvを保つisotopy

forgetful exact sequence (Birman exact sequence)

$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{M}_{g,1} \xrightarrow{\varpi} \mathcal{M}_{g,*} \to 1$ central extension

$1 \to \pi_1 \xrightarrow{\iota} \mathcal{M}_{g,*} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}_g \to 1$

$e = \mathrm{Euler}(\mathbb{Z} \to \mathcal{M}_{g,1} \xrightarrow{\varpi} \mathcal{M}_{g,*}) \in H^2(\mathcal{M}_{g,*};\mathbb{Z})$

$\pi_! e = \langle e(T\Sigma_g), [\Sigma_g] \rangle = 2-2g$ (∵ Poincaré-Hopf)

$A = \mathbb{Z}[\frac{1}{2-2g}]$ これは P.I.D. である

$e' := \frac{1}{2-2g} e$, $e'' := e' - \pi^*\pi_!(e'^2) = \frac{1}{2-2g} e - \frac{1}{(2-2g)^2} \pi^* e_1 \in H^*(\mathcal{M}_{g,*};A)$

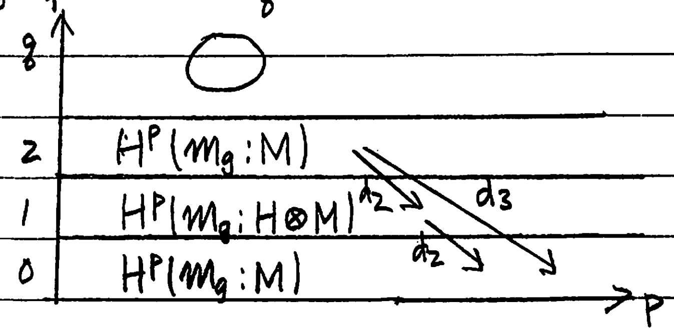
$\pi_! e' = \pi_! e'' = 1$

$H = H_A = H_1(\Sigma_g;A) \overset{P.d.}{=} H^1(\Sigma_g;A)$

M : $A[\mathcal{M}_g]$-module とする

(つまり $\mathcal{M}_g$-module であって $2-2g$ が M で invertible である)

forgetful exact sequence の LHS s.s. を書くと.



補題 6.7 (森田)

(1) $\forall r \geq 2 \quad d_r = 0$.

とくに $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ である. (これを「s.s. は collapse している」という)

(2) 次の直和分解が成立つ

$$H^*(\mathcal{M}_{g,*};M) = H^*(\mathcal{M}_g;M) \oplus H^{*-1}(\mathcal{M}_g;H\otimes M) \oplus H^{*-2}(\mathcal{M}_g;M)$$

証明 (1) $d_2^{p,2}=0,\ d_3^{p,2}=0,\ d_2^{p,1}=0$ を示せばよい

$\forall v \in H^*(\mathcal{M}_g;M)$ について

$$\begin{aligned}\pi_!(e'\pi^*v) &= (\pi_!e')v \\ &= v\end{aligned}$$

(∵ LHS s.s. は cup 積と compatible. ファイバー積分と考えれば明らか)

そこで

$\psi: H^{*-2}(\mathcal{M}_g;M) \to H^*(\mathcal{M}_{g,*};M) \quad v \mapsto e'\pi^*v$

$\varphi: H^*(\mathcal{M}_{g,*};M) \to H^*(\mathcal{M}_g;M) \quad u \mapsto \pi_!(e'u)$

と定めると

$\pi_!\psi(v) = \pi_!(e'\pi^*v) = v$

$\varphi\pi^*(v) = \pi_!(e'\pi^*v) = v$

だから とくに

$\pi_!: H^p(\mathcal{M}_{g,*};M) \to H^{p-2}(\mathcal{M}_g;M)$ 全射

$\pi^*: H^p(\mathcal{M}_g;M) \to H^p(\mathcal{M}_{g,*};M)$ 単射

$\pi_!: H^p(\mathcal{M}_{g,*};M) \twoheadrightarrow E_\infty^{p-2,2} \subset E_2^{p-2,2} = H^{p-2}(\mathcal{M}_g;M)$

これが全射ということは $E_\infty^{p-2,2} = \underset{\substack{\| \\ \operatorname{Ker} d_3^{p-2,2}}}{E_4^{p-2,2}} = \underset{\substack{\| \\ \operatorname{Ker} d_2^{p-2,2}}}{E_3^{p-2,2}} = E_2^{p-2,2}$

つまり $d_2^{p-2,2} = d_3^{p-2,2} = 0$

$$\pi^*: H^p(\mathcal{M}_g; M) = E_2^{p,0} \twoheadrightarrow E_\infty^{p,0} \subset H^p(\mathcal{M}_{g,*}; M)$$

これが単射ということは $E_2^{p,0} = E_3^{p,0} = E_\infty^{p,0}$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ E_2^{p,0}/\mathrm{Im}\, d_2^{p-2,1} \end{array}$$ つまり $d_2^{p-2,1} = 0$ //(1)

(2) くわしくみると

$$0 \to \mathrm{Ker}\,\pi_! \to H^p(\mathcal{M}_{g,*}; M) \underset{\varphi}{\overset{\pi_!}{\rightleftarrows}} H^{p-2}(\mathcal{M}_g; M) \to 0$$

ゆえに

$$H^p(\mathcal{M}_{g,*}; M) = \mathrm{Ker}\,\pi_! \oplus H^{p-2}(\mathcal{M}_g; M)$$

他方 $\mathrm{Ker}\,\pi_! = F_{p-1} H^p(\mathcal{M}_{g,*}; M)$ だから

$$\pi_\#: \mathrm{Ker}\,\pi_! = F_{p-1}H^p \twoheadrightarrow F_{p-1}H^p/F_pH^p = E_\infty^{p-1,1} = E_2^{p-1,1} = H^{p-1}(\mathcal{M}_g; H\otimes M)$$

が定義できる. $F_pH^p = E_\infty^{p,0} = H^p(\mathcal{M}_g; M)$ だから

$$0 \to H^p(\mathcal{M}_g; M) \underset{\varphi}{\overset{\pi^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Ker}\,\pi_! \xrightarrow{\pi_\#} H^{p-1}(\mathcal{M}_g; H\otimes M) \to 0$$

ゆえに

$$\mathrm{Ker}\,\pi_! = H^p(\mathcal{M}_g; M) \oplus H^{p-1}(\mathcal{M}_g; H\otimes M)$$

$$\mathrm{Ker}\,\pi_! \cap \mathrm{Ker}\,\varphi \overset{\pi_\#}{\cong} H^{p-1}(\mathcal{M}_g; H\otimes M)$$ //(2)//

この直和分解をくわしくみる.

$$k := m_{1,1} \in H^1(\mathcal{M}_{g,*}; H_A) \cong A \quad (\text{Th}6.5, 森田)$$

$$\omega_0 := \sum A_i \otimes B_i - B_i \otimes A_i \in H_{\mathbb{Z}}^{\otimes 2}.$$

(但, $\{A_i, B_i\} \subset H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ 基底
$A_i \cdot A_j = B_i \cdot B_j = 0, \quad A_i \cdot B_j = -B_i \cdot A_j = \delta_{ij}$)

とおく

補題 6.7 を H_A に適用

$$\begin{array}{c} H^1(\mathcal{M}_{g,*}; H_A) \\ \wr\parallel \\ A \end{array} = \begin{array}{c} \underbrace{H^0(\mathcal{M}_g; H_A\otimes H_A)} \\ \parallel \\ A\,\omega_0 \cong A \end{array} \oplus H^1(\mathcal{M}_g; H_A)$$

ゆえに $H^1(\mathcal{M}_g; H_A) = 0$ (実は $H_1(\mathcal{M}_g; H_{\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}/2-2g$ (森田))

(∵ A: P.I.D.)

とくに

$$\pi_!(e'k) = \pi_!(e''k) = 0 \in H^1(\mathcal{M}_g; H_A) = 0$$

o. Date . .

$$k' := \frac{1}{2g-2} k \in H^1(\mathcal{M}_g ; H_A) \qquad k'|_{\pi_1} = 1_H \quad (\text{Lem } 6.4)$$

contraction map

$$C = C_M : H_A \otimes H_A \otimes M \longrightarrow M$$

$$X \otimes Y \otimes m \longmapsto (X \cdot Y) m \qquad (X\cdot Y = X \text{と} Y \text{の交叉数})$$

$$\mathcal{E} : H^{p-1}(\mathcal{M}_g ; H_A \otimes M) \to H^p(\mathcal{M}_{g,*} ; M)$$

$$v \longmapsto \mathcal{E}(v) := C_*(k' \otimes \pi^* v)$$

$\mathrm{Image}\, \mathcal{E} \subset \mathrm{Ker}\, \pi_! \quad (\because\ \pi_! k' = 0)$

$\mathrm{Image}\, \mathcal{E} \subset \mathrm{Ker}\, \pi_! \cap \mathrm{Ker}\, \varphi \quad (\because\ \pi_!(e'k') = 0)$

補題 6.8.

(1) $\mathcal{E} : H^{p-1}(\mathcal{M}_g ; H_A \otimes M) \to \mathrm{Ker}\, \pi_! \cap \mathrm{Ker}\, \varphi \ (\subset H^p(\mathcal{M}_{g,*} ; M))$

は $\pi_\#$ の逆写像である.

(2) $\forall u \in H^*(\mathcal{M}_{g,*} : M)$

$$u = e'' \pi^* \pi_!(u) - C_*(k' \otimes \pi^* \pi_!(k' \otimes u)) + \pi^* \pi_!(e'u)$$

証明 (1)

Poincaré duality : $-\omega_0 \in H^{\otimes 2} \mapsto 1_H \in H^1(\pi_1 ; H) = \mathrm{Hom}(H, H)$

$\left((\because)\ \forall X \in H,\ C_H(X \otimes \omega_0) = \sum (X \cdot A_i) B_i - (X \cdot B_i) A_i = -X \ /\!/ \right)$

$H^1(\mathcal{M}_{g,*} ; H_A) = \mathrm{Ker}\, \pi_!$

$$\pi_\# = \iota^* : H^1(\mathcal{M}_{g,*} ; H_A) \to H^0(\mathcal{M}_g ; H_A \otimes H_A) \subset H_A \otimes H_A = H^1(\pi_1 ; H_A)$$

$$k' \longmapsto \qquad \underset{-\omega_0}{\rotatebox{90}{$\in$}} \longleftarrow\!\!\!\shortmid \ 1_H$$

ゆえに $\pi_\# k' = -\omega_0$

$\forall v \in H^{p-1}(\mathcal{M}_g ; H_A \otimes M)$

$$\pi_\# \mathcal{E} v = \pi_\# C_*(k' \otimes \pi^* v) = (1 \otimes C_M)_*(\pi_\# k' \otimes v)$$

$$= -(1 \otimes C_M)_*(\omega_0 \otimes v) = v$$

$(\because)\ \forall X \in H,\ \forall m \in M$

$$(1_H \otimes C_M)\left(\left(\sum A_i \otimes B_i - B_i \otimes A_i \right) \otimes X \otimes m \right)$$

$$= \sum A_i \otimes (B_i \cdot X) m - \sum B_i \otimes (A_i \cdot X) m = -X \otimes m \ /\!/$$

$\pi_\#$ は同型だから $\mathcal{E} = (\pi_\#)^{-1}$

(2) $\forall u \in H^*(\mathcal{M}_{g,*}; M)$

$\exists ! u_0 \in H^*(\mathcal{M}_g; M)$, $\exists ! u_1 \in H^{*-1}(\mathcal{M}_g; H\otimes M)$, $\exists ! u_2 \in H^{*-2}(\mathcal{M}_g; M)$

$u = e'' \pi^* u_2 + C_*(k' \otimes \pi^* u_1) + \pi^* u_0$

(e'とe''のズレはu_0が吸収する)

$\pi_! u = u_2$ (∵ $\pi_! k' = 0$)

$$\pi_!(e'u) = \pi_!(e'e'')u_2 + \pi_!(e' C_*(k' \otimes \pi^* u_1)) + u_0$$
$$= u_0$$

$\left[\begin{array}{l} ∵\ \pi_!(e'e'') = \pi_!(e'(e' - \pi^*\pi_!(e')^2)) = \pi_!(e')^2 - \pi_!(e')^2 = 0 \\ \pi_!(e'k') = 0 \end{array}\right.$ //

$$\pi_!(k' \otimes u) = \underbrace{(\pi_! k'e'')}_{=0} u_2 + \pi_!(k' \otimes C_*(k' \otimes \pi^* u_1)) + \underbrace{(\pi_! k')}_{=0} u_0$$

$$= \pi_!(k' \otimes C_*(k' \otimes \pi^* u_1)) = (1 \otimes C)_* \pi_!(k' \otimes k') u_1$$

$= (1\otimes C)_* \omega_0 u_1$ (∵ Lem 6.2)

$= -u_1$ (∵ (1)での計算) //

$$\overline{\mathcal{M}_{g,*}} := \mathcal{M}_{g,*} \times_{\mathcal{M}_g} \mathcal{M}_{g,*} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}_{g,*}$$
$$(\varphi, \psi) \longmapsto \varphi$$

についても同様のことが成立つ

$s: \mathcal{M}_{g,*} \to \overline{\mathcal{M}_{g,*}}$ $\varphi \mapsto (\varphi, \varphi)$ the diagonal map

$m_{1,1}$の代わりに $k_0 \in H^1(\overline{\mathcal{M}_{g,*}}; H)$ "Thom class"

eの代わりに $\nu \in H^2(\overline{\mathcal{M}_{g,*}}; \mathbb{Z})$ 「対角集合」$s(\mathcal{M}_{g,*})$のPoincaré dual

を使う. $\pi_! \nu = 1$, $k_0|_{\pi_1} = 1_H$ (⟹ こんどは $\mathbb{Z}$ 上で成立つ)

$$\nu' := \nu - \pi^*\pi_!(\nu^2) \underset{実は}{=} \nu - \pi^* e$$

定理6.9. M: $\mathbb{Z}[\mathcal{M}_{g,*}]$-module について canonical な直和分解

$$H^*(\overline{\mathcal{M}_{g,*}}; M) = H^*(\mathcal{M}_{g,*}; M) \oplus H^{*-1}(\mathcal{M}_{g,*}; H\otimes M) \oplus H^{*-2}(\mathcal{M}_{g,*}; M)$$

が成立つ. 具体的には $\forall u \in H^*(\overline{\mathcal{M}_{g,*}}; M)$ について次が成立つ

$$u = \nu' \pi^* \pi_! u - C_*(k_0 \otimes \pi^* \pi_!(k_0 \otimes u)) + \pi^* s^* u.$$

o. Date . .

こんなことをして何がうれしいのか？ ⇒ twisted MM class の縮約公式

$C_{\mathbb{Z}} = C : H \otimes H \to \mathbb{Z}$ 交叉数について

定理 6.10 (森田)

$$C_*(k_0^{\otimes 2}) = 2\nu - \pi^* e - \bar{\pi}^* e \qquad \left(\begin{array}{c} \bar{\pi} : \overline{\mathcal{M}_{g,*}} \to \mathcal{M}_{g,*} \\ (\varphi,\psi) \mapsto \psi \end{array} \right)$$

$C_j : \Lambda^j H \to \Lambda^{j-2} H$

$$C_j(X_1 \wedge \cdots \wedge X_j) := \sum_{a<b} (-1)^{a+b-1} (X_a \cdot X_b) X_1 \wedge \overset{\hat{a}}{\cdots} \overset{\hat{b}}{} \wedge X_j \qquad (X_i \in H)$$

$$C_{j*}(m_{i,j}) = \begin{cases} 0 & \text{if } j \leq 1 \\ 2g & \text{if } (i,j) = (0,2) \\ -\frac{1}{2} j(j-1) m_{i+1, j-2} + e(\text{lower terms}) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

2つの $m_{i,j}$, $m_{i',j'}$ については

定理 6.11 (Contraction Formula)

M_α : $\mathcal{M}_{g,*}$-module $u_\alpha \in H^*(\overline{\mathcal{M}_{g,*}} ; M_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$

$$(1_{M_1} \otimes C_{M_2})_* (\pi_!(u_1 \otimes k_0)\, \pi_!(k_0 \otimes u_2)) = \pi_!(u_1 u_2) + (s^* u_1)(\pi_! u_2) + (\pi_! u_1)(s^* u_2) - e(\pi_! u_1)(\pi_! u_2)$$

⇑

定理6.9を使って計算する

$C_{j,j'} : \Lambda^j H \otimes \Lambda^{j'} H \to \Lambda^{j+j'-2} H$

$$C_{j,j'}(X_1 \wedge \cdots \wedge X_j \otimes Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_{j'}) := \sum_{a=1}^{j} \sum_{b=1}^{j'} (-1)^{a+b+j-1} X_1 \wedge \overset{\hat{a}}{\cdots} \wedge X_j \wedge Y_1 \wedge \overset{\hat{b}}{\cdots} \wedge Y_{j'}$$

$$C_{j,j'*}(m_{i,j}\, m_{i',j'}) = -jj' m_{i+i', j+j'-2} + e(\text{lower terms}) \qquad (X_a, Y_b \in H)$$

とくに 0でないconst倍をのぞいてひとしい

$$C_{3,3*}(m_{0,3}\, m_{0,3}) \doteq m_{0,4} + \text{lower terms}$$

$$C_{3,j*}(m_{0,3}, m_{0,j}) \doteq m_{0,j+1} + \text{lower terms}$$

逆にみると

$$m_{0,j} \doteq \text{Contraction of } (m_{0,3})^j + \text{lower terms}$$

$$m_{i,j} \doteq \text{Contraction of } m_{0,2i+j} + \text{lower terms}$$

つまり、

すべての $m_{i,j}$ は $m_{0,3}$ と e で表わされる。

とくに MM class $e_i := m_{i+1,0}$ も $m_{0,3}$ で表わされる

実は e も $m_{0,3}$ で表わされる

逆に $m_{0,3}$ で表わされる $\mathcal{M}_{g,*}$ の自明係数 cohomology 類は

e と e_i たちの多項式に限られる。（$\Leftarrow$ Contraction Formula）

$\tilde{k} := \frac{1}{6} m_{0,3} = \pi_!(k_0^{\otimes 3}) \in H^1(\mathcal{M}_{g,*}; \Lambda^3 H)$ 拡大 Johnson 準同型

定理 6.12.（森田-K.）

$\left\{ \begin{array}{l} \text{拡大 Johnson 準同型 } \tilde{k} \text{ から} \\ \text{作られる自明係数 cohomology 類} \end{array} \right\} = \mathbb{Q}[e, e_i ; i \geq 1] \subset H^*(\mathcal{M}_{g,*}; \mathbb{Q})$

- Madsen-Weiss よりも前の結果
- 安定域の外でも成立つことがミソ

lo. Date . .