第14回, 20年8月12日

§14. Weil-Petersson Kähler形式

今日やること Goldmanのやり方で $d\omega_{WP}=0$ を示す
$\Leftarrow$ 主G束の接続の空間をつかう

$G = PSL_2(\mathbb{R})$ または一般のLie群
$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) = T_I G$ ($\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{R})$ for $G = PSL_2(\mathbb{R})$)
$\Sigma = \Sigma_g$ または一般の C^∞ mfd

準備 $U \overset{\text{open}}{\subset} \Sigma$, $g: U \to G$, $p \mapsto g(p)$, C^∞ map
$g^{-1}(dg), (dg)g^{-1} \in \Omega^1(U) \otimes \mathfrak{g}$ が次のように定義される

$$(g^{-1}(dg))(\dot{c}(0)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(c(0))^{-1} g(c(t)) \in T_I G = \mathfrak{g}$$

$$((dg)g^{-1})(\dot{c}(0)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(c(t))\, g(c(0))^{-1} \in T_I G = \mathfrak{g}$$

但, $c:]-\varepsilon, +\varepsilon[\to U$, C^∞ map, $0 < \varepsilon << 1$

このとき次が成立つ

(1) $0 = d(g^{-1}g) = (dg^{-1})g + g^{-1}(dg)$
$\quad 0 = d(gg^{-1}) = (dg)g^{-1} + g(dg^{-1})$

また $\theta, \varphi \in \Omega^*(U; \mathfrak{g}) = \Omega^*(U) \otimes \mathfrak{g}$
$\theta = \sum_i \theta_i \otimes v_i$, $\varphi = \sum_j \varphi_j \otimes w_j$, $\theta_i, \varphi_j \in \Omega^*(U)$, $v_i, w_j \in \mathfrak{g}$, について

$$[\theta \wedge \varphi] := \sum_{i,j} \theta_i \wedge \varphi_j \otimes [v_i, w_j] \in \Omega^*(U; \mathfrak{g})$$

と定める. 次が成立つ

(2) $[(\mathrm{Ad}_g \theta) \wedge (\mathrm{Ad}_g \varphi)] = \mathrm{Ad}_g([\theta \wedge \varphi])$

(∵ $\overset{\|}{\sum} \theta_i \wedge \varphi_j \otimes [\mathrm{Ad}_g v_i, \mathrm{Ad}_g w_j] = \overset{\|}{\sum} \theta_i \wedge \varphi_j \otimes \mathrm{Ad}_g[v_i, w_j]$)

$\deg \theta$: odd のとき

(3) $[\theta \wedge [\theta \wedge \varphi]] = \frac{1}{2}[[\theta \wedge \theta] \wedge \varphi]$

∵) $2[\theta\wedge[\theta\wedge\varphi]]$

$= \sum_{k,i,j} \theta_k\wedge\theta_i\wedge\varphi_j \otimes [v_k,[v_i,w_j]] + \theta_i\wedge\theta_k\wedge\varphi_j \otimes [v_i,[v_k,w_j]]$ (いれかえ)

$= \sum_{k,i,j} \theta_k\wedge\theta_i\wedge\varphi_j \otimes ([v_k,[v_i,w_j]] - [v_i,[v_k,w_j]])$

$\overset{\text{Jacobi}}{=} \sum_{k,i,j} \theta_k\wedge\theta_i\wedge\theta_j \otimes [[v_k,v_i],w_j] = [[\theta\wedge\theta]\wedge\varphi]$ //

$\theta\in\Omega^k(U;\mathfrak{g})$ (k:偶奇とも可) $g:U\to G$ C^∞map

(4) $d(Ad_g(\theta)) = [(dg)g^{-1}\wedge Ad_g\theta] + Ad_g(d\theta)$

∵) $d(Ad_g(\theta)) = d(g\theta g^{-1}) = (dg)g^{-1}g\theta g^{-1} + g(d\theta)g^{-1} + (-1)^k g\theta g^{-1}g(dg^{-1})$

$\overset{(1)}{=} (dg)g^{-1}Ad_g\theta + Ad_g(d\theta) - (-1)^k(Ad_g\theta)(dg)g^{-1}$

$= [(dg)g^{-1}\wedge Ad_g\theta] + Ad_g(d\theta)$ //

主G束の復習 $p: E\to\Sigma$ 主G束

$\exists\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$: Σの開被覆, $\exists\Phi_\alpha: U_\alpha\times G \xrightarrow{\cong} p^{-1}(U_\alpha)$ 局所自明化

$\Phi_\alpha^{-1}\Phi_\beta(p,I) = (p, g_{\alpha\beta}(p)) \in (U_\alpha\cap U_\beta)\times G$ $(p\in U_\alpha\cap U_\beta)$

$g_{\alpha\beta}: U_\alpha\cap U_\beta \to G$ C^∞map (transition function)

$g_{\alpha\alpha}(p) = I$ $(\forall p\in U_\alpha)$

$g_{\beta\alpha}(p) = g_{\alpha\beta}(p)^{-1}$ $(\forall p\in U_\alpha\cap U_\beta)$

$g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p)$ $(\forall p\in U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma)$

$\Phi_\beta(p,1) = \Phi_\alpha(p,1)g_{\alpha\beta}(p)$ $(\forall p\in U_\alpha\cap U_\beta)$

定義 $A = \{A_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $A_\alpha\in\Omega^1(U_\alpha;\mathfrak{g})$ が Eの接続(connection)である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\alpha,\forall\beta\in A$ $A_\alpha = -(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} + A_{g_{\alpha\beta}}(A_\beta)$ on $U_\alpha\cap U_\beta$

$A' = \{A'_\alpha\}_{\alpha\in A}$: 別の接続について

(5) $A' - A = (A'_\alpha - A_\alpha)_{\alpha\in A} \in\Omega^1(\Sigma;\mathrm{ad}E)$

∵) $A'_\alpha - A_\alpha = -(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} + (dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} + Ad_{g_{\alpha\beta}}(A'_\beta) - Ad_{g_{\alpha\beta}}(A_\beta)$

$= Ad_{g_{\alpha\beta}}(A'_\beta - A_\beta)$ //

$f \in C^\infty(\Sigma)$ 実数値関数について

$fA' + (1-f)A = \{fA'_\alpha + (1-f)A_\alpha\}$ も接続になる

∵) $fA'_\alpha + (1-f)A_\alpha = A_\alpha + f(A'_\alpha - A_\alpha)$

$\overset{(5)}{=} -(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} + Ad_{g_{\alpha\beta}}(A_\beta) + f Ad_{g_{\alpha\beta}}(A'_\beta - A_\beta)$

$= -(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} + Ad_{g_{\alpha\beta}}(fA'_\beta + (1-f)A_\beta)$ //

このことと1の分割をつかうと接続の存在が示される

$\mathcal{A}(E) := \{E\text{の接続}\}$

(5)により $\forall A \in \mathcal{A}(E)$

(6) … $\Omega^1(\Sigma ; adE) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(E)$, $\theta \mapsto A + \theta$

となっている。したがって $T_A\mathcal{A}(E) = \Omega^1(\Sigma ; adE)$ である

とくに $G = PSL_2(\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, $\Sigma = \Sigma_g$ のとき $\mathcal{A}(E)$ 上の2-微分形式 ω を

$A \in \mathcal{A}(E)$, $\theta, \varphi \in \Omega^1(\Sigma ; adE) = T_A\mathcal{A}(E)$ について

$\omega_A(\theta, \varphi) := \int_\Sigma B(\theta \wedge \varphi)$

と定める 右辺は $A \in \mathcal{A}(E)$ によらないから

(7) … $d\omega = 0$ on $\mathcal{A}(E)$

が成立つ

共変外微分と曲率 $A \in \mathcal{A}(E)$, $k \geq 0$

$d^A : \Omega^k(\Sigma ; adE) \to \Omega^{k+1}(\Sigma ; adE)$ 共変外微分

を $\theta = \{\theta_\alpha\}_{\alpha \in A} \in \Omega^k(\Sigma ; adE)$ について

$(d^A\theta)_\alpha := d\theta_\alpha + [A_\alpha \wedge \theta_\alpha]$

と定めると $d^A\theta = \{(d^A\theta)_\alpha\}_{\alpha \in A} \in \Omega^{k+1}(\Sigma ; adE)$ である

∵) $\theta_\alpha = Ad_{g_{\alpha\beta}}\theta_\beta$

$d\theta_\alpha = d(Ad_{g_{\alpha\beta}}\theta_\beta) \overset{(4)}{=} [(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} \wedge Ad_{g_{\alpha\beta}}\theta_\beta] + Ad_{g_{\alpha\beta}}(d\theta_\beta)$

$$[A_\alpha \wedge \theta_\alpha] = -[(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} \wedge Ad_{g_{\alpha\beta}}\theta_\beta] + [Ad_{g_{\alpha\beta}}(A_\beta), \theta_\alpha]$$
$$= -[(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} \wedge Ad_{g_{\alpha\beta}}\theta_\beta] + Ad_{g_{\alpha\beta}}[A_\beta \wedge \theta_\beta]$$

ゆえに

$$(d^A\theta)_\alpha = Ad_{g_{\alpha\beta}}(d\theta_\beta + [A_\beta \wedge \theta_\beta]) = Ad_{g_{\alpha\beta}}((d^A\theta)_\beta) \quad //$$

一般には $d^A d^A \neq 0$ である

$$(d^A d^A\theta)_\alpha = d^A(d^A\theta)_\alpha = d(d^A\theta)_\alpha + [A_\alpha \wedge (d^A\theta)_\alpha]$$
$$= d(d\theta_\alpha + [A_\alpha \wedge \theta_\alpha]) + [A_\alpha \wedge d\theta_\alpha] + [A_\alpha \wedge [A_\alpha \wedge \theta_\alpha]]$$
$$\overset{(3)}{=} 0 + d[A_\alpha \wedge \theta_\alpha] + [A_\alpha \wedge d\theta_\alpha] + \frac{1}{2}[[A_\alpha \wedge A_\alpha] \wedge \theta_\alpha]$$
$$= [dA_\alpha \wedge \theta_\alpha] + \frac{1}{2}[[A_\alpha \wedge A_\alpha] \wedge \theta_\alpha]$$
$$= [\underbrace{dA_\alpha + \tfrac{1}{2}[A_\alpha \wedge A_\alpha]}_{=:\,F(A)_\alpha} \wedge \theta_\alpha]$$

これは 0 とは限らない。

$F(A) = \{F(A)_\alpha\}_{\alpha \in A} \in \Omega^2(\Sigma ; \mathrm{ad}E)$. A の曲率

$$(\because)\ F(A)_\alpha = dA_\alpha + \frac{1}{2}[A_\alpha \wedge A_\alpha]$$
$$= -d(d(g_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1}) + d\,Ad_{g_{\alpha\beta}}(A_\beta)$$
$$+ \frac{1}{2}[(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} \wedge (dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1}] - [(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} \wedge Ad_{g_{\alpha\beta}}(A_\beta)]$$
$$+ \frac{1}{2}[Ad_{g_{\alpha\beta}}(A_\beta), Ad_{g_{\alpha\beta}}(A_\beta)]$$
$$\overset{(4)}{=} -(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1}(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} + [(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} \wedge Ad_{g_{\alpha\beta}}(A_\beta)] + Ad_{g_{\alpha\beta}}(dA_\beta)$$
$$+ \frac{1}{2}[(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} \wedge (dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1}] - [(dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} \wedge Ad_{g_{\alpha\beta}}(A_\beta)] + Ad_{g_{\alpha\beta}}(\tfrac{1}{2}[A_\beta \wedge A_\beta])$$
$$= Ad_{g_{\alpha\beta}}(dA_\beta + \tfrac{1}{2}[A_\beta, A_\beta]) = Ad_{g_{\alpha\beta}}(F(A)_\beta) \quad //$$

<u>定理 14.1</u> 接続 A について次は同値である。このとき A を <u>平坦接続</u> (flat connection) とよぶ

(a) $F(A) = 0$

(b) Σ の開被覆 $\{O_\lambda\}$ と E の局所自明化

$$\Phi_\lambda : O_\lambda \times G \cong p^{-1}(O_\lambda) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

をとり直すと 接続 $A = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は $\forall \lambda \in \Lambda$, $A_\lambda = 0$ である また

$\Phi_\mu(p, 1) = \Phi_\lambda(p, 1)\, g_{\lambda\mu}(p)$ によって $g_{\lambda\mu} : O_\lambda \cap O_\mu \to G$ を定めると

$dg_{\lambda\mu} = 0$ つまり $g_{\lambda\mu} : O_\lambda \cap O_\mu \to G$ は局所定数である

定理の証明の準備として次を示す

<u>補題14.2.</u> $V \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$, $\theta \in \Omega^1(V;\mathfrak{g})$ について次は同値である

(a) $d\theta + \frac{1}{2}[\theta\wedge\theta] = 0$

(b) $\forall p_0 \in V$, $p_0 \in {}^\exists W \overset{\text{open}}{\subset} V$, ${}^\exists h: W \to G$ C^∞ map s.t. $\theta = h^{-1}dh$

<u>証明</u> <u>(b)⇒(a)</u> $d(h^{-1}dh) = (dh^{-1})h\,h^{-1}dh \overset{(*)}{=} -h^{-1}(dh)h^{-1}dh$

$= -\frac{1}{2}[h^{-1}dh \wedge h^{-1}dh]$

<u>(a)⇒(b)</u> $p_0 = 0$ としてよい

<u>Lie(G)での</u> [,] <u>の復習</u> $v \in \mathfrak{g} = T_I G$ について $\xi_v \in \mathrm{Vect}(G)$ を

$\xi_v(g) := gv \quad (g \in G)$

によって定義する。このとき $\forall v, \forall w \in \mathfrak{g}$

$\xi_{[v,w]} := [\xi_v, \xi_v]$

であった

$\mathbb{R}^m = \{(x_1,\cdots,x_m) ; x_i \in \mathbb{R}\}$ とする

$\theta = \sum_{i=1}^m (dx_i) \otimes \theta_i$, $\theta_i : V \to \mathfrak{g}$ C^∞ map

と表す。$T(U\times G) = TU \times TG$ に注意して

$$X_i := \frac{\partial}{\partial x_i} + \xi_{\theta_i} \in \mathrm{Vect}(U\times G), \quad 1 \le i \le m$$

と定める。

$$[X_i, X_j] = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} + \xi_{\theta_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} + \xi_{\theta_j}\right] = \xi_{\frac{\partial\theta_j}{\partial x_i}} - \xi_{\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}} + \xi_{[\theta_i,\theta_j]}$$

$$= \xi_{\left(\frac{\partial\theta_j}{\partial x_i} - \frac{\partial\theta_i}{\partial x_j} + [\theta_i,\theta_j]\right)}$$

である。ここで

$$d\theta = -\sum (dx_i \wedge dx_j) \otimes \frac{\partial\theta_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{2}\sum (dx_i\wedge dx_j)\otimes\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j} - \frac{\partial\theta_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\frac{1}{2}[\theta\wedge\theta] = \frac{1}{2}\sum dx_i \wedge dx_j \otimes [\theta_i, \theta_j]$$

だから 仮定 $d\theta + \frac{1}{2}[\theta\wedge\theta] = 0$ により $[X_i, X_j] = 0$ である

そこで $\mathrm{Exp}(x_i X_i)\,\mathrm{Exp}(x_j X_j) = \mathrm{Exp}(x_j X_j)\,\mathrm{Exp}(x_i X_i)$ である。そこで

$$(x_1,\cdots,x_m, h(x_1,\cdots,x_m)) = \mathrm{Exp}(x_1 X_1)\cdots\mathrm{Exp}(x_m X_m)(0, I)$$

によって $h(x_1,\cdots,x_m) \in G$ を定義すると $[X_i, X_j] = 0$ により

No. Date 20・08・12

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \xi_{\theta_i} \quad \text{つまり} \quad \frac{\partial h}{\partial x_i}(p) = h(p)\,\theta_i(p)$$

$\theta_i = h^{-1}\dfrac{\partial h}{\partial x_i}$, $\theta = h^{-1}dh$ となる // (a) ⇒ (b) // Lem 14.2

定理14.1の証明 (b) ⇒ (a) 明らか (a) ⇒ (b) Lem 14.2により $^\forall p_0 \in U_\alpha$ について $p_0 \in {}^\exists V_\lambda \overset{\text{open}}{\subset} U_\alpha$. $^\exists h_\lambda : V_\lambda \to G$ s.t. $A_\alpha = h_\lambda^{-1}(dh_\lambda)$ である. そこで
$\Phi_\lambda : V_\lambda \times G \to p^{-1}(V_\lambda)$ を

$$\Phi_\lambda(p, g) := \Phi_\alpha(p, h_\lambda(p)^{-1}g) \quad ((p,g) \in V_\lambda \times G)$$

によって定義すると.

$$A_\lambda = -(dh_\lambda)h_\lambda^{-1} + Ad_{h_\lambda}(A_\alpha) = -(dh_\lambda)h_\lambda^{-1} + h_\lambda h_\lambda^{-1}(dh_\lambda)h_\lambda^{-1} = 0$$

となる. また $V_\mu \subset U_\beta$, $h_\mu : V_\mu \to G$, $A_\beta = h_\mu^{-1}(dh_\mu)$ とする.

$$\Phi_\mu(p, 1) = \Phi_\beta(p, h_\mu(p)^{-1}) = \Phi_\beta(p,1)h_\mu(p)^{-1} = \Phi_\alpha(p,1)g_{\alpha\beta}(p)h_\mu(p)^{-1}$$
$$= \Phi_\lambda(p,1)h_\lambda(p)g_{\alpha\beta}(p)h_\mu(p)^{-1} \text{ だから}$$

$$g_{\lambda\mu} = h_\lambda g_{\alpha\beta} h_\mu^{-1}$$

である. しかるに, $A_\lambda = 0$, $A_\mu = 0$ だから

$$0 = A_\lambda = -(dg_{\lambda\mu})g_{\lambda\mu}^{-1} + Ad_{g_{\lambda\mu}}(A_\mu) = -(dg_{\lambda\mu})g_{\lambda\mu}^{-1} + 0$$

つまり $dg_{\lambda\mu} = 0$ である. // (a) ⇒ (b) // Thm 14.1.

$p : E \to \Sigma$ 主G束 A : 平坦接続 とする. ここから Σ は弧状連結とする. (一般の場合は, 各弧状連結成分で考える)

$\varpi : \tilde{\Sigma} \to \Sigma$ を普遍被覆空間とし, $\pi = \pi_1(\Sigma, *)$, $* \in \Sigma$
$\tilde{*} \in \varpi^{-1}(*) \subset \tilde{\Sigma}$ とする.

いま示したことから $^\exists\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$: Σ の開被覆 $^\exists\Phi_\lambda : O_\lambda \times G \overset{\cong}{\to} p^{-1}(O_\lambda)$ 局所自明化, $^\forall\lambda \in \Lambda$ $A_\lambda = 0$ である. このとき $g_{\lambda\mu} : O_\lambda \cap O_\mu \to G$ を $\Phi_\mu(p,1) = \Phi_\lambda(p,1)g_{\lambda\mu}(p)$ ($^\forall p \in O_\lambda \cap O_\mu$) によって定めると
$g_{\lambda\mu}$ は局所定数である. つまり $G^{discrete}$ を G に離散位相を入れたものとすると. $g_{\lambda\mu} : O_\lambda \cap O_\mu \to G^{discrete}$ C^∞ map とみなされる

$$E^{discrete} := \left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \times G^{discrete}\right)\Big/\sim \quad g_{\lambda\mu} \text{によってはりあわせる}$$

$$\begin{array}{c} E^{discrete} \\ \downarrow p \\ \Sigma \end{array} \text{ が定義できる}$$

$\wp : E^{discrete} \to \Sigma$ は連結性を仮定しない被覆空間だから
$\exists\, \sigma : \hat{\Sigma} \to E^{discrete}$ C^∞ map が存在する

$$\begin{tikzcd} \hat{\Sigma} \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\varpi"'] & \circlearrowleft & E^{discrete} \arrow[dl, "\wp"] \\ & \Sigma & \end{tikzcd}$$

写像 $\rho : \pi = \pi_1(\Sigma, *) \to G$ を $\forall \gamma \in \pi$ について $\sigma(\gamma \hat{*}) = \sigma(\hat{*}) \rho(\gamma)^{-1} \in \wp^{-1}(*)$
によって定義する このとき次が成立つ

$\forall z \in \hat{\Sigma}$ $\sigma(\gamma z) = \sigma(z) \rho(\gamma)^{-1}$

∵) $\exists\, \ell : [0,1] \to \tilde{\Sigma}$ path, s.t. $\ell(0) = \hat{*}$, $\ell(1) = z$.
$E^{discrete}$ の paths $\sigma(\gamma\ell)$ と $(\sigma\ell)\rho(\gamma)^{-1}$ をくらべる
$\wp\sigma(\gamma\ell) = \varpi(\gamma\ell) = \varpi\ell = \wp\sigma\ell = \wp((\sigma\circ\ell)\rho(\gamma)^{-1})$
$\sigma(\gamma\ell(0)) = \sigma(\gamma\hat{*}) = \sigma(\hat{*})\rho(\gamma)^{-1} = (\sigma\circ\ell)(0)\rho(\gamma)^{-1}$
および lift の一意性より $\sigma(\gamma\ell) = (\sigma\circ\ell)\rho(\gamma)^{-1}$ である ゆえに
$\sigma(\gamma z) = \sigma(\gamma\ell(1)) = (\sigma\circ\ell)(1)\rho(\gamma)^{-1} = \sigma(z)\rho(\gamma)^{-1}$ //

$\rho : \pi \to G$ 群準同型 つまり $\rho \in \mathrm{Hom}(\pi, G)$

∵) $\forall \gamma, \forall \delta \in \pi$. $\forall z \in \tilde{\Sigma}$
$\sigma(z)\rho(\gamma\delta)^{-1} = \sigma(\gamma\delta z) = \sigma(\delta z)\rho(\gamma)^{-1} = \sigma(z)\rho(\delta)^{-1}\rho(\gamma)^{-1}$
ゆえに $\rho(\gamma\delta) = \rho(\gamma)\rho(\delta)$ //

$E \cong E_\rho$ 主G束の同型

∵) $E_\rho = \pi \backslash (\hat{\Sigma} \times G)$
ここで $\gamma \in \pi$, $(z, P) \in \hat{\Sigma} \times G$, $\gamma(z, P) = (\gamma z, \rho(\gamma) P)$

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Sigma} \times G & \longrightarrow & E \\ (z, P) & \longmapsto & \sigma(z) P \\ \downarrow \gamma & & \| \\ (\gamma z, \rho(\gamma) P) & \longmapsto & \sigma(\gamma z)\rho(\gamma) P \end{array}$$

$\varpi : (z, P) \mapsto \varpi(z)$, $\wp : \sigma(z)P \mapsto \varpi(z)$

ゆえに $E_\rho = \pi \backslash (\hat{\Sigma} \times G) \to E$ が定義され、

$$\begin{tikzcd} E_\rho \arrow[rr] \arrow[dr] & \circlearrowleft & E \arrow[dl, "\wp"] \\ & \Sigma & \end{tikzcd}$$

つくり方から同型 //

$$\mathcal{A}(E)_{flat} := \{E \text{上の flat connection}\} = \{A \in \mathcal{A}(E) ; F(A) = 0\}$$

いまのやり方で $A \in \mathcal{A}(E)_{flat}$ について $\rho \in \mathrm{Hom}(\pi, G)$ がつくれるが ρ のとり方の ambiguity は G の共役作用だけある。かくして holonomy 写像

$$hol : \mathcal{A}(E)_{flat} \to \mathrm{Hom}(\pi, G)/G$$

がえられる。

$$T_{[\rho]}(\mathrm{Hom}(\pi, G)/G) = H^1(\pi ; \mathfrak{g}_{Ad\rho})$$

が成り立つ。また $A \in \mathcal{A}(E)_{flat}$ について $d^A \circ d^A = 0$ を思い出す

$hol(A) = [\rho]$, $\rho \in \mathrm{Hom}(\pi, G)$ とする。Lem 13.5 (2) より

$$\varpi^* : \Omega^*(\Sigma ; \mathrm{ad}\, E_\rho) \xrightarrow{\cong} \Omega^*(\tilde{\Sigma} ; \mathfrak{g}_{Ad\rho})^\pi$$

である

補題 14.3

(1) $T_A \mathcal{A}(E)_{flat} = \mathrm{Ker}(d^A : \Omega^1(\Sigma ; \mathrm{ad}\, E) \to \Omega^2(\Sigma ; \mathrm{ad}\, E))$

(2) Lem 13.5 (2) の同型の下で次の図式は可換である

$$\begin{tikzcd}
\Omega^k(\Sigma ; \mathrm{ad}\, E_\rho) \arrow[r, "\varpi^*", "\cong"'] \arrow[d, "d^A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Omega^k(\tilde{\Sigma} ; \mathfrak{g}_{Ad\rho})^\pi \arrow[d, "d"] \\
\Omega^{k+1}(\Sigma ; \mathrm{ad}\, E_\rho) \arrow[r, "\cong", "\varpi^*"'] & \Omega^{k+1}(\tilde{\Sigma} ; \mathfrak{g}_{Ad\rho})^\pi
\end{tikzcd}$$

証明 (1) $\theta \in \Omega^1(\Sigma ; \mathrm{ad}\, E) = T_A \mathcal{A}(E)$, $|t| \ll 1$ について

$$\begin{aligned}
&F(A + t\theta) - F(A) \\
&= d(A + t\theta) + \tfrac{1}{2}[(A + t\theta) \wedge (A + t\theta)] - dA - \tfrac{1}{2}[A \wedge A] \\
&= t(d\theta + \tfrac{1}{2}[A \wedge \theta] + \tfrac{1}{2}[\theta \wedge A]) + \tfrac{1}{2}t^2[\theta \wedge \theta] \\
&= t\, d^A \theta + O(t^2)
\end{aligned}$$

ゆえに $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} F(A + t\theta) = d^A \theta$

(2) 平坦接続 A からの $\rho \in \mathrm{Hom}(\pi, G)$ の構成を思い出す

Σ の開被覆 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と局所自明化 $\Phi_\lambda : O_\lambda \times G \xrightarrow{\cong} \delta^{-1}(O_\lambda)$ があって $\forall \lambda \in \Lambda$, $A_\lambda = 0$ であった

E_ρ の局所自明化 Φ_U は局所定数な G 作用(つまり $G^{discrete}$ 作用)を除き Φ_λ にひとしい。つまり Φ_U について $A_U=0$ である。ゆえに Lem 13.5(2) の同型 ϖ^* の下で $d^A=d$ である //

補題 14.4 $\forall A\in \mathcal{A}(E)_{flat}$ について

$$(d\,hol)_A\circ(\varpi^*)^{-1}=-per: \mathrm{Ker}(d:\Omega^1(\tilde{\Sigma};\mathfrak{g}_{Ad\rho})^\pi\to\Omega^2(\tilde{\Sigma};\mathfrak{g}_{Ad\rho})^\pi)\to H^1(\pi;\mathfrak{g}_{Ad\rho})$$

が成立つ

証明 $\theta\in\Omega^1(\tilde{\Sigma};\mathfrak{g}_{Ad\rho})^\pi$, $d\theta=0$ とする。$\exists f:\tilde{\Sigma}\to\mathfrak{g}$ C^∞ 函数 s.t. $\theta=df$

このとき

$$z_\theta(\gamma)=\int_{\tilde{*}}^{\gamma\tilde{*}}\theta=f(\gamma\tilde{*})-f(\tilde{*})\qquad(\forall\gamma\in\pi)$$

によって定まる z_θ について $per\,\theta=[z_\theta]\in H^1(\pi;\mathfrak{g}_{Ad\rho})$ である

$$hol(A+t\theta)=\rho_t\in \mathrm{Hom}(\pi,G),\ |t|\ll 1$$

とおく。

$$e^{-tf}de^{tf}=t\,df+O(t^2)=t\theta+O(t^2)$$

だから $h_t=e^{tf}+O(t^2)$ とおくと接続形式 $t\theta$ に対応する局所定数な自明化は

$$\Phi_t:\tilde{\Sigma}\times G\to\tilde{\Sigma}\times G,\ (z,P)\mapsto(z,h_t(z)^{-1}P)$$

で与えられる。対応して $\forall\gamma\in\pi$ について $\rho_t(\gamma)\in G$ は

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\Sigma}\times G \arrow[r, "\Phi_t"] \arrow[d, "\rho(\gamma)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \tilde{\Sigma}\times G \arrow[d, "\rho_t(\gamma)"] \\
\tilde{\Sigma}\times G \arrow[r, "\Phi_t"'] & \tilde{\Sigma}\times G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(z,P) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (z,h_t(z)^{-1}P) \arrow[d, mapsto] \\
(\gamma z,\rho(\gamma)P) \arrow[r, mapsto] & (\gamma z,h_t(\gamma z)^{-1}\rho(\gamma)P)
\end{tikzcd}$$

$(\gamma z,\rho_t(\gamma)h_t(z)^{-1}P)$

によって与えられるから

$$\rho_t(\gamma)=h_t(\gamma z)^{-1}\rho(\gamma)h_t(z)$$

となる。そこで

$$((d\,hol)_A(\theta))(\gamma)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\rho_t(\gamma)\rho(\gamma)^{-1}=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}h_t(\gamma\tilde{*})^{-1}\rho(\gamma)h_t(\tilde{*})\rho(\gamma)^{-1}$$

$$=-f(\gamma\tilde{*})+Ad_{\rho(\gamma)}f(\tilde{*})=-f(\gamma\tilde{*})+f(\tilde{*})+(df(\tilde{*}))(\gamma)$$

$$=(-z_\theta+df(\tilde{*}))(\gamma)$$

ゆえに

$$(d\,hol)_A(\theta) = [-z_\theta + df(\ast)] = -p_u(\theta) \in H^1(\pi; \mathfrak{g}_{Ad\rho})$$

これが示すべきことであった//

最後に $\Sigma = \Sigma_g$, $\rho \in R_g$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ とする. $A \in \mathcal{a}(E_\rho)$ を ρ に対応する平坦接続とする, Thm 13.3 (2) と Lem 14.4 より

$$(d\,hol)_A : T_A\, \mathcal{a}(E_\rho)_{flat} \to T_{[\rho]} T_g$$

は全射である. つまり hol は submersion である

いま

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{a}(E_\rho) \ni \omega\ \text{あり} & \\
 & T_g \\
\mathcal{a}(E_\rho)_{flat} \arrow[uu, hook, "\iota"] \arrow[r, "hol"] & \mathrm{Hom}(\pi, G)/G \arrow[u, phantom, "\cap\ open"]
\end{tikzcd}$$

において

$$hol^* \omega_{WP} = \iota^* \omega$$

である. 他方 $d\omega = 0$ より

$$hol^* d\omega_{WP} = \iota^* d\omega = 0$$

である. いま hol は T_g 上 submersion だから次がわかる

定理 14.5 (Ahlfors)

$$d\omega_{WP} = 0 \quad \text{on } T_g$$

以上の証明は Goldman によるものであった

Fenchel-Nielsen 座標 $\{l_i, \theta_i\}_{i=1}^{3g-3}$ との関係

定理 14.6 (Wolpert)

$$\omega_{WP} = \sum_{i=1}^{3g-3} d\theta_i \wedge dl_i$$

証明はたとえば 今吉-谷口 ch. 8 //