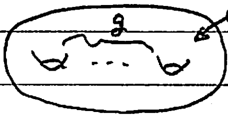
第13回. 20年8月5日.

§13. Weil-Petersson 計量

$g \geq 2$ $\quad \Sigma_g =$  $\quad * \in \Sigma_g$

表面だけ

$R_g = \{\rho : \pi_1(\Sigma_g, *) \to PSL_2(\mathbb{R})\ ;$ 単射群準同型, $\mathrm{Im}\,\rho \subset PSL_2(\mathbb{R})$ discrete $\}$

$T_g = R_g / \widehat{PSL_2(\mathbb{R})}$: Teichmüller 空間.

但. $\widehat{PSL_2(\mathbb{R})} = PSL_2(\mathbb{R}) \amalg (PSL_2(\mathbb{R}) \circ \tau)$ $\left(\tau : z \in \mathbb{H} \mapsto -\bar{z} \in \mathbb{H} \right)$

$\rho \in R_g$

$T_{[\rho]} T_g = H^1(\pi_1(\Sigma_g, *) ; sl_2(\mathbb{R})_{Ad\rho})$, $\dim_{\mathbb{R}} = 6g-6$.

$\varpi : \tilde{\Sigma} \to \Sigma := \Sigma_g$ 普遍被覆空間.

$\circlearrowleft \pi := \pi_1(\Sigma_g, *)$

$L := sl_2(\mathbb{R})_{Ad\rho} \qquad T_{[\rho]} T_g = H^1(\pi ; L)$

$\mathrm{per} : H^1(\Omega^*(\tilde{\Sigma} ; L)^\pi) \to H^1(\pi ; L)$. 実は同型だが単射まで示した

$[\theta] \longmapsto \left(z_\theta : \gamma \mapsto \int_{\tilde{*}}^{\gamma \tilde{*}} \theta \right)$

$B : sl_2(\mathbb{R}) \times sl_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(X, Y) \mapsto \mathrm{tr}(XY)$

<u>Lem 12.3</u>

$B_* : H^1(\Omega^1(\tilde{\Sigma} ; L)^\pi) \times H^1(\Omega^1(\tilde{\Sigma} ; L)^\pi) \to \mathbb{R}$

$([\theta], [\varphi]) \longmapsto B_*([\theta], [\varphi]) := \int_\Sigma B(\theta \wedge \varphi)$

well-defined

$C := \mathbb{H} / \mathrm{Im}\,\rho$, $H^0(C ; 2K_C) = \{ C$ 上の正則二次微分 $\}$, $\dim_{\mathbb{C}} = 3g-3$

$L_{\mathbb{C}} := sl_2(\mathbb{C})_{Ad\rho}$ とおく

$$Z := \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \otimes \begin{pmatrix} z & -z^2 \\ 1 & -z \end{pmatrix}$$

<u>Lem 12.4</u> $\forall P \in PSL_2(\mathbb{R})$, $P^*(Z) = Z$.

$\xi \in H^0(C:2K_C)$ について $\varpi^*\xi = \xi(z)(dz)^{\otimes 2}$ on $\mathbb{H} = \tilde{\Sigma}$ と表す

$$\xi \cdot Z := \xi(z)dz \otimes \begin{pmatrix} z & -z^2 \\ 1 & -z \end{pmatrix} \in \Omega^1(\tilde{\Sigma}; L_{\mathbb{C}})^{\pi} \leftarrow \text{Lem 12.4}$$

であるが $z^k\xi(z)$: 正則 $(^\forall k \geq 0)$ だから $d(\xi\cdot Z) = 0$ であり

$$[\xi\cdot Z] \in H^1(\Omega^*(\tilde{\Sigma}; L_{\mathbb{C}})^{\pi})$$

が定義できる。$[\overline{\xi\cdot Z}] \in H^1(\Omega^*(\tilde{\Sigma}; L_{\mathbb{C}})^{\pi})$ も同様に定義できる

Petersson 内積

$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} ; \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$

$$dz \wedge d\bar{z} = (dx + \sqrt{-1}dy)\wedge(dx - \sqrt{-1}dy) = -2\sqrt{-1}\,dx\wedge dy$$

$$|z-\bar{z}|^2 = (2\sqrt{-1}y)^2 = -4y^2$$

$$\frac{dz\wedge d\bar{z}}{|z-\bar{z}|^2} = \frac{\sqrt{-1}\,dx\wedge dy}{2y^2} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\,dvol \in \Omega^2(\tilde{\Sigma})^{\pi} = \Omega^2(\Sigma)$$

$\xi, \eta \in H^0(C:2K_C)$, $\dfrac{\xi\bar{\eta}}{dvol} \in \Omega^2(\Sigma)$

$\varpi^*\xi = \xi(z)(dz)^{\otimes 2}$, $\varpi^*\eta = \eta(z)(dz)^{\otimes 2}$

$$\varpi^*\left(\frac{\xi\bar{\eta}}{dvol}\right) = \xi(z)\overline{\eta(z)}\,dz\wedge d\bar{z}\,\frac{2}{\sqrt{-1}}|z-\bar{z}|^2$$

$$= (-2\sqrt{-1})(-4y^2)\xi(z)\overline{\eta(z)}(-2\sqrt{-1})\,dx\wedge dy$$

$$= 16\,y^2\xi(z)\overline{\eta(z)}\,dx\wedge dy$$

Petersson 内積 $\langle \xi, \eta\rangle \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{16}\displaystyle\int_{\Sigma}\frac{\xi\bar{\eta}}{dvol}$: 正定値 Hermite 形式

補題 13.1 $\langle \xi, \eta\rangle = \dfrac{\sqrt{-1}}{8}B_*([\xi\cdot Z], [\overline{\eta\cdot Z}]) \in \mathbb{R}$

証明 $\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} z & -z^2 \\ 1 & -z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{z} & -\bar{z}^2 \\ 1 & -\bar{z} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} |z|^2 - z^2 & * \\ * & -\bar{z}^2 + |z|^2 \end{pmatrix}$

$$= -z^2 + 2z\bar{z} - \bar{z}^2 = -|z-\bar{z}|^2$$

$B((\xi\cdot Z)\wedge(\overline{\eta\cdot Z}))$

$$= -|z-\bar{z}|^2\xi(z)\overline{\eta(z)}\,dz\wedge d\bar{z}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\varpi^*\left(\frac{\xi\bar{\eta}}{dvol}\right)$$

両辺を Σ 上で積分して Lem を得る //

系 13.2 写像

$$H^0(C:2K_C)\oplus\overline{H^0(C:2K_C)}\to H^1(\Omega^*(\tilde{\Sigma}:L_{\mathbb{C}})^\pi),\ (\xi,\bar\eta)\mapsto[\xi\cdot Z]+\overline{[\eta\cdot Z]}$$

は単射である

証明 $\langle\ ,\ \rangle$ の正値性と

$$\frac{\sqrt{-1}}{8}B_*([\xi\cdot Z]+\overline{[\eta\cdot Z]},\overline{[\xi\cdot Z]}+[\eta\cdot Z])=\langle\xi,\xi\rangle+\langle\eta,\eta\rangle\geqq 0$$

から明らかである //

定理 13.3 (1) 次の2つの線型写像は同型である

$$H^0(C:2K_C)\oplus\overline{H^0(C:2K_C)}\to H^1(\Omega^*(\tilde{\Sigma}:L_{\mathbb{C}})^\pi)$$

$$per: H^1(\Omega^*(\tilde{\Sigma}:L_{\mathbb{C}})^\pi)\to H^1(\pi:L_{\mathbb{C}})$$

(2) 次の2つの線型写像は同型である

$$H^0(C:2K_C)\to H^1(\Omega^*(\tilde{\Sigma}:L_{\mathbb{C}})^\pi),\ \xi\mapsto \mathrm{Re}[\xi\cdot Z]$$

$$per: H^1(\Omega^*(\tilde{\Sigma}:L)^\pi)\to H^1(\pi:L)$$

(3) B_* は $H^1(\Omega^*(\tilde{\Sigma}:L_{\mathbb{C}})^\pi)$ および $H^1(\Omega^*(\tilde{\Sigma}:L)^\pi)$ 上非退化である

証明 (1) これら2つはともに単射であることが示されていた さらに

$$\dim_{\mathbb{C}}(H^0(C:2K_C)\oplus\overline{H^0(C:2K_C)})=6g-6=\dim_{\mathbb{C}}H^1(\pi:L_{\mathbb{C}})$$

であるから同型になる

(2) (1)の同型写像の実部をとればよい

(3) Lem 13.1 と (1) により B_* は $H^1(\Omega^*(\tilde{\Sigma}:L_{\mathbb{C}})^\pi)$ 上非退化である

B_* は実形式ゆえ $H^*(\Omega^*(\tilde{\Sigma}:L)^\pi)$ 上でも非退化である //

(注意 (3)は Poincaré 双対性を使って証明するのがふつうである)

Weil-Petersson 計量

以上により同型

$$(T_{[\rho]}T_g)\otimes\mathbb{C}=H^1(\pi:L_{\mathbb{C}})=H^0(C:2K_C)\oplus\overline{H^0(C:2K_C)}$$

がえられた この同型により $H^0(C:2K_C)$ 上の Petersson 内積を $T_{[\rho]}T_g$ にひきもどしたものを Teichmüller 空間 T_g の Weil-Petersson 計量 (Weil-Petersson metric) という

5の虚部は同型

$$T_{[\rho]}T_g = H^1(\Omega^*(\tilde{\Sigma}; L)^\pi)$$

の下で B_*として与えられる1群のcohomologyの言葉でも書ける

$[\Sigma] \in H_2(\pi; \mathbb{R})$を基本類とするとき

$$B_*: H^1(\pi; L) \times H^1(\pi; L) \to \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \langle B(u \vee v), [\Sigma] \rangle$$

として与えられる。非退化性は同型 $H^1(\pi; L) = H^1(\Sigma; L)$ と Poincaré双対性からもわかる) これを Weil-Petersson-Kähler形式とよび

$$\omega_{WP} \in \Omega^2(T_g)$$

と表す。つくり方から写像類群 $\mathcal{M}_g$ の作用で不変である。そこで

$$\omega_{WP} \in \Omega^2(T_g)^{\mathcal{M}_g} = \Omega^2(M_g)$$

とみることができる Thm 13.3 (3) より $(\omega_{WP})^{3g-3}$ は T_g の各点で $\neq 0$ である

つまり $(\omega_{WP})^{3g-3}$ は T_g の volume form である

あとは $d\omega_{WP} = 0$ を示せば ω_{WP} が T_g 上の symplectic 構造を定めることがわかる

今回の残りの時間と次回で、前回で引用した Goldman の論文のやり方で $d\omega_{WP} = 0$ を証明する。

方針 $\mathrm{Ker}(d: \Omega^1(\tilde{\Sigma}; L)^\pi \to \Omega^2(\tilde{\Sigma}; L)^\pi)$ を主G束の平坦接続全体の空間 $\mathcal{A}(E)^{flat}$ の接空間とみなし、perを holonomyがとる写像 $hol: \mathcal{A}(E)^{flat} \to \mathrm{Hom}(\pi, G)/G$ の微分としてとらえる

主G束

$\Sigma = \Sigma_g (= \mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho)$ または一般の C^∞ 多様体

$G = PSL_2(\mathbb{R})$ または一般の Lie 群

定義 $p: E \to \Sigma$ 主G束

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 0) E: C^∞ mfd. p: C^∞ map

$E \curvearrowleft G$ C^∞ 右作用

1) $\forall e \in E$ $\quad G \xrightarrow{\cong} p^{-1}(p(e))$ (とくに G作用は自由)

$g \mapsto eg$

2) (局所自明性) $^\forall p_0 \in \Sigma$, $p_0 \in {}^\exists U \overset{open}{\subset} \Sigma$
$^\exists \Phi : U \times G \overset{\cong}{\to} \wp^{-1}(U)$ C^∞ diffeo
s.t. $^\forall p \in U$, $^\forall g$, $^\forall h \in G$
$\wp\Phi(p,h) = p$
$\Phi(p,h)g = \Phi(p,hg)$

(Φを局所自明化とよぶ) local trivialization

<u>例13.4</u> $\varpi : \tilde{\Sigma} \to \Sigma$ 普遍被覆空間
$\pi = \pi_1(\Sigma, *)$, $* \in \Sigma$, $\tilde{\Sigma}/\pi = \Sigma$
$\rho : \pi \to G$ 群準同型 ($\rho \notin R_g$ でない)
$\pi \curvearrowright \tilde{\Sigma} \times G$
$^\forall\gamma$ $\quad$ $^\forall(z, P)$, $\gamma\cdot(z,P) := (\gamma z, \rho(\gamma)P)$
$E_\rho := \pi\backslash(\tilde{\Sigma}\times G) \xrightarrow{\wp} \tilde{\Sigma}/\pi$
$[z,P] := (z,P) \bmod \pi \mapsto \varpi(z)$

$Q \in G$, $[z,P]Q := [z,PQ]$ によって $E_\rho \curvearrowleft G$ 右作用している
$\wp^{-1}(\varpi(z)) = \{[z,P] = [z,I]P : P \in G\} \cong G$ ($\rightarrow$ 条件1))
$^\forall z_0 \in \tilde{\Sigma}$, $z_0 \in {}^\exists U \overset{open}{\subset} \tilde{\Sigma}$ s.t. $1 \neq {}^\forall\gamma \in \pi$, $U \cap \gamma U = \phi$
このとき $\varpi|_U : U \overset{\cong}{\to} \varpi(U) \overset{open}{\subset} \Sigma$
C^∞ diffeo
$\Phi_U : \varpi(U) \times G \to \wp^{-1}(\varpi(U))$, $(\varpi(z), P) \mapsto [z,P]$
局所自明化

再び $\wp : E \to \Sigma$, 一般の主G束について 局所自明性により
$^\exists\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$: Σの開被覆
$^\forall\alpha \in A$ $\quad$ $^\exists\Phi_\alpha : U_\alpha \times G \overset{\cong}{\to} \wp^{-1}(U_\alpha)$ 局所自明化

$\alpha, \beta \in A$ について

$\Phi_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} : (U_\alpha \cap U_\beta)\times G \overset{\cong}{\to} \wp^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$
$\Phi_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta} : (U_\alpha \cap U_\beta)\times G \overset{\cong}{\to} \wp^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$

そこで

$p \in U_\alpha \cap U_\beta$ について

$$\Phi_\alpha^{-1}\Phi_\beta(p,1) = (p, g_{\alpha\beta}(p)) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times G$$

とおくと、

$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ C^∞ map (transition function とよぶ)

$$\begin{cases} g_{\alpha\alpha}(p) = 1 & \forall p \in U_\alpha \\ g_{\beta\alpha}(p) = g_{\alpha\beta}(p)^{-1} & \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \\ g_{\alpha\beta}(p) g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p) & \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \end{cases}$$

$$\Phi_\beta(p,1) = \Phi_\alpha(p, g_{\alpha\beta}(p)) = \Phi_\alpha(p,1) g_{\alpha\beta}(p)$$

随伴束 (adjoint bundle)

$$\mathrm{ad}\, E := E \times_G \mathfrak{g} = (E \times \mathfrak{g})/G$$

ここで $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ ($= \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ for $G = PSL_2(\mathbb{R})$)

$G \curvearrowright \mathfrak{g}$ adjoint action

$E \times \mathfrak{g} \curvearrowleft G$

$(e, X) \quad g \quad (e,X)g := (eg, \mathrm{Ad}_g^{-1}(X))$

$$\varpi_{ad} : \mathrm{ad}\, E = (E \times \mathfrak{g})/G \to \Sigma$$

$$[e, X] := (e, X) \bmod G \mapsto \varpi(e)$$

$\forall p \in \Sigma$. $\varpi_{ad}^{-1}(p) \cong \mathfrak{g}$ とくに vector 空間

いまの $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, Φ_α, $g_{\alpha\beta}$ について

$$\Phi_\alpha^{ad} : U \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} \varpi_{ad}^{-1}(U) = (\varpi^{-1}(U) \times \mathfrak{g})/G$$

$$(p, X) \mapsto [\Phi_\alpha(p,1), X]$$

$$(\varpi(e), \mathrm{Ad}_g X) \leftarrow [e, X], \quad e = \Phi(\varpi(e), 1) g$$

これより C^∞ 写像 $s : \Sigma \to \mathrm{ad}\, E$ で $\varpi_{ad} \circ s = 1_\Sigma$ となるもの (つまり $\mathrm{ad}\, E$ の section) について $\alpha \in A$ に対し C^∞ 関数 $s_\alpha : U_\alpha \to \mathfrak{g}$ を

$$(p, s_\alpha(p)) = (\Phi_\alpha^{ad})^{-1}(s(p)), \quad p \in U_\alpha$$

によって定義すると $\forall p\in U_\alpha\cap U_\beta$ について

$$\Phi_\alpha^{ad}(p, s_\alpha(p)) = s(p) = \Phi_\beta^{ad}(p, s_\beta(p)) = \Phi_\alpha^{ad}(p, Ad_{g_{\alpha\beta}(p)} s_\beta(p))$$

だから

$$(\#) \cdots \forall\alpha, \forall\beta\in A, \forall p\in U_\alpha\cap U_\beta \quad s_\alpha(p) = Ad_{g_{\alpha\beta}(p)} s_\beta(p)$$

が成立つ。逆に各 $\alpha\in A$ について C^∞ 函数 $s_\alpha : U_\alpha \to \mathfrak{g}$ が与えられていて

(#) が成立てば、C^∞ 写像 $s : \Sigma \to ad\,E$ で $\rho_{ad}\circ s = 1_\Sigma$ および

$\forall\alpha\in A$ について $(p, s_\alpha(p)) = (\Phi_\alpha^{ad})^{-1}(s(p))$ をみたすものが与えられる

ad(E) に値をもつ k-微分形式 $k\geqq 0$

以上をふまえて、$\theta = \{\theta_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\theta_\alpha\in\Omega^k(U_\alpha)\otimes\mathfrak{g}$, が ad(E) に値をもつ k-微分形式であるとは

$$(\#\#) \cdots \forall\alpha, \forall\beta\in A, \forall p\in U_\alpha\cap U_\beta \quad \theta_\alpha(p) = Ad_{g_{\alpha\beta}(p)}\theta_\beta(p)$$

をみたすことをいう。ここで $\theta_\beta = \sum_{i=1}^m \theta_{\beta i}\otimes v_i$, $\theta_{\beta i}\in\Omega^k(U_\beta)$, $v_i\in\mathfrak{g}$ とするとき

$Ad_{g_{\alpha\beta}(p)}\theta_\beta = \sum_{i=1}^m \theta_{\beta i}\otimes Ad_{g_{\alpha\beta}(p)} v_i$ と理解する

ad(E) に値をもつ k-微分形式の全体を

$$\Omega^k(\Sigma ; ad\,E)$$

と書くことにする

とくに $G = PSL_2(\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{R})$ のとき

$$B : sl_2(\mathbb{R})\times sl_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ (X, Y)\mapsto tr(XY)$$

を用いて $\theta = \{\theta_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\varphi = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}\in\Omega^*(\Sigma ; ad\,E)$,

$\alpha\in A$, $\theta_\alpha = \sum\theta_{\alpha i}\otimes v_i$, $\varphi_\alpha = \sum\varphi_{\alpha j}\otimes w_j$ について

$$B(\theta\wedge\varphi)_\alpha := \sum_{i,j} B(v_i, w_j)\,\theta_{\alpha i}\wedge\varphi_{\alpha j} \quad \text{on } U_\alpha$$

とおくと B の Ad-不変性から $\forall\alpha, \forall\beta\in A$, $B(\theta\wedge\varphi)_\alpha = B(\theta\wedge\varphi)_\beta$ on $U_\alpha\cap U_\beta$ だから $B(\theta\wedge\varphi)\in\Omega^*(\Sigma)$ が定義される

$B(\varphi\wedge\theta) = (-1)^{\deg\theta\deg\varphi} B(\theta\wedge\varphi)$ である

補題13.5 例13.4の主G束 $p: E_\rho \to \Sigma$ について次が成立つ

(1) $\mathrm{ad}\,E_\rho = \pi \backslash (\hat{\Sigma} \times \mathfrak{g})$

ここで $\gamma \in \pi$, $(z, X) \in \hat{\Sigma} \times \mathfrak{g}$ について $\gamma(z, X) := (\rho(\gamma)z, \mathrm{Ad}_{\rho(\gamma)} X)$ とする

(2) $^\forall k \geq 0$ について同型

$$\varpi^* : \Omega^k(\Sigma; \mathrm{ad}\,E_\rho) \xrightarrow{\cong} \Omega^k(\hat{\Sigma}; \mathfrak{g}_{\mathrm{Ad}\rho})^\pi$$

が成立つ $G = PSL_2(\mathbb{R})$ のときはこの同型によって $B(\theta \wedge \varphi)$ は保たれる

証明 (1) $\mathrm{ad}\,E_\rho = ((\pi \backslash (\hat{\Sigma} \times G)) \times \mathfrak{g})/G = \pi \backslash (\hat{\Sigma} \times G \times \mathfrak{g})/G$

ここで $\gamma \in \pi$, $(z, P, X) \in \hat{\Sigma} \times G \times \mathfrak{g}$, $Q \in G$, について

$$\gamma(z, P, X)Q = (\rho(\gamma)z, \rho(\gamma)PQ, \mathrm{Ad}_{Q^{-1}} X)$$

である。これをふまえると次の同型がなりたつ

$$\pi \backslash (\hat{\Sigma} \times G \times \mathfrak{g})/G \cong \pi \backslash (\hat{\Sigma} \times \mathfrak{g})$$

$$[z, P, X] \longmapsto [z, \mathrm{Ad}_P X]$$

$$[z, I, X] \longleftarrow [z, Y]$$

well-defined

$(\leftarrow)$ $(\gamma z, I, \mathrm{Ad}_{\rho(\gamma)} Y) = \gamma(z, \rho(\gamma)^{-1}, \mathrm{Ad}_{\rho(\gamma)} Y) = \gamma(z, I, Y)\rho(\gamma)^{-1}$

$(\mapsto)$ $(\gamma z, \rho(\gamma)PQ, \mathrm{Ad}_{Q^{-1}} X) \mapsto (\gamma z, \mathrm{Ad}_{\rho(\gamma)P} X) = \gamma(z, \mathrm{Ad}_P X)$

互いに逆 $(z, Y) \mapsto (z, I, Y) \mapsto (z, Y)$

$(z, P, X) \mapsto (z, \mathrm{Ad}_P X) \mapsto (z, I, \mathrm{Ad}_P X) = (z, P, X)P^{-1}$ //

//(1)

(2) $U, V \overset{\text{open}}{\subset} \hat{\Sigma}$

$1 \neq {}^\forall \gamma \in \pi$, $U \cap \gamma U = \phi$, $V \cap \gamma V = \phi$ とする

$\exists!\, \gamma_{UV} : \varpi(U) \cap \varpi(V) \to \pi$ 局所定数函数

s.t. $z' \in U$, $z'' \in V$, $\varpi(z') = \varpi(z'') = p$

$\Longrightarrow z' = \gamma_{UV}(p) z''$ $\quad (\because \pi \curvearrowright \mathbb{H}$ free$)$

$$\Phi_V(p, 1) = [z'', I] = [\gamma_{UV}(p)^{-1} z', I] = [z', \rho(\gamma_{UV}(p))]$$

$$= \Phi_U(p, \rho(\gamma_{UV}(p))) = \Phi_U(p, 1)\rho(\gamma_{UV}(p))$$

である。そこで $\theta = \{\theta_U\} \in \Omega^k(\Sigma; \mathrm{ad}\,E_\rho)$ をとると (##) により

$$\theta_U(p) = \mathrm{Ad}_{\rho(\gamma_{UV}(p))} \theta_V(p) \quad {}^\forall p \in \varpi(U) \cap \varpi(V)$$

がなりたつ

$$\tilde{\theta}_U := \varpi^*(\theta_U) \in \Omega^k(U; \mathfrak{g})$$

と定める。$z \in U \cap V$ のとき $\gamma_{UV}(\varpi(z)) = 1$ なので $\tilde{\theta}_U = \tilde{\theta}_V$ on $U \cap V$ となり
$\tilde{\Sigma}$ 全体の微分形式にのびる つまり $\exists ! \tilde{\theta} \in \Omega^k(\tilde{\Sigma}; \mathfrak{g})$ s.t.
$\forall U$, $\tilde{\theta}|_U = \tilde{\theta}_U$ である。

ここで $\forall \gamma \in \pi$ について $\gamma_{U(\gamma U)} = \gamma^{-1}$ だから $\forall z \in U$

$$\tilde{\theta}_U(z) = \theta_U(\varpi(z)) = Ad_{\rho(\gamma)^{-1}} \theta_{\gamma U}(\varpi(z)) = Ad_{\rho(\gamma)^{-1}} \tilde{\theta}_{\gamma U}(\gamma z)$$

となる つまり $\tilde{\theta} \in \Omega^k(\tilde{\Sigma}; \mathfrak{g}_{Ad\rho})^{\pi}$ である

この構成 $\theta \mapsto \tilde{\theta}$ の逆をたどれば逆対応がつくれるから
全単射である。

$G = PSL_2(\mathbb{R})$ のとき

$$B(\tilde{\theta} \wedge \tilde{\varphi})|_U = B(\tilde{\theta}_U \wedge \tilde{\theta}_V) = B(\varpi^* \theta_U \wedge \varpi^* \theta_V) = B(\varpi^*(\theta_U \wedge \theta_V)) \;{=}\; \varpi^* B(\theta_U \wedge \theta_V)$$

だから、この対応は $B(\theta \wedge \varphi)$ を保つ // (2) //

次回、主 G 束の接続を導入し、$d\omega_{WP} = 0$ を証明する