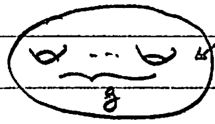
第12回, 20年7月29日

§12. Teichmüller空間の接空間

§12以降の参考文献:

W. Goldman "The symplectic nature of fundamental group of surfaces" Adv. in Math. 54 (1984) 200-225.

$g \geq 2$. $\Sigma_g =$  表面だけ $* \in \Sigma_g$

$R_g = \{\rho : \pi_1(\Sigma_g, *) \to PSL_2(\mathbb{R})$: 単射群準同型, $\mathrm{Im}\,\rho \subset PSL_2(\mathbb{R})$ discrete $\}$ C^∞ mfd

$\forall \rho \in R_g$, $T_\rho R_g = Z^1(\pi_1(\Sigma_g, *) ; sl_2(\mathbb{R})_{Ad\rho})$, $\dim_{\mathbb{R}} = 6g-6$

$T_g = R_g / \widehat{PSL_2(\mathbb{R})}$: Teichmüller空間

但. $\widehat{PSL_2(\mathbb{R})} = PSL_2(\mathbb{R}) \amalg (PSL_2(\mathbb{R}) \circ \tau)$ $(\tau : z \in \mathbb{H} \mapsto -\bar{z} \in \mathbb{H})$

$\mathbb{R}$ となる連結成分

Fricke座標 $\rho \in R_g \mapsto \exists! P_\rho \in \widehat{PSL_2(\mathbb{R})}$

s.t. P_ρ(repelling fixed point of $\rho(\beta_g)) = 0$

P_ρ(attracting $\rho(\alpha_g)) = 1$

P_ρ(attracting $\rho(\beta_g)) = \infty$

$\Longrightarrow$ { $\widehat{PSL_2(\mathbb{R})} \curvearrowright R_g$: free action

$T_g \to R_g$, $[\rho] \mapsto (P_\rho \circ \rho \circ P_\rho^{-1} : \gamma \mapsto P_\rho \rho(\gamma) P_\rho^{-1})$

はこの作用のsliceを与える

したがって T_g : $(6g-6)$-dim. C^∞ mfd

$\forall \rho \in R_g$ $T_{[\rho]} T_g = T_\rho R_g / T_I \widehat{PSL_2(\mathbb{R})}$

ここで $T_I \widehat{PSL_2(\mathbb{R})} \longrightarrow T_\rho R_g$

$$\begin{array}{ccc} T_I \widehat{PSL_2(\mathbb{R})} & \longrightarrow & T_\rho R_g \\ \| & & \| \\ sl_2(\mathbb{R}) & & Z^1(\pi_1(\Sigma_g,*) : sl_2(\mathbb{R})_{Ad\rho}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ X & \longmapsto & \left(\gamma \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tX}\rho(\gamma)e^{-tX}\rho(\gamma)^{-1}\right) \end{array}$$

あとで導入する記号 $-(dX)(\gamma)$

$$= X - \rho(\gamma)X\rho(\gamma)^{-1} = X - Ad_{\rho(\gamma)}X$$

今日やること：
$T_{[\rho]}T_g$ を 群の cohomology と twisted de Rham cohomology によって表す

群の cohomology

$\pi = \pi_1(\Sigma_g,*)$ または一般の群

$L = sl_2(\mathbb{R})_{Ad\rho}$ または 一般の π が左作用している有限次元実vector空間

$\gamma \in \pi$ の $v \in L$ への作用を $\gamma v \in L$ と書く $v \mapsto \gamma v$ は実線型である

$$Z^1(\pi : L) := \{z : \pi \to L \text{ map} ; \forall\gamma \forall\delta \in \pi,\ z(\gamma\delta) = z(\gamma) + \gamma z(\delta)\}$$

$\rotatebox{90}{$\in$}$ z : 1-cocycle または crossed homomorphism

$d : L \to Z^1(\pi : L)$, $v \mapsto dv$

$(dv)(\gamma) := \gamma v - v$

$(dv)(\gamma\delta) = \gamma\delta v - v = \gamma v - v + \gamma\delta v - \gamma v = (dv)(\gamma) + \gamma(dv)(\delta)$

$$H^1(\pi : L) := Z^1(\pi : L)/dL$$

群 π の L に値をもつ第1 cohomology 群

(the 1^{st} cohomology group of the group π with values in L)

いままでの考察により次がえられる

定理12.1 $\forall[\rho] \in T_g$

$$T_{[\rho]}T_g = H^1(\pi_1(\Sigma_g,*) : sl_2(\mathbb{R})_{Ad\rho})$$

twisted de Rham cohomology

$\pi_1(\Sigma_g,*)$ のように群 π が連結 C^∞ mfd Σ の基本群である場合に

$H^1(\pi : L)$ を微分形式のことばで書きかえる

$\varpi : \widetilde{\Sigma} \to \Sigma$: 普遍被覆空間とする

$\pi \curvearrowright \widetilde{\Sigma}$ 自由作用しており $\widetilde{\Sigma}/\pi = \Sigma$ である

$k \geq 0$

$\Omega^k(\widetilde{\Sigma}) := \{\widetilde{\Sigma}$ 上の C^∞ k-微分形式$\} \curvearrowleft \pi$ 右作用

$\Omega^k(\widetilde{\Sigma})^\pi = \Omega^k(\Sigma)$ $(= \{\Sigma$ 上の C^∞ k-微分形式$\})$

$d : \Omega^k(\widetilde{\Sigma}) \to \Omega^{k+1}(\widetilde{\Sigma})$ 外微分　πの作用と可換である

ここで $\widetilde{\Sigma}$ は単連結だから $\theta \in \Omega^1(\widetilde{\Sigma})$ について次が成立つ

$$d\theta = 0 \iff {}^\exists f \in C^\infty(\widetilde{\Sigma}) \text{ (unique up to const) } df = \theta$$

とくに $d\theta = 0$ のとき ${}^\forall p, {}^\forall q \in \widetilde{\Sigma}$, $\int_p^q \theta = f(q) - f(p)$ は pathのとり方によらない

$\Omega^k(\widetilde{\Sigma} : L) := \Omega^k(\widetilde{\Sigma}) \otimes L$　Lに値をもつ k-微分形式

$${}^\forall \theta = \sum_{i=1}^m \theta_i \otimes v_i, \quad \theta_i \in \Omega^k(\widetilde{\Sigma}),\ v_i \in L$$

$$d\theta = \sum_{i=1}^m (d\theta_i) \otimes v_i$$

$\Omega^k(\widetilde{\Sigma} : L) \curvearrowleft \pi$, 右作用　$\gamma \in \pi$

$$\gamma^* \theta = \sum_{i=1}^m (\gamma^* \theta_i) \otimes \gamma^{-1}(v_i)$$

$$\Omega^k(\widetilde{\Sigma} : L)^\pi := \{\theta \in \Omega^k(\widetilde{\Sigma} : L) ; {}^\forall \gamma \in \pi \ \gamma^*\theta = \theta\}$$

$$d : \Omega^k(\widetilde{\Sigma} : L)^\pi \to \Omega^{k+1}(\widetilde{\Sigma} : L)^\pi \quad (\because d\gamma^*\theta = \gamma^* d\theta)$$

$$H^1(\Omega^*(\widetilde{\Sigma} : L)^\pi) := \frac{\mathrm{Ker}(d : \Omega^1(\widetilde{\Sigma} : L)^\pi \to \Omega^2(\widetilde{\Sigma} : L)^\pi)}{\mathrm{Im}(d : \Omega^0(\widetilde{\Sigma} : L)^\pi \to \Omega^1(\widetilde{\Sigma} : L)^\pi)}$$

the 1st twisted de Rham cohomology of $\Sigma (= \widetilde{\Sigma}/\pi)$ with values in L

<u>period map</u>

$$\mathrm{per} : H^1(\Omega^*(\widetilde{\Sigma} : L)^\pi) \to H^1(\pi : L), \quad [\theta] \mapsto [z_\theta]$$

<u>構成法</u>　$\theta = \sum_{i=1}^m \theta_i \otimes v_i \in \Omega^1(\widetilde{\Sigma} : L)^\pi$, $d\theta = 0$ とする

${}^\forall p, {}^\forall q \in \widetilde{\Sigma}$ について　$\int_p^q \theta \in L$　がきまる

12-4

No. Date 20・07・29

まず

(1) … $\forall \gamma \in \pi,\ \int_{\gamma p}^{\gamma q} \theta = \gamma \int_p^q \theta \in L$

(∵) $(\text{左辺}) = \int_{\gamma p}^{\gamma q} \sum \theta_i \otimes v_i = \int_p^q \sum \gamma^* \theta_i \otimes v_i = \gamma \int_p^q \sum \gamma^* \theta_i \otimes \gamma^{-1} v_i$

$= \gamma \int_p^q \gamma^* \theta = \gamma \int_p^q \theta$ //

$\tilde{*} \in \tilde{\Sigma}$ を一つとる

$$z_\theta : \pi \to L,\ \gamma \mapsto z_\theta(\gamma) := \int_{\tilde{*}}^{\gamma \tilde{*}} \theta$$

と定める. $z_\theta \in Z^1(\pi : L)$ である

(∵) $\forall \gamma, \forall \delta \in \pi \quad z_\theta(\gamma\delta) = \int_{\tilde{*}}^{\gamma\delta\tilde{*}} \theta = \int_{\tilde{*}}^{\gamma\tilde{*}} \theta + \int_{\gamma\tilde{*}}^{\gamma\delta\tilde{*}} \theta \overset{(1)}{=} z_\theta(\gamma) + \gamma z_\theta(\delta)$ //

$[z_\theta] \in H^1(\pi : L)$ は $\tilde{*} \in \tilde{\Sigma}$ のとり方によらない

$$\begin{tikzcd} \tilde{*} \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{*}' \arrow[d] \\ \gamma\tilde{*} \arrow[r] & \gamma\tilde{*}' \end{tikzcd}$$

(∵) $\tilde{*}' \in \tilde{\Sigma}$ をもう一つとる $\forall \gamma \in \pi$

$\int_{\tilde{*}'}^{\gamma\tilde{*}'} \theta = -\int_{\tilde{*}}^{\tilde{*}'} \theta + \int_{\tilde{*}}^{\gamma\tilde{*}} \theta + \int_{\gamma\tilde{*}}^{\gamma\tilde{*}'} \theta$

$\int_{\tilde{*}'}^{\gamma\tilde{*}'} \theta - \int_{\tilde{*}}^{\gamma\tilde{*}} \theta \overset{(1)}{=} (\gamma - 1)\left(\int_{\tilde{*}}^{\tilde{*}'} \theta\right) = d\left(\int_{\tilde{*}}^{\tilde{*}'} \theta\right)(\gamma)$ //

$\forall f \in \Omega^0(\tilde{\Sigma} : L)^\pi \quad [z_{df}] = 0 \in H^1(\pi : L)$

(∵) $f : \tilde{\Sigma} \to L$ C^∞ map $\forall \gamma \in \pi, \forall p \in \tilde{\Sigma}$ $\gamma^{-1} f(\gamma p) = f(p)$

$z_{df}(\gamma) = \int_{\tilde{*}}^{\gamma\tilde{*}} df = f(\gamma\tilde{*}) - f(\tilde{*}) = \gamma f(\tilde{*}) - f(\tilde{*}) = (df(\tilde{*}))(\gamma)$ //

以上により

$$per : H^1(\Omega^*(\tilde{\Sigma} : L)^\pi) \to H^1(\pi : L)$$

が定義され, $\tilde{*} \in \tilde{\Sigma}$ のとり方によらないことがわかった

補題12.2 per は単射である

証明 $\theta \in \Omega^1(\tilde{\Sigma} : L)^\pi,\ d\theta = 0,\ [z_\theta] = 0 \in H^1(\pi : L)$ とする

$\exists v \in L,\ \forall \gamma \in \pi,\ \int_{\tilde{*}}^{\gamma\tilde{*}} \theta = \gamma v - v$

である. そこで $g : \tilde{\Sigma} \to L$ C^∞関数を

$$g(p) := v + \int_{\hat{*}}^{p} \theta \quad (p \in \tilde{\Sigma})$$

によって定める

$$g(\gamma p) = v + \int_{\hat{*}}^{\gamma p} \theta = v + \int_{\hat{*}}^{\gamma \hat{*}} \theta + \int_{\gamma \hat{*}}^{\gamma p} \theta = \gamma v + \gamma \int_{\hat{*}}^{p} \theta = \gamma g(p)$$

であるから $g \in \Omega^0(\tilde{\Sigma} : L)^{\pi}$ である. $dg = \theta$ より $[\theta] = 0 \in H^1(\Omega^*(\tilde{\Sigma} : L)^{\pi})$ がわかる//

さらに twisted de Rham theorem より per は同型である。いま考えている $\pi = \pi_1(\Sigma_g, *)$
$L = sl_2(\mathbb{R})_{Adp}$ の場合に同型であることは次回証明する. したがって $\forall [\rho] \in T_g$

$$(2) \cdots \quad H^1(\Omega^*(\tilde{\Sigma}_g : sl_2(\mathbb{R})_{Adp})^{\pi_1(\Sigma_g, *)}) \cong H^1(\pi_1(\Sigma_g, *) : sl_2(\mathbb{R})_{Adp}) \cong T_{[\rho]} T_g$$

がえられる. のこりの時間と次回で左辺をさらに書きかえる
以下 $\pi = \pi_1(\Sigma_g, *)$, $\Sigma = \Sigma_g$, $\tilde{\Sigma} = \mathbb{H}$, $L = sl_2(\mathbb{R})_{Adp}$ とする
(2)の左辺を書きかえるために, そこに pairing を定める.
対称双線型形式

$$B : sl_2(\mathbb{R}) \times sl_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto B(X, Y) := tr(XY)$$

を用意する $\forall P \in PSL_2(\mathbb{R})$ について

$$(3) \quad B(Ad_P X, Ad_P Y) = tr(PXP^{-1}PYP^{-1}) = tr(XY) = B(X, Y)$$

に注意する.

$$\theta = \sum \theta_i \otimes v_i, \quad \varphi = \sum \varphi_j \otimes w_j \in \Omega^*(\tilde{\Sigma} : L)$$

について

$$B(\theta \wedge \varphi) := \sum B(v_i, w_j)\, \theta_i \wedge \varphi_j \in \Omega^*(\tilde{\Sigma})$$

と定める. B は対称だから

$$(4) \quad B(\varphi \wedge \theta) = (-1)^{\deg \theta \deg \varphi} B(\theta \wedge \varphi)$$

に注意する. $\forall \gamma \in \pi$ について次が成立つ

$$(5) \quad B(\gamma^* \theta \wedge \gamma^* \varphi) = \gamma^* B(\theta \wedge \varphi)$$

(ii) $(\text{左辺}) = \sum B(\gamma^! v_i, \gamma^! w_j)\, \gamma^*\theta_i \wedge \gamma^*\varphi_j \overset{(3)}{=} \sum B(v_i, w_j)\, \gamma^*(\theta_i \wedge \varphi_j)$
$= \gamma^*\left(\sum B(v_i, w_j)\, \theta_i \wedge \varphi_j\right) = (\text{右辺})$ //

そこで $\theta, \varphi \in \Omega^*(\hat{\Sigma}; L)^\pi$ ならば $B(\theta \wedge \varphi) \in \Omega^*(\hat{\Sigma})^\pi = \Omega^*(\Sigma)$ となる
とくに $\deg\theta + \deg\varphi = 2$ のとき $\int_\Sigma B(\theta \wedge \varphi) \in \mathbb{R}$ が定義される

<u>補題12.3</u> 交代双線型形式

$$B_*: H^1(\Omega^*(\hat{\Sigma}; L)^\pi) \times H^1(\Omega^*(\hat{\Sigma}; L)^\pi) \to \mathbb{R}$$
$$([\theta], [\varphi]) \longmapsto B_*([\theta], [\varphi]) := \int_\Sigma B(\theta \wedge \varphi)$$

が定義される.

<u>証明</u> 交代性は(4)による. B_* がwell-definedであることは, 交代性により
$\theta = \sum \theta_i \otimes v_i \in \Omega^1(\hat{\Sigma}; L)^\pi$, $d\theta = 0$, $f = \sum f_k \otimes u_k \in \Omega^0(\hat{\Sigma}; L)^\pi$
について $\int_\Sigma B(df \wedge \theta) = 0$ を示せばよい. $B(f \wedge \theta) \in \Omega^1(\hat{\Sigma})^\pi = \Omega^1(\Sigma)$
に注意する

$$B(df \wedge \theta) = \sum B(u_k, v_i)\, df_k \wedge \theta_i$$
$$= \sum B(u_k, v_i)\, d(f_k \theta_i) - \sum B(u_k, v_i)\, f_k\, d\theta_i$$
$$= d\, B(f \wedge \theta) - B(f \wedge \underset{=0}{d\theta}) = d\, B(f \wedge \theta)$$

ゆえに $\int_\Sigma B(df \wedge \theta) = \int_\Sigma dB(f \wedge \theta) = 0$ //

<u>正則二次微分</u> $p \in R_g$

$C := \mathbb{H}/\mathrm{Im}\,p$: 種数 g compact Riemann 面

$K_C := T^*C$: 正則余接束

<u>正則二次微分</u>は $2K_C = (T^*C)^{\otimes 2}$ の正則切断
局所的には 複素座標 w によって

$$\xi(w)(dw)^{\otimes 2}, \quad \xi(w):\ w\text{の正則函数}$$

と表わされる

$H^0(C;2K_C) := \{C$ 上の正則二次微分$\}$ $\mathbb{C}$-vector空間.

Riemann-Rochの定理により

(6) …… $\dim_{\mathbb{C}} H^0(C;2K_C) = 3g-3$

である.

ここで $\eta = \eta(z)(dz)^{\otimes 2}$ を $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ 上の正則二次微分とする. $\gamma \in \pi$, $\rho(\gamma) = \pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$ について

$$\gamma^*\eta = \eta(\gamma z)(d\gamma z)^{\otimes 2} = \eta(\gamma z)\left(\frac{dz}{(cz+d)^2}\right)^{\otimes 2} = \eta(\gamma z)\frac{1}{(cz+d)^4}(dz)^{\otimes 2}$$

である. そこで $\xi \in H^0(C;2K_C)$ を射影

$$\varpi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}/\mathrm{Im}\,\rho = C$$

によってひきもどしたものを

$$\varpi^*\xi = \xi(z)(dz)^{\otimes 2}$$

とおくと $\gamma^*\varpi^*\xi = (\varpi\circ\gamma)^*\xi = \varpi^*\xi$ より

(7) …… $\xi(z) = \xi(\gamma z)\dfrac{1}{(cz+d)^4}$, $\forall\gamma \in \pi$, $\rho(\gamma) = \pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

となる. 逆に(7)をみたす $\mathbb{H}$ 上の正則二次微分は C からのひきもどしである.

次回の志村同型の準備

$$Z := \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \otimes \begin{pmatrix} z & -z^2 \\ 1 & -z \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathbb{H}, T\mathbb{H} \otimes \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})_{Ad})$$

とおく

<u>補題12.4.</u> $\forall P = \pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$ $P^*(Z) = Z$

<u>証明</u> $P^*(dz) = dPz = \dfrac{1}{(cz+d)^2}dz$

$$1 = \left\langle P^*(dz), P^*\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\rangle = \left\langle \frac{1}{(cz+d)^2}dz, P^*\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\rangle$$

により $P^*\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right) = (cz+d)^2\dfrac{\partial}{\partial z}$ である. 他方.

12-8

No. Date 20.07.29

$$\mathrm{Ad}_P\begin{pmatrix} z & -z^2 \\ 1 & -z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & -z^2\\ 1 & -z\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} az+b & -z(az+b) \\ cz+d & -z(cz+d)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (az+b)(cz+d) & -(az+b)^2 \\ (cz+d)^2 & -(az+b)(cz+d)\end{pmatrix}$$

$$= (cz+d)^2 \begin{pmatrix} Pz & -(Pz)^2 \\ 1 & -(Pz)\end{pmatrix}$$

ゆえに $\begin{pmatrix} z & -z^2\\1&-z\end{pmatrix} = (cz+d)^2 \mathrm{Ad}_{P^{-1}}\begin{pmatrix} Pz & -(Pz)^2\\ 1 & -(Pz)\end{pmatrix}$

$$Z = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\otimes\begin{pmatrix} z & -z^2\\1&-z\end{pmatrix} = \left((cz+d)^2\frac{\partial}{\partial z}\right)\otimes \mathrm{Ad}_{P^{-1}}\begin{pmatrix} Pz & -(Pz)^2\\ 1 & -(Pz)\end{pmatrix}$$

$$= P^*\left(\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\otimes \mathrm{Ad}_{P^{-1}}\begin{pmatrix} z & -z^2\\1&-z\end{pmatrix}\right) = P^*Z \quad //$$

次回

$$H^0(C;2K_C)\oplus\overline{H^0(C;2K_C)} \xrightarrow{\cong} H^1(\Omega^*(\tilde{\Sigma}; sl_2(\mathbb{C})_{\mathrm{Ad}\rho})^{\pi}) \xrightarrow[\mathrm{pr}]{\cong} H^1(\pi; sl_2(\mathbb{C})_{\mathrm{Ad}\rho})$$

$$(\xi,\bar{\eta}) \longmapsto [\xi\cdot Z]+\overline{[\eta\cdot Z]}$$

を示す. この同型の合成を志村同型という //