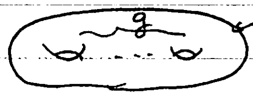
第11回，20年7月22日

§11. フックス群の無限小変形

$g \geqq 2$, $\Sigma_g =$ 

$* \in \Sigma_g$

$\pi_1(\Sigma_g, *) = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_g \,;\, \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \cdots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1 \rangle$

$R_g = \{ \rho : \pi_1(\Sigma_g, *) \to PSL_2(\mathbb{R})\,;$ 単射群準同型, $\mathrm{Im}\,\rho \subset PSL_2(\mathbb{R})$ discrete $\}$

$\overset{\text{open}}{\subset} \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g, *), PSL_2(\mathbb{R})) \subset PSL_2(\mathbb{R})^{2g}$ とみなす

Thm 10.4 $\qquad \rho \longmapsto (\rho(\alpha_k), \rho(\beta_k))_{k=1}^{g}$

今日やること ① $R_g \subset PSL_2(\mathbb{R})^{2g}$ C^∞ submfd を示す

② $\rho \in R_g$ について $T_\rho R_g$ を記述する

準備 $G = PSL_2(\mathbb{R})$ または一般の Lie 群，$I \in G$ 単位元

$\mathfrak{g}\,(= \mathrm{Lie}(G)) := T_I G$ $\quad I$ における G の接空間

$A(t) \in G$, $|t| \ll 1$, t についての C^∞ curve

$A(0) = I$ について

$$\dot{A}(0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A(t) \in T_I G = \mathfrak{g}$$

$P \in G$ について adjoint action が定まる：

$$\mathrm{Ad}_P : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},\quad \dot{A}(0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A(t) \longmapsto \mathrm{Ad}_P(\dot{A}(0)) = P\dot{A}(0)P^{-1} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} PA(t)P^{-1}$$

$G = PSL_2(\mathbb{R})$ とする

$$sl_2(\mathbb{R}) := \{ B \in M_2(\mathbb{R})\,;\, \mathrm{tr}\,B = 0 \} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} ; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

補題 11.1 $\quad T_I PSL_2(\mathbb{R}) = sl_2(\mathbb{R})$

証明 一般に $B \in M_m(\mathbb{C})$ について

$$\det(e^{tB}) = e^{t\,\mathrm{tr}\,B}$$

が成立つ

11-2

No. Date 20・07・22

(i) $B = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m\end{pmatrix}P^{-1}$ (上三角化)

$e^{tB} = P\begin{pmatrix}e^{t\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_m}\end{pmatrix}P^{-1}$

$\det e^{tB} = e^{t\lambda_1}\cdots e^{t\lambda_m} = e^{t(\lambda_1+\cdots+\lambda_m)} = e^{t\,\mathrm{tr}\,B}$ //

(ロ) $B \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ のとき $e^{tB} \in SL_2(\mathbb{R})$, $e^{0B} = I$, $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tB} = B$

(ハ) $A(t) = \pm\begin{pmatrix}a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t)\end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$. $A(0) = \pm\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とする

$a(0) = d(0) = 1$, $b(0) = c(0) = 0$ としてよい

$1 = a(t)d(t) - b(t)c(t)$

$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(a(t)d(t) - b(t)c(t)) = \mathring{a}(0) + \mathring{d}(0)$

ゆえに $\mathring{A}(0) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ //

次に $A(t) \in G$, $|t| \ll 1$, t についての C^∞ curve が $A(0) = I$ とは限らない場合

$$\mathring{A}(0)A(0)^{-1} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A(t)A(0)^{-1} \in T_I G = \mathfrak{g}$$

を考えることができる. $A(t), B(t)$ について

(1) … $\frac{d}{dt}(A(t)B(t)B(0)^{-1}A(0)^{-1}) = \mathring{A}(0)A(0)^{-1} + A(0)\mathring{B}(0)B(0)^{-1}A(0)^{-1}$

またとくに, $B(t) = A^{-1}(t) = A(t)^{-1}$ について $\mathring{A}^{-1}(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A^{-1}(t)$ と表すと

$0 = \mathring{A}(0)A(0)^{-1} + A(0)\mathring{A}^{-1}(0)A(0)A(0)^{-1}$ だから

(2) $\mathring{A}^{-1}(0)A(0) = -A(0)^{-1}\mathring{A}(0) = -\mathrm{Ad}_{A(0)^{-1}}(\mathring{A}(0)A(0)^{-1})$

となる

補題 11,2 一般の $A(t), B(t)$ について次が成立つ

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(A(t)B(t)A(t)^{-1}B(t)^{-1})(A(0)B(0)A^{-1}(0)B^{-1}(0))^{-1}$$

$$= (1 - \mathrm{Ad}_{A(0)B(0)A(0)^{-1}})(\mathring{A}(0)A(0)^{-1}) + \mathrm{Ad}_{A(0)}(1 - \mathrm{Ad}_{B(0)A^{-1}(0)B(0)^{-1}})(\mathring{B}(0)B(0)^{-1})$$

証明 $C(t) = A(t)B(t)A(t)^{-1}B(t)^{-1}$, $D(t) = B(t)A(t)$ とおく

(与式左辺) $= \mathring{C}(0)C(0)^{-1}$ である ここで $C(t)D(t) = A(t)B(t)$ であるから

(1) により

$$\dot{C}(0)C(0)^{-1}+C(0)\dot{D}(0)D(0)^{-1}C(0)^{-1}$$
$$=\dot{A}(0)A(0)^{-1}+A(0)\dot{B}(0)B(0)^{-1}A(0)^{-1}=\dot{A}(0)A(0)^{-1}+Ad_{A(0)}(\dot{B}(0)B(0)^{-1})$$
であるが、再び(1)により
$$C(0)\dot{D}(0)D(0)^{-1}C(0)^{-1}=Ad_{C(0)}(\dot{D}(0)D(0)^{-1})$$
$$=Ad_{C(0)}(\dot{B}(0)B(0)^{-1}+B(0)\dot{A}(0)A(0)^{-1}B(0)^{-1})$$
$$=Ad_{A(0)}Ad_{B(0)A(0)^{-1}B(0)^{-1}}(\dot{B}(0)B(0)^{-1})+Ad_{A(0)B(0)A(0)^{-1}}(\dot{A}(0)A(0)^{-1})$$
であるから補題がえられる //

まず R_g が $PSL_2(\mathbb{R})^{2g}$ の C^∞ submfd であることを示す
$\left\{\begin{pmatrix}0&*\\ *&0\end{pmatrix}\right\}:=\left\{\begin{pmatrix}0&y\\ z&0\end{pmatrix};y,z\in\mathbb{R}\right\}<sl_2(\mathbb{R})$ と表す.

補題11.3 $P\in PSL_2(\mathbb{R})$, $\lambda\neq\pm1$ について次が成立つ
$$\left(1-Ad_{\pm P\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda^{-1}\end{pmatrix}P^{-1}}\right)(sl_2(\mathbb{R}))=Ad_P\left(\left\{\begin{pmatrix}0&*\\ *&0\end{pmatrix}\right\}\right)$$

証明 $\forall X\in sl_2(\mathbb{R})$ について $P^{-1}XP=\begin{pmatrix}x&y\\z&-x\end{pmatrix}$ とおくと
$$\left(1-Ad_{P\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda^{-1}\end{pmatrix}P^{-1}}\right)(X)=X-P\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda^{-1}\end{pmatrix}P^{-1}XP\begin{pmatrix}\lambda^{-1}&0\\0&\lambda\end{pmatrix}P^{-1}$$
$$=P\left(\begin{pmatrix}x&y\\z&-x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&-x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^{-1}&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\right)P^{-1}=Ad_P\begin{pmatrix}0&(1-\lambda^2)y\\(1-\lambda^{-2})z&0\end{pmatrix}$$
ここで $\lambda\neq\pm1$ より $(1-\lambda^2)\neq0$, $(1-\lambda^{-2})\neq0$ である。そこで補題がえられる //

補題11.4 $A,B\in PSL_2(\mathbb{R})$, A と B は可換でないとする。このとき線型写像
$$sl_2(\mathbb{R})\times sl_2(\mathbb{R})\longrightarrow sl_2(\mathbb{R})$$
$$(X,Y)\longmapsto(1-Ad_{ABA^{-1}})(X)+Ad_A(1-Ad_{BA^{-1}B^{-1}})(Y)$$
は全射である

証明 $A=\pm P\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda^{-1}\end{pmatrix}P^{-1}$, $B=\pm Q\begin{pmatrix}\mu&0\\0&\mu^{-1}\end{pmatrix}Q^{-1}$, $P,Q\in PSL_2(\mathbb{R})$, $\lambda,\mu>1$
と表す. $ABA^{-1}=AQ\begin{pmatrix}\mu&0\\0&\mu^{-1}\end{pmatrix}Q^{-1}A^{-1}$, $BA^{-1}B^{-1}=BP\begin{pmatrix}\lambda^{-1}&0\\0&\lambda\end{pmatrix}P^{-1}B^{-1}$ だから Lem11.3 より
$$(1-Ad_{ABA^{-1}})(sl_2(\mathbb{R}))=Ad_{AQ}\left(\left\{\begin{pmatrix}0&*\\ *&0\end{pmatrix}\right\}\right)$$
$$Ad_A(1-Ad_{BA^{-1}B^{-1}})(sl_2(\mathbb{R}))=Ad_AAd_{BP}\left(\left\{\begin{pmatrix}0&*\\ *&0\end{pmatrix}\right\}\right)=Ad_{AQ}Ad_{Q^{-1}BP}\left(\left\{\begin{pmatrix}0&*\\ *&0\end{pmatrix}\right\}\right)$$
である. したがって 次を示せばよい

(*) … $\left\{\begin{pmatrix}0&*\\ *&0\end{pmatrix}\right\} + Ad_{Q^{-1}BP}\left\{\begin{pmatrix}0&*\\ *&0\end{pmatrix}\right\} = sl_2(\mathbb{R})$

背理法で示す。(*)が成立たないと仮定して矛盾を導く。$Q^{-1}BP=\pm\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $ad-bc=1$ とする

$$Ad_{Q^{-1}BP}\begin{pmatrix}0&y\\z&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&y\\z&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}bz&ay\\dz&cy\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}bcz-acy & *\\ * & -bdz+acy\end{pmatrix}$$

だから、(*)が成立たないとすると $\forall y, \forall z\in\mathbb{R}$ $acy-bdz=0$。つまり $ac=bd=0$ となる
このとき ($ac=0$ より $a=0$ または $c=0$ である。$a=0$ のとき $b\neq0$ より $bd=0$ から $d=0$ である
$c=0$ のとき $d\neq0$ より $b=0$ である) そこで

$$Q^{-1}BP=\pm\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix},\ \text{または}\ \pm\begin{pmatrix}0&b\\-b^{-1}&0\end{pmatrix}$$

となる。これは

$$\mathrm{Fix}(BAB^{-1}) = \{BP(0), BP(\infty)\} = \{Q(0), Q(\infty)\} = \mathrm{Fix}\,B$$

を意味する。BAB^{-1}とBは双曲的だからLem 7.2よりBAB^{-1}と$B=BBB^{-1}$は可換となる。これはAとBが可換でないという仮定に矛盾する。(したがって(*)が成立つ。これが示すべきことであった//

C^∞写像

$$r_g : (PSL_2(\mathbb{R}))^{2g} \to PSL_2(\mathbb{R})$$
$$(A_k, B_k)_{k=1}^{g} \mapsto A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}\cdots A_gB_gA_g^{-1}B_g^{-1}$$

を考える

(3) … $r_g^{-1}(I) = \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g,*), PSL_2(\mathbb{R}))$

が成立つ

定理11.5 $R_g \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g,*), PSL_2(\mathbb{R})) \subset (PSL_2(\mathbb{R}))^{2g}$
は $PSL_2(\mathbb{R})^{2g}$ のC^∞部分多様体である

証明 (3)とThm 10.4により $\forall p\in R_g$ の近傍で $r_g^{-1}(I)$ がC^∞部分多様体であることを示せばよい。それにはC^∞写像の $\forall p\in R_g$ における微分 $(dr_g)_p$ が全射であることを示せばよい(陰関数定理)。それはLem 11.2とLem 11.4により
C^∞写像

$$(PSL_2(\mathbb{R}))^2 \to PSL_2(\mathbb{R})$$
$$(A, B) \mapsto ABA^{-1}B^{-1}\rho(\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}\cdots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1})$$

の微分が $(A, B) = (\rho(\alpha_1), \rho(\beta_1))$ において全射であることからわかる//

再び陰関数定理により $\forall p \in R_g$ について

$$(4) \cdots \quad T_p R_g = \mathrm{Ker}(dr_g)_p$$

が成立つ 右辺は複雑なので別のやり方で表す そのために一般論を少し考える

$\pi = \pi_1(\Sigma_g, *)$ または一般の群
$G = PSL_2(\mathbb{R})$ または一般の Lie 群
$\rho_t : \pi \to G$ 群準同型の C^∞ 族 $|t| \ll 1$
とする このとき $\gamma \in \pi$ について

$$z(\gamma) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho_t(\gamma)\rho_0(\gamma)^{-1} = \dot{\rho}_0(\gamma)\rho_0(\gamma)^{-1} \in \mathfrak{g} = T_I G$$

と定める z は cocycle 条件

$$(\#) \cdots \quad \forall \gamma, \forall \delta \in \pi, \quad z(\gamma\delta) = z(\gamma) + \mathrm{Ad}_{\rho_0(\gamma)} z(\delta) \in \mathfrak{g}$$

をみたす

∵) (1) と同じ計算をする $\rho_t(\gamma\delta)\rho_0(\gamma\delta)^{-1} = \rho_t(\gamma)\rho_t(\delta)\rho_0(\delta)^{-1}\rho_0(\gamma)^{-1}$ だから

$$\underbrace{\dot{\rho}_0(\gamma\delta)\rho_0(\gamma\delta)^{-1}}_{= z(\gamma\delta)} = \underbrace{\dot{\rho}_0(\gamma)\rho_0(\delta)\rho_0(\delta)^{-1}\rho_0(\gamma)^{-1}}_{= z(\gamma)} + \underbrace{\rho_0(\gamma)\dot{\rho}_0(\delta)\rho_0(\delta)^{-1}\rho_0(\gamma)^{-1}}_{= \mathrm{Ad}_{\rho_0(\gamma)} z(\delta)} \quad //$$

$$Z^1(\pi ; \mathfrak{g}_{\mathrm{Ad}\rho_0}) := \{ z : \pi \to \mathfrak{g} \ ; \ \text{cocycle 条件}(\#) \text{をみたす} \}$$

このとき $\forall z \in Z^1(\pi ; \mathfrak{g}_{\mathrm{Ad}\rho_0})$

$$(5) \cdots \quad z(1) = 0$$

$$(6) \cdots \quad \forall \gamma \in \pi, \quad z(\gamma^{-1}) = -\mathrm{Ad}_{\rho(\gamma)^{-1}} z(\gamma)$$

∵) $z(1) = z(1\cdot 1) = z(1) + \mathrm{Ad}_{\rho(1)} z(1) = 2z(1)$ ゆえに $z(1) = 0$
$0 = z(\gamma^{-1}\gamma) = z(\gamma^{-1}) + \mathrm{Ad}_{\rho(\gamma)^{-1}} z(\gamma) \quad //$

以上の準備のもとで次を示す

11-6

No. Date 20·07·22

定理11.6 $\forall \rho \in R_g$ について

$$Z^1(\pi_1(\Sigma_g,*); sl_2(\mathbb{R})_{Ad\rho}) \to \mathrm{Ker}(dr_g)_\rho \left(\subset \prod_{k=1}^{g}(T_{\rho(\alpha_k)}PSL_2(\mathbb{R}) \times T_{\rho(\beta_k)}PSL_2(\mathbb{R}))\right)$$

$$z \longmapsto (z(\alpha_k)\rho(\alpha_k), z(\beta_k)\rho(\beta_k))_{k=1}^{g}$$

は well-defined な同型である

証明 $\gamma_i \in \pi_1(\Sigma_g,*)$, $1\leq i\leq 4g$, を $1\leq k\leq g$, $1\leq j\leq 4$, について

$$\gamma_{4(k-1)+j} = \begin{cases} \alpha_k & j=1 \\ \beta_k & 2 \\ \alpha_k^{-1} & 3 \\ \beta_k^{-1} & 4 \end{cases}$$

によって定める. $\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{4g} = 1$ である. まず $\mathrm{Ker}(dr_g)_\rho$ を特徴づける

$(u_k\rho(\alpha_k), v_k\rho(\beta_k))_{k=1}^{g} \in \prod_{k=1}^{g}(T_{\rho(\alpha_k)}PSL_2(\mathbb{R}) \times T_{\rho(\beta_k)}PSL_2(\mathbb{R}))$, $u_k, v_k \in sl_2(\mathbb{R})$

について $w_i \in \mathfrak{g}$, $1\leq i\leq 4g$, を $1\leq k\leq g$, $1\leq j\leq 4$, について

$$(7)\cdots\quad w_{4(k-1)+j} = \begin{cases} u_k & j=1 \\ v_k & 2 \\ -\rho(\alpha_k)^{-1}u_k\rho(\alpha_k) & 3 \\ -\rho(\beta_k)^{-1}v_k\rho(\beta_k) & 4 \end{cases}$$

によって定める. このとき次が成立つ

$$(8)\cdots\quad \left|\begin{array}{l} (u_k\rho(\alpha_k), v_k\rho(\beta_k))_{k=1}^{g} \in \mathrm{Ker}(dr_g)_\rho \\ \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{4g} Ad_{\rho(\gamma_1\cdots\gamma_{i-1})} w_i = 0 \end{array}\right.$$

(∵) $A_k(t), B_k(t)$, $|t|\ll 1$, を

$$A_k(0) = \rho(\alpha_k),\quad B_k(0) = \rho(\beta_k)$$
$$\dot{A}_k(0)A_k^{-1}(0) = u_k = w_{4(k-1)+1}$$
$$\dot{B}_k(0)B_k^{-1}(0) = v_k = w_{4(k-1)+2}$$

となるようにとると (2) により

$$\dot{A}_i^{-1}(0)A_i(0) = w_{4(k-1)+3}$$
$$\dot{B}_i^{-1}(0)B_i(0) = w_{4(k-1)+4}$$

がなりたつ. そこで

Date 20・07・22 No.

$$(dr_g)_\rho((\dot{A}_k(0), \dot{B}_k(0))_{k=1}^g) = (dr_g)_\rho((\dot{A}_k(0), \dot{B}_k(0))_{k=1}^g)\rho(\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{4g})^{-1}$$
$$= \sum_{i=1}^{4g} \rho(\gamma_1\cdots\gamma_{i-1}) w_i \rho(\gamma_i)\rho(\gamma_{i+1}\cdots\gamma_{4g})\rho(\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{4g})^{-1}$$
$$= \sum_{i=1}^{4g} \rho(\gamma_1\cdots\gamma_{i-1}) w_i \rho(\gamma_1\cdots\gamma_{i-1})^{-1} = \sum_{i=1}^{4g} Ad_{\rho(\gamma_1\cdots\gamma_{i-1})} w_i$$

となる これで (8) がえられた //(8)

well-defined $0 = z(1) = z(\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{4g}) \overset{(\#)}{=} \sum_{i=1}^{4g} Ad_{\rho(\gamma_1\cdots\gamma_{i-1})} z(\gamma_i)$

であるが, $1 \leq k \leq g$ について (6) により

$$z(\gamma_{4(k-1)+3}) = z(\alpha_k^{-1}) = -\rho(\alpha_k)^{-1} z(\alpha_k)\rho(\alpha_k)$$
$$z(\gamma_{4(k-1)+4}) = z(\beta_k^{-1}) = -\rho(\beta_k)^{-1} z(\beta_k)\rho(\beta_k)$$

だから, $(z(\alpha_k), z(\beta_k))_{k=1}^g$ に定まる (7) の $(w_i)_{i=1}^{4g}$ は $(z(\gamma_i))_{i=1}^{4g}$ にひとしい.

ゆえに (8) により $(z(\alpha_k)\rho(\alpha_k), z(\beta_k)\rho(\beta_k))_{k=1}^g \in \mathrm{Ker}(dr_g)_\rho$ である

単射 $z(\alpha_k) = z(\beta_k) = 0$ $(1 \leq {}^\forall k \leq g)$ とする. このとき (6) により $1 \leq {}^\forall i \leq 4g$, $z(\gamma_i) = 0$ である

$\pi_1(\Sigma_g, *)$ の任意の元は $\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_n}$, $1 \leq i_1, \cdots, i_n \leq 4g$ と表わされるが

$$z(\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_n}) = \sum_{j=1}^{n} Ad_{\rho(\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_{j-1}})} z(\gamma_{i_j}) = 0$$

である. ゆえに $z = 0 \in Z^1(\pi_1(\Sigma_g, *); sl_2(\mathbb{R})_{Ad_\rho})$ である

全射 $\forall (u_k\rho(\alpha_k), v_k\rho(\beta_k))_{k=1}^g \in \mathrm{Ker}(dr_g)_\rho$ をとる. (7) のように $(w_i)_{i=1}^{4g}$ をとる

$1 \leq i_1, \cdots, i_n \leq 4g$ について

$$z(\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_n}) = \sum_{j=1}^{n} Ad_{\rho(\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_{j-1}})} w_{i_j}$$

と定義したい. いま γ_i たちの列 $\delta_0, \delta', \delta''$ について $z(\delta_0) = 0$, $\rho(\delta_0) = I$ ならば

$$z(\delta'\delta_0\delta'') = z(\delta') + Ad_{\rho(\delta')} \underbrace{z(\delta_0)}_{=0} + Ad_{\underbrace{\rho(\delta'\delta_0)}_{=\rho(\delta')}} z(\delta'')$$
$$= z(\delta') + Ad_{\rho(\delta')} z(\delta'') = z(\delta'\delta'')$$

がなりたつ. そこで

11-8

No. Date 20・07・22

① $\delta_0 \in \{\gamma_{4(k-1)+1}\gamma_{4(k-1)+3}, \gamma_{4(k-1)+3}\gamma_{4(k-1)+1}, \gamma_{4(k-1)+2}\gamma_{4(k-1)+4}, \gamma_{4(k-1)+4}\gamma_{4(k-1)+2}\}$

のとき、$\rho(\delta_0) = I$ であるが (7)により $z(\delta_0) = 0$ である

② $\delta_0 = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{4g}$ のとき (8)により $z(\delta_0) = 0$ であり、①により

$z(\delta_0^{-1}\delta_0) = 0$ である。そこで $0 = z(\delta_0^{-1}) + Ad_{\rho(\delta_0^{-1})}\overset{=0}{\overline{z(\delta_0)}} = z(\delta_0^{-1})$ となる

以上により $z \in Z^1(\pi_1(\Sigma_g, *), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})_{Ad\rho})$ が well-defined であることが

わかった。z のつくり方から $z(\alpha_k) = u_k$, $z(\beta_k) = v_k$, $(1 \leq {}^\forall k \leq g)$ である

全射性が示された //