第10回, 20年7月15日

## §10. Fenchel-Nielsen 座標 (その2)

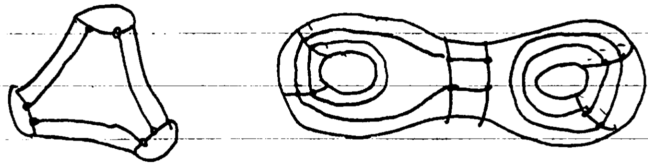
訂正 前回第9回
Lem 8.x ⇒ Lem 9.x
Thm 8.x　　Thm 9.x

今日やること. twist parameter, Fenchel-Nielsen 座標
$R_g \overset{\text{open}}{\subset} \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g,*), PSL_2(\mathbb{R}))$

$(X, \{(e_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda})$ 正則有限胞体複体
$\forall \lambda \in \Lambda$, $\varphi_\lambda : D^{n_\lambda} \to X$, 中への同相. $n_\lambda = \dim e_\lambda$
$\Lambda_k := \{\lambda \in \Lambda ; \dim e_\lambda = k\}$, $0 \le k \le \dim X$

($n_\lambda = 1$ のとき $D^1 = [-1,1]$
$\varphi_\lambda : [-1,1] \to X$)

例



$G$ : 群

$$Z^1(X:G) \overset{\mathrm{def}}{=} \{c : \Lambda_1 \to G \text{ map} ; \forall \mu \in \Lambda_2\ c(\varphi_\mu(\partial D^2)) = 1 \}$$

つまり $\varphi_\mu(\partial D^2)$ の定める loop に沿って $c$ の値の積をとると $=1$ となる

$\ni c$ (1-cocycle とよぶ)

$G^{\Lambda_0} \overset{\mathrm{def}}{=} \{b : \Lambda_0 \to G \text{ map}\} \curvearrowright Z^1(X:G)$
$\ni b$

$$(b\cdot c)(e_\lambda) \overset{\mathrm{def}}{=} b(\varphi_\lambda(-1))^{-1} c(e_\lambda) b(\varphi_\lambda(+1)) \quad (\lambda \in \Lambda_1)$$

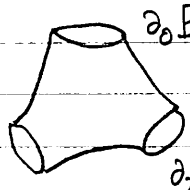
$$H^1(X:G) \overset{\mathrm{def}}{=} Z^1(X:G)/_{G^{\Lambda_0}} \quad (X \text{上の平坦主}G\text{束の moduli 空間})$$

van Kampen の定理から次が成立つ

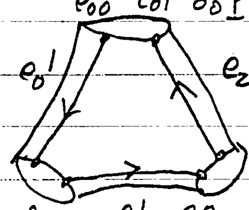
**Thm 9.5.** $X$ が連結のとき

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(X,*), G)/G = H^1(X:G)$$

まず双曲 pants を考える

$P$ = 

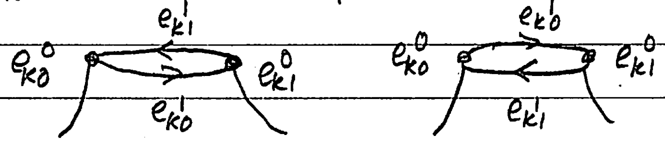


= 



$\partial_k P$, $k=0,1,2$, に向きが与えられているとする ($k$ は $k \bmod 3$ で考える)

$\partial_k P$ の2つの1-cell は $\partial_k P$ の向きに従って決める




$\partial_k P$ の双曲長さ $= 2\log\lambda_k$, $\lambda_k > 1$, $k=0,1,2$

である双曲pants をとる. (ただ一つ存在する Thm 8.6, Thm 8.7)

これに対応する $\rho : \pi_1(P, *) \to PSL_2(\mathbb{R})$ および

$c \in Z^1(P; PSL_2(\mathbb{R}))$ を考える.

$c$ のとり方は $PSL_2(\mathbb{R})^{\Lambda_0}$ の分の ambiguity があるが

次のようにすれば $c$ のとり方を一通りに決めることができる

<u>定理 10.1</u> $\exists^1 c \in Z^1(P; PSL_2(\mathbb{R}))$, s.t. $\forall k = 0,1,2$, $\forall l = 1,2$

$$c(e_{kl}^1) = \pm\begin{pmatrix} \lambda_k^{1/2} & 0 \\ 0 & \lambda_k^{-1/2} \end{pmatrix}$$

$$c(e_k^1) = \pm\begin{pmatrix} a_k & 1 \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

この $c$ を双曲pants にともなう standard cocycle とよぶことにする.

<u>証明</u> $\rho$ に対応する $c$ を一つとり, $PSL_2(\mathbb{R})^{\Lambda_0}$ の元を使って手直しする

$k=0,1,2$ について $\partial P_k$ の双曲長さ $= 2\log\lambda_k$ だから

$$c(e_{k0}^1)c(e_{k1}^1) = \pm P_k\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & \lambda_k^{-1} \end{pmatrix} P_k^{-1} \qquad \exists P_k\ \exists Q_k \in PSL_2(\mathbb{R})$$

$$c(e_{k1}^1)c(e_{k0}^1) = \pm Q_k\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & \lambda_k^{-1} \end{pmatrix} Q_k^{-1}$$

$b(e_{k0}^0) = P_k$, $b(e_{k1}^0) = Q_k$ なる $b$ について $c$ を $b \cdot c$ におきかえると

$$c(e_{k0}^1)c(e_{k1}^1) = c(e_{k1}^1)c(e_{k0}^1) = \pm\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & \lambda_k^{-1} \end{pmatrix}$$

Lemma 9.6 (2) より $\exists \mu_k > 0$

$$c(e_{k0}^1) = \pm\begin{pmatrix} \mu_k & 0 \\ 0 & \mu_k^{-1} \end{pmatrix}, \quad c(e_{k1}^1) = \pm\begin{pmatrix} \lambda_k/\mu_k & 0 \\ 0 & \mu_k/\lambda_k \end{pmatrix}$$

$b(e_{k0}^0) = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b(e_{k1}^0) = \pm\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_k}/\mu_k & 0 \\ 0 & \mu_k/\sqrt{\lambda_k} \end{pmatrix}$ なる $b$ について

$c$ を $b \cdot c$ におきかえると

$$(*)\cdots \quad c(e_{k0}^1)=c(e_{k1}^1)=\pm\begin{pmatrix}\lambda_k^{1/2} & 0\\ 0 & \lambda_k^{-1/2}\end{pmatrix},\quad k=0,1,2$$

となる。

いま、条件 $(*)$ を保つ $b\in PSL_2(\mathbb{R})^{\Lambda_0}$ は Lem 9.6 (3) より

$$(**)\cdots \quad b(e_{k0}^0)=b(e_{k1}^0)=\pm\begin{pmatrix}s_k & 0\\ 0 & s_k^{-1}\end{pmatrix},\quad s_k>0$$

という形しかない。あとは $s_0, s_1, s_2$ が一通りに決まればよい

次に $c(e_k^1)=\pm\begin{pmatrix}a_k & b_k\\ c_k & d_k\end{pmatrix}\in PSL_2(\mathbb{R})$ とする

$b_k\neq 0$ である

$\because$) もし $b_k=0$ なら $c(e_k^1)(0)=0$ より

$0\in Fix(c(e_k^1)^{-1}c(e_{k0}^1)c(e_{k1}^1)c(e_k^1))\cap Fix(c(e_{k+1,0}^1)c(e_{k+1,1}^1))$

となり矛盾 (cf 8-6) //

そこで $b_k>0$ としてよい

$(**)$ の $b$ について

$$(b\cdot c)(e_k^1)=\pm\begin{pmatrix}s_k^{-1} & 0\\ 0 & s_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_k & b_k\\ c_k & d_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_{k+1} & 0\\ 0 & s_{k+1}^{-1}\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}* & s_k^{-1}s_{k+1}^{-1}b_k\\ * & *\end{pmatrix}$$

だから $\begin{cases}s_0s_1=b_0\\ s_1s_2=b_1\\ s_2s_0=b_2\end{cases}$ をみたす $s_0, s_1, s_2$ によって $(b\cdot c)(e_k^1)=\pm\begin{pmatrix}* & 1\\ * & *\end{pmatrix}$ となる

このような $s_k$ は $s_0=\sqrt{\dfrac{b_2b_0}{b_1}},\ s_1=\sqrt{\dfrac{b_0b_1}{b_2}},\ s_2=\sqrt{\dfrac{b_1b_2}{b_0}}$ と一通りに解ける

定理が示された //

$P=\{\delta_i\}_{i=1}^{3g-3}$ を $\Sigma_g$ の pants 分解とする $1\leq {}^\forall i\leq 3g-3$ について

(i) $\delta_i$ には向きが与えられており

(ii) $\delta_i$ の annulus 近傍 $\mathfrak{a}_i$ について

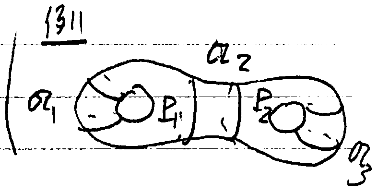
$\mathfrak{a}_i\setminus\delta_i$ の連結成分に $\mathfrak{a}_i^+, \mathfrak{a}_i^-$ と名前がついている

とする $\{P_j\}_{j=1}^{2g-2}$ を $\Sigma_g$ を $\{\delta_i\}$ で切りひらいて えられる pants とする

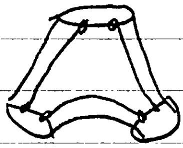
$\Sigma_g$ の胞体分割 $X_P$ を以下のようにとる：

まず: $\Sigma_g = \left(\bigcup_{j=1}^{2g-2} P_j\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{3g-3} \alpha_i\right)$ と分割する

例

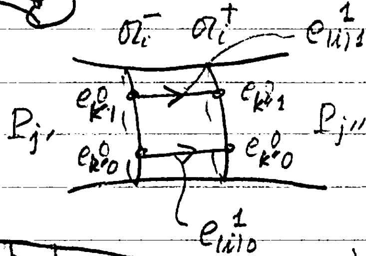



各 $P_j$ はいままで考えてきたように



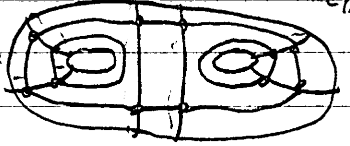
と分割し, $\partial_k P_j$ の向きは $\delta_i$ の向きを入れる

各 $\alpha_i$ は




$e^1_{(i)0}, e^1_{(i)1}$ は $\alpha_i^-$ から $\alpha_i^+$ に向かう向きを入れる

例

$X_P =$  $= \Sigma_2$

$\forall \rho \in R_g$ をとる. $h_\rho(P_j)$ は双曲 pants である。対応する 1-cocycle

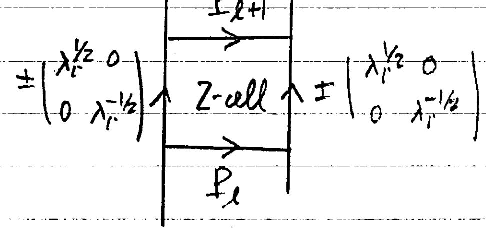
$$c_\rho \in Z^1(X_P; PSL_2(\mathbb{R}))$$

として, 各 pants $P_j$ 上では 双曲 pants $h_\rho(P_j)$ にともなう standard cocycle であるものをとる. このとき $X_P$ の 0-cell はすべて, ある $P_j$ に属するので $c_\rho$ は $[\rho] \in T_g$ について一通りに決まる

補題 10.2 $1 \le \forall i \le 3g-3$, $\exists! t_i > 0$

$$c_\rho(e^1_{(i)0}) = c_\rho(e^1_{(i)1}) = \pm\begin{pmatrix} t_i & 0 \\ 0 & t_i^{-1}\end{pmatrix}$$

証明 $c_\rho(e^1_{(i)\ell}) = P_\ell$, $\ell = 0, 1$ とおく ($\ell$ mod 2 で考える)




左図により

$$\pm P_\ell \begin{pmatrix}\lambda_i^{1/2} & 0 \\ 0 & \lambda_i^{-1/2}\end{pmatrix} P_{\ell+1}^{-1} = \pm\begin{pmatrix}\lambda_i^{1/2} & 0 \\ 0 & \lambda_i^{-1/2}\end{pmatrix}$$

ゆえに Lem 9.6 (3) より $\exists t_i > 0$

$$P_\ell = P_{\ell+1} = \pm\begin{pmatrix} t_i & 0 \\ 0 & t_i^{-1}\end{pmatrix}$$ となる //

$1\le i\le 3g-3$ について twist parameter

$$\theta_i' : T_g \to \mathbb{R},\quad \rho \mapsto \theta_i'(\rho) \overset{\mathrm{def}}{=} 2\pi \frac{\log t_i}{\log \lambda_i} \in \mathbb{R}$$

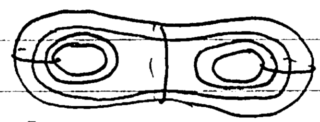
を定義する。$\delta_i$ についての geodesic length function $l_i : T_g \to \mathbb{R}_{>0}$ を思い出す

## 定理10.3 写像

$$FN_p := \left((l_i)_{i=1}^{3g-3}, (\theta_i')_{i=1}^{3g-3}\right) : T_g \to (\mathbb{R}_{>0})^{3g-3}\times\mathbb{R}^{3g-3}$$

は全単射である

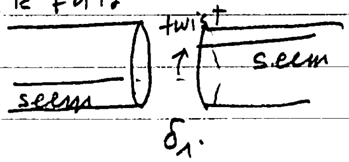
証明 単射 $(l_i)_{i=1}^{3g-3}$ が決まれば各双曲pantsが一意的に決まる
その上で各 $\theta_i'$ が決まれば $c_\rho(e(w_l^1))$, $l=0,1$, が決まるので
$[c_\rho] \in H^1(X_\rho; PSL_2(\mathbb{R})) \supset T_g$ が一意的に決まる
全射 $\forall (l_i)_{i=1}^{3g-3} \in (\mathbb{R}_{>0})^{3g-3}$ について双曲pants $P_1,\cdots,P_{2g-2}$ が
存在する seem をそろえてとられる種数g閉Riemann面に対応する



$\rho_0 \in R_g$ をとり、$\theta_{i0} := \theta_i'(\rho_0) \in \mathbb{R}$ とおく
$\forall (\varphi_i) \in \mathbb{R}^{3g-3}$ について $\rho_0$ から各 $\delta_i$ において
距離 $\frac{1}{2\pi}\varphi_i l_i$ だけ twist したものは

$$\theta_i' = \theta_{i0} + \varphi_i$$

をみたす。//




(注) $\theta_i'$ の代わりに

$$\theta_i := \theta_i' - \theta_{i0}$$

が通常は twist parameter とよばれる $\theta_i \bmod \pi\mathbb{Z} = \bar{\theta}_i$ である

のこりの時間で $R_g \overset{\text{open}}{\subset} \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g,*), PSL_2(\mathbb{R}))$ を証明する

$$\pi_1(\Sigma_g,*) = \left\langle \alpha_1,\cdots,\alpha_g,\beta_1,\cdots,\beta_g : \prod_{i=1}^{g} \alpha_i\beta_i\alpha_i^{-1}\beta_i^{-1} = 1\right\rangle$$

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g,*),PSL_2(\mathbb{R})) \subset (PSL_2(\mathbb{R}))^{2g},\quad \rho \mapsto (\rho(\alpha_i),\rho(\beta_i))_{i=1}^{g}$$

とみなして $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g,*),PSL_2(\mathbb{R}))$ に $(PSL_2(\mathbb{R}))^{2g}$ の部分空間の位相を入れる

§7でやったことを思い出す

$$R_g' := \left\{ \rho \in \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g,*), PSL_2(\mathbb{R})) \;;\; \begin{array}{l} \rho(\alpha_g), \rho(\beta_g), \rho(\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}) \text{ はすべて双曲的} \\ 1 \le {}^\forall i \le g-1 \quad \mathrm{Fix}\,\rho(\alpha_i) \cap \mathrm{Fix}\,\rho(\beta_g) = \phi \\ \qquad\qquad\qquad \mathrm{Fix}\,\rho(\beta_i) \cap \mathrm{Fix}\,\rho(\beta_g) = \phi \end{array} \right\}$$

$R_g \subset R_g'$

$\overset{\text{open}}{\subset} \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g,*), PSL_2(\mathbb{R}))$

$\because$) $|\mathrm{tr}\,A| \gneq 2$ は $A \in PSL_2(\mathbb{R})$ についての open condition で

$A \mapsto \mathrm{Fix}\,A$ は二次方程式の根をとる操作だから

Rouché の定理により連続である //

Fricke座標

$\mathcal{F}_g : R_g' \to \mathbb{R}^{6g-6},\ \rho \mapsto ((a_i, c_i, d_i), (a_i', c_i, d_i'))_{i=1}^{g-1}$

も連続である

<u>Thm 7.6</u> $\mathcal{F}_g : R_g'/\widehat{PSL_2(\mathbb{R})} \to \mathbb{R}^{6g-6}$ は単射である

<u>定理10.4</u> $R_g \overset{\text{open}}{\subset} \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g,*), PSL_2(\mathbb{R}))$

<u>証明</u> $R_g \overset{\text{open}}{\subset} R_g'$ を示せばよい。それには $\mathcal{F}_g(R_g) \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{6g-6}$ を示せばよい

$$(\mathbb{R}_{>0})^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3} \xrightarrow[\cong]{(FN_p)^{-1}} T_g = R_g/\widehat{PSL_2(\mathbb{R})} \xrightarrow[\text{単射}]{\mathcal{F}_g} \mathbb{R}^{6g-6}$$

ここで Fenchel-Nielsen座標 $FN_p$ と Fricke座標 $\mathcal{F}_g$ の

つくり方から $\mathcal{F}_g \circ (FN_p)^{-1}$ は連続である

これは単射だから領域不変性定理より $\mathcal{F}_g(T_g) \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{6g-6}$ である

$\mathcal{F}_g(T_g) = \mathcal{F}_g(R_g)$ だから これが示すべきことであった //

((注) 領域不変性定理を使うのは[今吉・谷口]にならった)

次回からは $R_g$ および $T_g = R_g/\widehat{PSL_2(\mathbb{R})}$ の接空間をしらべる