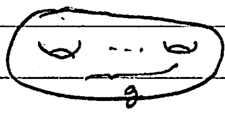
第9回, 20年7月8日

§9. Fenchel-Nielsen 座標 (その1)

今日やること 写像類群, geodesic length function, twist parameter $\theta_i : T_g \to \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, 正則有限胞体複体.

$g \geqq 2$. $\Sigma_g =$  ← 表面だけ $\quad * \in \Sigma_g$

写像類群 (mapping class group)

$\hat{\mathcal{M}}_g \overset{\text{def}}{=} \{\varphi : \Sigma_g \to \Sigma_g : \text{diffeomorphism}\}/\text{isotopy}$

拡大写像類群 (extended mapping class group)

但. $\varphi \sim \psi$: isotopic

$\overset{\text{def}}{\iff} \exists \Phi : \Sigma_g \times [0,1] \cong \Sigma_g \times [0,1]$ diffeo

s.t. $\forall p \in \Sigma_g$, $\forall t \in [0,1]$

$\Phi(p,t) \in \Sigma_g \times \{t\}$, $\Phi(p,0) = \varphi(p)$, $\Phi(p,1) = \psi(p)$

外部自己同型群 (outer automorphism group). π : group

$\mathrm{Out}(\pi) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Aut}(\pi)/\mathrm{Inn}(\pi)$

但 $\mathrm{Aut}(\pi) := \{\varphi : \pi \to \pi : \text{group automorphism}\}$

$\triangledown$ normal subgroup

$\mathrm{Inn}(\pi) := \{\varphi \in \mathrm{Aut}(\pi) ; \exists \delta \in \pi\ \forall \gamma \in \pi\ \varphi(\gamma) = \delta\gamma\delta^{-1}\}$

$\cong \pi/\mathrm{Center}(\pi)$

Dehn-Nielsen の定理 $g \geqq 1$ のとき

$\hat{\mathcal{M}}_g \xrightarrow{\cong} \mathrm{Out}(\pi_1(\Sigma_g, *))$ 基点を忘れる

$[\varphi] \longmapsto (\varphi_* : \pi_1(\Sigma_g, *) \to \pi_1(\Sigma_g, *)) \bmod \mathrm{Inn}(\pi_1(\Sigma_g, *))$

$\hat{\mathcal{M}}_g \supset \mathcal{M}_g := \{\varphi : \Sigma_g \to \Sigma_g$ 向きを保つ diffeo$\}/\text{isotopy}$

写像類群

No. Date 20・07・08

$$R_g = \{\rho : \pi_1(\Sigma_g, *) \to PSL_2(\mathbb{R}) : \text{単射群準同型},\ \mathrm{Im}\,\rho \subset PSL_2(\mathbb{R}) \text{ discrete}\}$$

補題 8.1 $\forall \rho \in R_g$, $\exists h_\rho : \Sigma_g \to \mathbb{H}/\mathrm{Im}\,\rho$ diffeo (unique up to isotopy)

s.t. $(h_\rho)_* : \pi_1(\Sigma_g, *) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathbb{H}/\mathrm{Im}\,\rho, h_\rho(*)) \cong \mathrm{Im}\,\rho$

equals ρ up to conjugate of $\mathrm{Im}\,\rho$

証明 基点 $\tilde{*} \in \mathbb{H}$ をとり $\bar{*} := \tilde{*} \bmod \mathrm{Im}\,\rho \in \mathbb{H}/\mathrm{Im}\,\rho$ とおき

diffeo : $h_0 : (\mathbb{H}/\mathrm{Im}\,\rho, \bar{*}) \xrightarrow{\cong} (\Sigma_g, *)$ をひとつ固定する

このとき次の同型が成立つ

$$\begin{array}{ccc} \gamma & \longmapsto & [\mathrm{proj}(\text{a path from } \tilde{*} \text{ to } \gamma(\tilde{*}))] \\ \mathrm{Im}\,\rho & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(\mathbb{H}/\mathrm{Im}\,\rho, \bar{*}) \\ \rho \uparrow \wr & \circlearrowleft & \wr\!\downarrow h_{0*} \\ \pi_1(\Sigma_g, *) & \dashrightarrow & \pi_1(\Sigma_g, *) \end{array}$$

$(k_\rho)_*$ for some $k_\rho : (\Sigma_g, *) \to (\Sigma_g, *)$ diffeo

($\because$ Dehn–Nielsen Thm)

k_ρ : unique up to isotopy (not fixing $*$)

($\because$ Dehn–Nielsen Thm)

$h_\rho := h_0^{-1} \circ k_\rho : \Sigma_g \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}/\mathrm{Im}\,\rho$ とおけばよい //

復習 : translation length (移動の長さ) (§2. Lem 2.8)

$A \in PSL_2(\mathbb{R})$

$$tl(A) := \inf_{z \in \mathbb{H}} d(z, Az) \quad (\in \mathbb{R}_{\geq 0})$$

但, d : 双曲距離

補題 8.2

(1) $\forall P \in PSL_2(\mathbb{R})$, $tl(PAP^{-1}) = tl(A)$

(2) $A = \pm P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} P^{-1}$, $\lambda > 1$, $P \in PSL_2(\mathbb{R})$, について

$$tl(A) = 2 \log \lambda$$

(3) A : hyperbolic のとき

$$tl(A) = 2 \cosh^{-1}\left(\frac{1}{2}|\mathrm{tr}\,A|\right) \quad \text{但,} \left(\cosh^{-1}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \ (x > 0)\right)$$

証明 (1) $tl(PAP^{-1}) = \inf_{z\in\mathbb{H}} d(z, PAP^{-1}z) \overset{P^{-1}:\text{isometry}}{=} \inf_{z\in\mathbb{H}} d(P^{-1}z, AP^{-1}z)$

$\overset{P^{-1}(\mathbb{H})=\mathbb{H}}{=} \inf_{z\in\mathbb{H}} d(z, Az) = tl(A)$

(2) $d(\sqrt{-1}, \lambda^2\sqrt{-1}) = \log(\lambda^2) = 2\log\lambda$ (Lem 2.8(3))

(3) $A = \pm P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}P^{-1}$, $\lambda>1$, $P\in PSL_2(\mathbb{R})$ となる

$tl(A) = 2\log\lambda$, $\lambda = e^{\frac{1}{2}tl A}$.

$1 \lneq \frac{1}{2}|\mathrm{tr} A| = \frac{1}{2}(\lambda+\lambda^{-1}) = \frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}tl A}+e^{-\frac{1}{2}tl A}) = \cosh(\frac{1}{2}tl(A))$

$\frac{1}{2}tl(A) = \cosh^{-1}(\frac{1}{2}|\mathrm{tr} A|)$ //

$g \geqq 2$

$\pi := \pi_1(\Sigma_g, *)$

$\hat{\pi} := \pi/\mathrm{conj} = [S^1, \Sigma_g]$ free homotopy set of free loops

$|\ |: \pi \to \hat{\pi}$, $\gamma \mapsto |\gamma|$, quotient map = forgetful map of the basepoint $*$

$\gamma \in \pi$

$\ell_{|\gamma|}: R_g \to \mathbb{R}_{>0}$ geodesic length function

$\rho \mapsto \ell_{|\gamma|}(\rho) := tl\,\rho(\gamma)$

(well-defined $\forall \ell\in\pi$ $tl(\rho(\ell\gamma\ell^{-1})) = tl(\rho(\ell)\rho(\gamma)\rho(\ell)^{-1}) \overset{\text{Lem 8.2(1)}}{=} tl(\rho(\gamma))$ //)

$\ell_{|\gamma|}: T_g = R_g/\widehat{PSL_2(\mathbb{R})} \to \mathbb{R}_{>0}$ ($\because$ Lem 8.2(1))

補題8.3 $1 \neq \gamma\in\pi$, $\forall\rho\in R_g$ $\exists!\,\hat{\gamma}$: closed geodesic in $\mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho$

s.t. $(h_\rho)_*^{-1}[\hat{\gamma}] = |\gamma| \in \hat{\pi}$

このとき $\ell_{|\gamma|}(\rho)$ = length of $\hat{\gamma}$ である

証明 $\varpi: \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho$ projection = quotient map

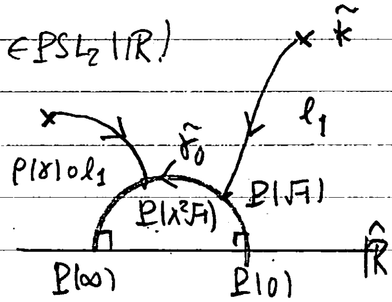
$\tilde{*}\in\mathbb{H}$ を $\varpi(\tilde{*}) = h_\rho(*)$ となるようにとる

$\rho(\gamma) = \pm P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}P^{-1}$, $\lambda>1$, $P\in PSL_2(\mathbb{R})$

(存在) $\tilde{\gamma}_0: [0,1] \to \mathbb{H}$

$t \mapsto \tilde{\gamma}_0(t) := P(e^{2t\log\lambda}\sqrt{-1})$

$\varpi\circ\tilde{\gamma}_0$: closed geodesi



$\exists\, l_1 : [0,1] \to \mathbb{H}$, path. s.t. $l_1(0) = \tilde{*}$, $l_1(1) = P(\sqrt{-1})$

このとき

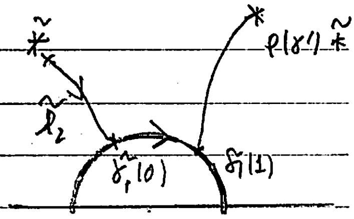
$(h_\rho)_*^{-1}[\varpi((l_1\cdot\tilde{\gamma}_0)\cdot(\rho(\gamma)\circ l_1)^{-1})] = \gamma_1 \in \pi$

だから $(h_\rho)_*^{-1}[\varpi\circ\tilde{\gamma}_0] = |\gamma| \in \hat{\pi}$ となる. $\hat{\gamma} := \varpi\circ\tilde{\gamma}_0$ とおけばよい // (存在)

このとき length of $\hat{\gamma} = 2\log\lambda = tl\,\rho(\gamma)$

(一意性) $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho$ closed geodesic

$(h_\rho)_*^{-1}[\gamma_1] = |\gamma| \in \hat{\pi}$ とする



$\exists\, l_2 : [0,1] \to \mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho$ path $l_2(0) = \varpi(\tilde{*})$

$l_2(1) = \gamma_1(0)$

$[(l_2\cdot\gamma_1)\cdot l_2^{-1}] \in \pi_1(\mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho, \varpi(\tilde{*}))$

lift をとる

$\exists\, \tilde{l}_2 : [0,1] \to \mathbb{H}$, lift of l_2, $\exists\, \hat{\gamma}_1 : [0,1] \to \mathbb{H}$ lift of γ_1 ($\Rightarrow$ geod)

$\exists\, \gamma' \in \pi$. s.t. $\tilde{l}_2(0) = \tilde{*}$, $\tilde{l}_2(1) = \hat{\gamma}_1(0)$, $\hat{\gamma}_1(1) = \rho(\gamma')(\hat{\gamma}_1(0))$

$(l_2\cdot l_1)\cdot l_2^{-1} = \varpi\circ((\tilde{l}_2\cdot\hat{\gamma}_1)\cdot(\rho(\gamma')\circ\tilde{l}_2)^{-1})$

ここで $|\gamma| = (h_\rho)_*^{-1}[\hat{\gamma}_1] = |\gamma'| \in \hat{\pi}$

つまり $\exists\,\delta \in \pi$. $\gamma' = \delta\gamma\delta^{-1}$

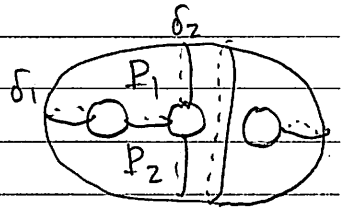
$\hat{\gamma}_1(1) = \rho(\gamma')\hat{\gamma}_0(0) = \rho(\delta)\rho(\gamma)\rho(\delta)^{-1}\tilde{\gamma}_1(0)$

$\rho(\delta)^{-1}\circ\hat{\gamma}_1$ は geodesic で $\rho(\gamma)(\rho(\delta)^{-1}\circ\hat{\gamma}_1(0)) = \rho(\delta)^{-1}\circ\tilde{\gamma}_1(1)$

ゆえに parameter をつけかえると $\rho(\delta)^{-1}\circ\tilde{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_0$

$\hat{\gamma} = \varpi\circ\hat{\gamma}_0 = \varpi\circ\rho(\delta)^{-1}\circ\hat{\gamma}_1 = \varpi\circ\hat{\gamma}_1 = \gamma_1$ // 一意性 //

$\{\delta_i\}_{i=1}^{3g-3}$: Σ_g の pants 分解



$\{P_j\}_{j=1}^{2g-2}$: Σ_g を $\{\delta_i\}_{i=1}^{3g-3}$ で切りはなして えられる pants

$(l_1,\cdots,l_{3g-3}) : \mathcal{T}_g \to (\mathbb{R}_{>0})^{3g-3}$ 全射 (∵ Thm 8.6)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_g & \to & (\mathbb{R}_{>0})^{3g-3} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \rho & \longmapsto & (l_1(\rho),\cdots,l_{3g-3}(\rho)) \end{array}$$

$l_i(\rho) = l_{\delta_i}(\rho) \in \mathbb{R}_{>0}$

$\forall \rho \in R_g$ について $h_\rho : \Sigma_g \to \mathbb{H}/\mathrm{Im}\,\rho$ を

$1 \leq {}^\forall i \leq 3g-3$ $h_\rho(\delta_i)$ が closed geodesic になるようにとり直す

(要証明 [Casson-Bleiler] Lem 2.4 p.25)

このとき $h_\rho(P_j)$ $(1 \leq j \leq 2g-2)$ は双曲 pants だが

これらは $l_1(\rho), \cdots, l_{3g-3}(\rho)$ だけで一意的に決まる (Thm 8.7)

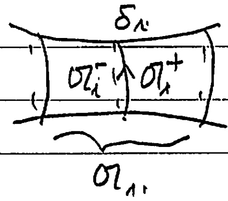
pants のはりあわせ方: twist parameter $\theta_i : T_g \to \mathbb{R}$, $(1 \leq i \leq 3g-3)$

今日は mod $\pi\mathbb{Z}$ にした $\overline{\theta_i} : T_g \to \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ を定義する

これらを定義するためには次の2種類の付加的情報が必要:

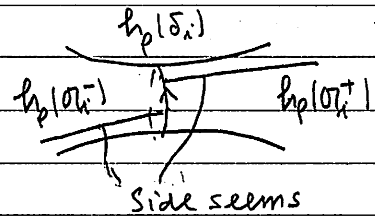
(i) 各 δ_i の向き

(ii) 各 δ_i の annulus 近傍 $\mathfrak{A}_i$ をとり、$\mathfrak{A}_i \setminus \delta_i$ の2つの連結成分に名前をつける: $\mathfrak{A}_i \setminus \delta_i = \mathfrak{A}_i^+ \sqcup \mathfrak{A}_i^-$



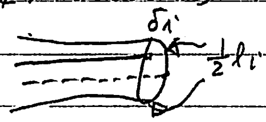
((注) Σ_g に向きが入っていないので (i)(ii) 両方必要)

$$\overline{\theta_i} : T_g \to \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$$
$$\rho \bmod \widehat{PSL_2(\mathbb{R})}$$



$$\overline{\theta_i}(\rho) := \frac{2\pi}{l_i(\rho)} \Big((h_\rho(\mathfrak{A}_i^+) \text{ の side seem}) - (h_\rho(\mathfrak{A}_i^-) \text{ の side seem}) \Big) \bmod \pi\mathbb{Z} \quad (\in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$$

2つの side seems の差は $\frac{1}{2} l_i$ なので mod $\pi\mathbb{Z}$ にして well-defined になる



かくして写像

$$\left((l_i)_{i=1}^{3g-3}, (\overline{\theta_i})_{i=1}^{3g-3} \right) : T_g \to (\mathbb{R}_+)^{3g-3} \times (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})^{3g-3}$$

がえられた。明らかに全射である。

これから次回にかけて

全単射 $(\mathbb{R}_{>0})^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3} \xrightarrow{\cong} T_g$ であって

$((\lambda_i),(\tau_i)) \mapsto ((\lambda_i),(\overline{\tau_i})) \in (\mathbb{R}_{>0})^{3g-3} \times (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})^{3g-3} \ni ((\ell_i),(\theta_i))$

但. $\overline{\tau_i} = \tau_i \bmod \pi\mathbb{Z}$

をみたすものを構成する. これが Fenchel - Nielsen 座標である

その準備として 群 G について 正則有限胞体複体上の平坦主 G 束を考える

(いまの状況では $G = PSL_2(\mathbb{R})$ である)

定義8.4 $(X, \{(e_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda})$: 正則有限胞体複体 (regular finite cell complex)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

0) X : Hausdorff空間

Λ : finite index set

1) $\forall\lambda\in\Lambda$ $\exists! n_\lambda \geq 0$. $e_\lambda \subset X$: subspace. $\varphi_\lambda : D^{n_\lambda} \to X$ 中への同相

s.t. $e_\lambda = \varphi_\lambda(\mathring{D}^{n_\lambda})$

2) $X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda$ disjoint union as sets

3) $\varphi_\lambda(\partial D^{n_\lambda}) \subset \bigcup_{n_\mu \leq n_\lambda - 1} e_\mu \ (=: X^{(n_\lambda - 1)})$

$\dim e_\lambda := n_\lambda$

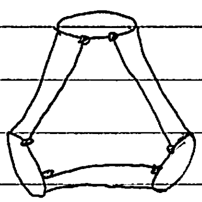
$\dim X := \max_{\lambda\in\Lambda} n_\lambda$

$\Lambda_k := \{\lambda\in\Lambda ; \dim e_\lambda = k\}$. $(0 \leq k \leq \dim X)$

$n_\lambda = k$ のとき e_λ を k-cell とよぶ

$\lambda\in\Lambda_1$ のとき $\varphi_\lambda : [-1,+1] = D^1 \to X$ である

ここで考えたいのは次の2種類の例である



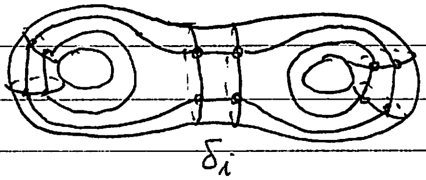
X = pants

6個の 0-cells

9個の 1-cells

2個の 2-cells

Date 20.07.08 No.



各pantsについて
6個の0-cells
9個の1-cells
2個の2-cells

各δ_iについて
2個の1-cells
2個の2-cells

1-cell e_λ と"その逆" e_λ^{-1} の列

$$e_{\lambda_1}^{\varepsilon_1} e_{\lambda_2}^{\varepsilon_2} \cdots e_{\lambda_n}^{\varepsilon_n}, \quad \lambda_i \in \Lambda_1, \ \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$$

が path であるとは

$$\varphi_{\lambda_1}(\varepsilon_1) = \varphi_{\lambda_2}(-\varepsilon_2), \ \varphi_{\lambda_2}(\varepsilon_2) = \varphi_{\lambda_3}(-\varepsilon_3), \ \ldots, \ \varphi_{\lambda_{n-1}}(\varepsilon_{n-1}) = \varphi_{\lambda_n}(-\varepsilon_n)$$

をみたすことをいう。これがある0-cell $*$ を基点とする loop であるとは、さらに

$$\varphi_{\lambda_n}(\varepsilon_n) = * = \varphi_{\lambda_1}(-\varepsilon_1)$$

をみたすことをいう

各2-cell e_μ について $\varphi_\mu(\partial D^2)$ は loop を定める。van Kampen の定理から 0-cell $*$ について $\pi_1(X, *)$ は $*$ を基点とする loop の全体を各2-cell についての $\varphi_\mu(\partial D^2)$ が自明となる関係式で商をとったものである

G を群とする(我々の状況では $G = PSL_2(\mathbb{R})$ である)

$$Z^1(X;G) \overset{\text{def}}{=} \left\{ c : \Lambda_1 \to G : \text{map} \ ; \ \begin{array}{l} \forall \mu \in \Lambda_2 \ c(\varphi_\mu(\partial D^2)) = 1 \text{ つまり} \\ \varphi_\mu(\partial D^2) \text{ の定める loop に沿って} \\ c \text{ の値の積をとると } = 1 \text{ となる} \end{array} \right\}$$

$$G^{\Lambda_0} \overset{\text{def}}{=} \{ b : \Lambda_0 \to G : \text{map} \}$$

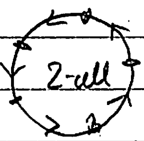
$$\underset{b}{G^{\Lambda_0}} \curvearrowright \underset{c}{Z^1(X;G)}$$

$(e_\lambda, \varphi_\lambda)$: 1-cell について

$$(b \cdot c)(e_\lambda) \overset{\text{def}}{=} b(\varphi_\lambda(-1))^{-1} c(e_\lambda) b(\varphi_\lambda(+1))$$

と定めると $\forall \mu \in \Lambda_2$

$$(b \cdot c)(\varphi_\mu(\partial D^2)) = c(\varphi_\mu(\partial D^2)) = 1$$

(∵ )

つまり $b \cdot c \in Z^1(X;G)$ である

$$H^1(X;G) \overset{\text{def}}{=} Z^1(X;G) / G^{\Lambda_0}. \quad X \text{上の平坦主}G\text{束の moduli 空間}$$

上にのべた van Kampen の定理をつかうと次がえられる

9-8

No. Date 20・07・08

定理8.5 Xが連結のとき

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(X,*),G)/G = H^1(X;G)$$

次回の準備として次を証明しておく

補題8.6 $\lambda>1$, $P,Q\in PSL_2(\mathbb{R})$について次が成立つ

(1) $\pm P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}P$

$\Longrightarrow {}^\exists a>0,\ P=\pm\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}$.

(2) $PQ=QP=\pm\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow {}^\exists a>0,\ P=\pm\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix},\ Q=\pm\begin{pmatrix}\lambda/a & 0\\ 0 & a/\lambda\end{pmatrix}$

(3) $\pm P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}Q^{-1} = \pm Q\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}P^{-1} = \pm\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow {}^\exists a>0.\ P=Q=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}$.

証明 (1) $P=\pm\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$とする

$\pm P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix}\lambda a & \lambda^{-1}b\\ \lambda c & \lambda^{-1}d\end{pmatrix}$ ゆえに $\lambda^2|b|=|b|$

$\|$ $\lambda^2|c|=|c|$

$\pm\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}P = \pm\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix}\lambda a & \lambda b\\ \lambda^{-1}c & \lambda^{-1}d\end{pmatrix}$ $\lambda^2\neq1$より $b=c=0$

$ad=ad-bc=1$ より $d=a^{-1}$, $a>0$にとり直せる //

(2) $P(QP)=(PQ)P=(QP)P$, $QP=\pm\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$だから(1)により

$P=\pm\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}$ $({}^\exists a>0)$. $Q=\pm P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}\lambda/a & 0\\ 0 & a/\lambda\end{pmatrix}$

(3) $\pm P\begin{pmatrix}\lambda^2 & 0\\ 0 & \lambda^{-2}\end{pmatrix}P^{-1} = \pm P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}Q^{-1}Q\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}P^{-1} = \pm\begin{pmatrix}\lambda^2 & 0\\ 0 & \lambda^{-2}\end{pmatrix}$ (1)より

$P=\pm\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}$ $({}^\exists a>0)$, $Q=\pm\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^{-1} & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}=P$ //

次は双曲pantsからしらべはじめる.