

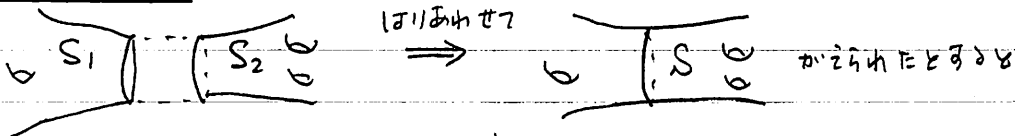
第8回, 20年7月1日

§8. pants 分解と双曲 pants

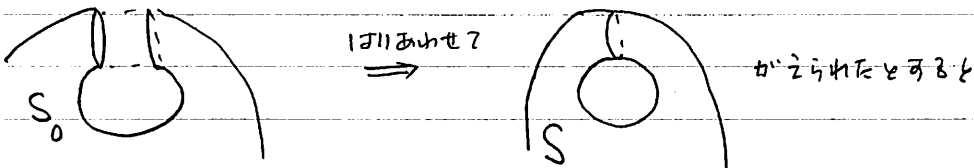
(Fenchel-Nielsen 座標の準備)

曲面の Euler 数の復習  $\chi(\cdot) : \circ$  の Euler (標) 数

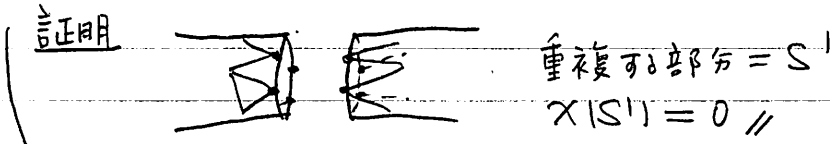
補題 8.1



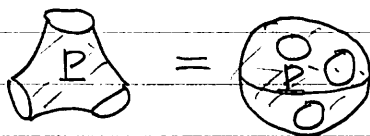
$$\chi(S) = \chi(S_1) + \chi(S_2)$$



$$\chi(S) = \chi(S_0)$$

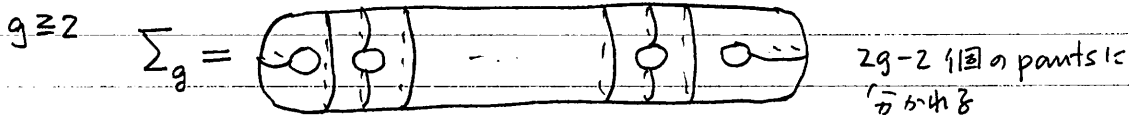


(a pair of) pants



$$\begin{aligned} \chi(P) &= -1 \\ \because P \cup D^2 \cup D^2 \cup D^2 &= S^2 \\ 2 &= \chi(S^2) = \chi(P) + 3\chi(D^2) \\ &= \chi(P) + 3 \quad // \end{aligned}$$

曲面の pants 分解 (pants decomposition)



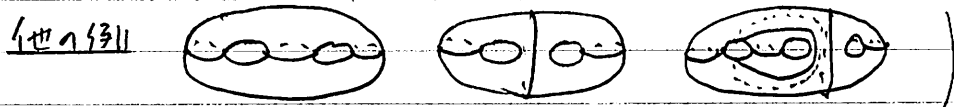
このことから Lem 8.1 と  $\chi(P) = -1$  によるから

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$$

かかか

定義 8.2  $\{\delta_i\}_{i=1}^m$  :  $\Sigma_g$  の pants 分解

- ⇔
- (0)  $\delta_i \subset \Sigma_g$  単純閉曲線 (simple closed curve, SCC),  $1 \leq i \leq m$
  - (1)  $\delta_i \cap \delta_j = \emptyset$  if  $i \neq j$
  - (2)  $\Sigma_g \setminus \bigcup_{i=1}^m \delta_i$  の各連結成分は pants に同相である



Lemma 8.1 任意 pants の個数は決まる  $-X(\Sigma_g) = 2g - 2$  である (→  $2g - 2 \geq 2$  が必要)

よって 単純閉曲線  $\{\delta_i\}_{i=1}^m$  の本数  $m$  は決まる

$$m = \frac{3}{2}(2g - 2) = 3g - 3$$

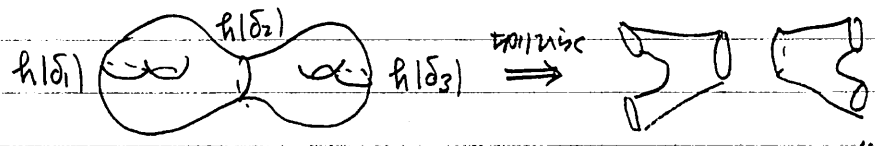
となる

$g \geq 2$   $\{\delta_i\}_{i=1}^{3g-3}$  :  $\Sigma_g$  の pants 分解,  $C$  : 種数  $g$  の閉 Riemann 面

とする.  $C$  には 双曲構造が入っている. これは 同相写像

$$h: \Sigma_g \cong C$$

が存在する.  $h(\delta_i)$  を測地線と表す.



これらの測地線に沿って  $C$  を切り取ると,  $2g - 2$  個の 双曲 pants になる.

双曲 pants ≡ (双曲構造を持った pants  $\tau$  3つの境界はすべて測地線である)

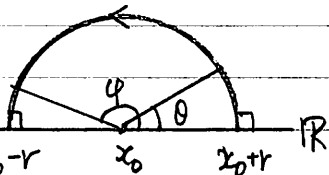
とする. 以下, 双曲 pants を完全に分類する.

その準備として  $\mathbb{H}$  上の測地線の長さ  $l$  と 2つの測地線の距離  $d$  を与えておく

補題 8.3  $0 < \theta \leq \varphi < \pi$ ,  $r > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  により 測地線

H

$$|t| = x_0 + r \cos t + \sqrt{r} \sin t, \quad \theta \leq t \leq \varphi$$



の長さは次式で与えられる。

$$\frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right| - \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \right)$$

証明

$$\int_{\theta}^{\varphi} \frac{|t|}{r \sin t} dt = \int_{\theta}^{\varphi} \frac{r}{r \sin t} dt = \int_{\theta}^{\varphi} \frac{dt}{\sin t} = \int_{\theta}^{\varphi} \frac{\sin t}{1 - \cos^2 t} dt$$

$x = \cos t$

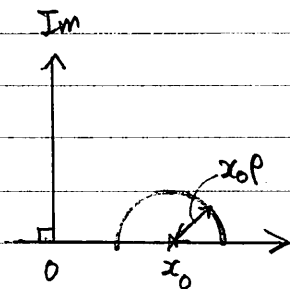
$$\int_{\cos \theta}^{\cos \varphi} \frac{1}{1 - x^2} dx = \left[ \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]_{\cos \theta}^{\cos \varphi} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right| - \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \right)$$

補題 8.4  $x_0 > 0$ ,  $0 < p < 1$  により 虚軸と 測地線

$$x_0 + x_0 p \cos \theta + \sqrt{1 - x_0^2 p^2} \sin \theta, \quad 0 < \theta < \pi$$

との距離は次式で与えられる

$$\log \left| \frac{1 + \sqrt{1 - p^2}}{p} \right|$$



証明 下図に示す虚軸と与えられた測地線とが最短測地線は

$O$  を中心とし、半径

$$\sqrt{x_0^2 - x_0^2 p^2} = x_0 \sqrt{1 - p^2}$$

の円であることと左図の  $\theta$  により

$$\cos \theta = \frac{1}{x_0} x_0 \sqrt{1 - p^2} = \sqrt{1 - p^2}$$

であることと  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  により Lemma 8.3 の距離は

$$\frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \sqrt{1 - p^2}}{1 - \sqrt{1 - p^2}} \right| = \frac{1}{2} \log \frac{(1 + \sqrt{1 - p^2})^2}{1 - (1 - p^2)} = \log \left| \frac{1 + \sqrt{1 - p^2}}{p} \right|$$

である。

$$\log \left| \frac{1 + \sqrt{1 - p^2}}{p} \right| \text{ は } 0 < p < 1 \text{ により 狭義単調減少}$$

$$\rightarrow 0 \text{ as } p \uparrow 1$$

$$\rightarrow +\infty \text{ as } p \downarrow 0$$

である。したがって可成りの正の実数値にとる

補題 8.5  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, r_1, r_2 > 0, x_2 - x_1 > r_1 + r_2$  とおす

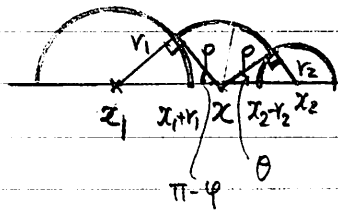
∴ 2つの 中心  $x_1$ , 半径  $r_1$  の円と  
中心  $x_2$ , 半径  $r_2$  の円との距離は

$$p = \left| \frac{1}{4} |x_2 - x_1|^2 - \frac{1}{2} (r_1^2 + r_2^2) + \frac{|r_2^2 - r_1^2|^2}{4 |x_2 - x_1|^2} \right|^{1/2}$$

$$x = \frac{1}{2} (x_1 + x_2) - \frac{r_2^2 - r_1^2}{2 |x_2 - x_1|}$$

∴  $\pi - \varphi$  次  $z^2$  と  $\bar{z}$  と  $z$  あり

$$\log |x_2 - x + p| + \log |x - x_1 + p| - \log r_2 - \log r_1$$



証明 上図に於て

$$p^2 = |x_1 - x|^2 - r_1^2 = |x_2 - x|^2 - r_2^2$$

∴ から  $x_1^2 - 2x_1x - r_1^2 = x_2^2 - 2x_2x - r_2^2, \quad 2(x_2 - x_1)x = x_2^2 - x_1^2 - r_2^2 + r_1^2$  あり

$$x = \frac{1}{2} (x_1 + x_2) - \frac{r_2^2 - r_1^2}{2 (x_2 - x_1)}$$

$$x - x_1 = \frac{1}{2} (x_2 - x_1) - \frac{r_2^2 - r_1^2}{2 (x_2 - x_1)}, \quad x_2 - x = \frac{1}{2} (x_2 - x_1) + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2 (x_2 - x_1)}$$

$$p^2 = \left| \frac{1}{2} (x_2 - x_1) - \frac{r_2^2 - r_1^2}{2 (x_2 - x_1)} \right|^2 - r_1^2 = \frac{1}{4} |x_2 - x_1|^2 - \frac{1}{2} (r_1^2 + r_2^2) + \frac{|r_2^2 - r_1^2|^2}{4 |x_2 - x_1|^2}$$

と角算ける  $\cos \theta = \frac{p}{x_2 - x}, \quad \cos \varphi = -\cos(\pi - \varphi) = \frac{p}{x_1 - x}$  ∴ から

LEM. 8.3 に於て 距離は  $z^2$  と  $\bar{z}$  と  $z$  あり

$$\frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right| - \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \right| = \frac{1}{2} \left[ \log \left| \frac{x_2 - x + p}{x_2 - x - p} \right| + \log \left| \frac{x - x_1 + p}{x - x_1 - p} \right| \right]$$

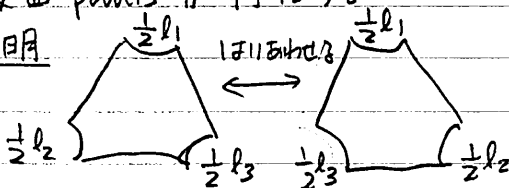
$$= \frac{1}{2} \left[ \log \frac{|x_2 - x + p|^2}{|x_2 - x|^2 - p^2} + \log \frac{|x - x_1 + p|^2}{|x - x_1|^2 - p^2} \right] = \log |x_2 - x + p| + \log |x - x_1 + p| - \log r_1 - \log r_2$$

以上の準備の F に次を述べ

定理 8.6  $\forall (l_1, l_2, l_3) \in (\mathbb{R}_{>0})^3$  ∴  $\pi$  の境界の長さ  $l_1, l_2, l_3$  あり

双曲 pants が存在する

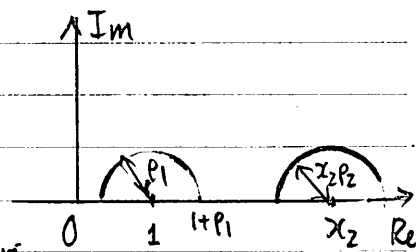
証明



測地六角形  $z$  あり  $z$  の長さ  $l_1, l_2, l_3$  あり  $z$  あり  $z$  の長さ  $l_1, l_2, l_3$  あり  $z$  あり  $z$  の長さ  $l_1, l_2, l_3$  あり

したがって、この測地六角形を2つ、 $n=4$ の三辺に各2つは別々の半円と境界の長さ $l_1, l_2, l_3$ がある双曲 pants が与えられる。  
 半円は、 $n$ 通りの測地六角形を構成する。 Lem 8.4 より  
 $1 \leq k \leq 2, \exists p_k \in ]0, 1[, \forall x_0 \in \mathbb{R} > 0.$

中心 $x_0$ , 半径 $x_0 p_k$ の円と虚軸との距離は $\frac{1}{2} l_k$ とある。  
 $\left( \frac{1}{2} l_k = \log \left( \frac{1 + \sqrt{1 - p_k^2}}{p_k} \right) \right)$  により  $p_k \leq x_0$   
 $k=2$ : Lem 8.5 により  $x_1 = 1, r_1 = p_1, x_2 = x_2 p_2 \leq 1$   
 $x_2 \leq \frac{1+p_1}{1-p_2} < x_2 < +\infty$  の範囲で動かせる



Lem 8.4 より  $p \uparrow$  とすると距離  $\downarrow 0$  とはする

$x_2 \downarrow \frac{1+p_1}{1-p_2}$  だと2つの円の距離  $\downarrow 0$  とある

または  $x_2 \uparrow +\infty$  だと2つの円の距離  $\uparrow +\infty$  と示せば

中間値の定理より  $\frac{1+p_1}{1-p_2} < x_2 < +\infty$  により2つの円の距離  $= \frac{1}{2} l_3$  となる

Lem 8.5 #1

$$\begin{aligned} |2\text{つの円の距離}| &= \log |x_2 - x_1 + p| + \log |x - x_1 + p| - \log r_2 - \log r_1 \\ &\geq \log |x - x_1 + p| - \log r_1 \quad \left( \begin{array}{l} \text{"1" 同不等式 #1} \\ | \log p_1 | \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$x_2 - x_1 + p \geq r_2$

$$\begin{aligned} &\geq \log |x - x_1 + p| \geq \log p = \frac{1}{2} \log p^2 \\ &= \frac{1}{2} \log ((x - x_1)^2 - r_1^2) \end{aligned}$$

である。  $k=2$ :  $x_2 \uparrow +\infty$  だと  $x - x_1 \uparrow +\infty$  と示せばよい

$$\begin{aligned} x - x_1 &= \frac{1}{2} |x_2 - x_1| - \frac{r_2^2 - r_1^2}{2|x_2 - x_1|} = \frac{1}{2} (x_2 - 1) - \frac{x_2^2 p_2^2 - p_1^2}{2(x_2 - 1)} \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{p_2^2}{x_2 - 1} \right) x_2 - \frac{1}{2} - \frac{p_1^2}{2(x_2 - 1)} \end{aligned}$$

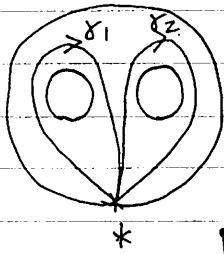
$\downarrow x_2 \uparrow +\infty$   
/

$\downarrow x_2 \uparrow +\infty$   
0

つまり  $x_2 \uparrow +\infty$  だと、 $x - x_1 \uparrow +\infty$  である。これは示す必要はない //

以上より3つの境界から与えられる長さを2つ双曲 pants の存在がわかる

次に双曲 pants の一意性を示す  
 基点  $* \in \partial P \ni \gamma$



$\pi_1(P, *) = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$  自由群

つまり  $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle \neq 1$  である

pants の double DP を考える

$DP = \begin{matrix} P' \\ \text{---} \\ P \end{matrix} = P \cup_{\partial P} P' \approx \Sigma_2$   
 $P' = \text{a copy of } P$

包含準同型  $\pi_1(P, *) \rightarrow \pi_1(DP, *)$  は単射である

∴  $\pi_1(DP, *) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 : \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_2 \beta_2 \alpha_2^{-1} \beta_2^{-1} = 1 \rangle$   
 且  $\gamma_1, \gamma_2$  の word が DP で trivial であることは  $\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_2 \beta_2$  の表し方による。  $\gamma_1, \gamma_2$  は  $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  の word に書けるから  $\gamma$  の word は  $\alpha$  の word である //

P の双曲構造を用いて DP は種数 2 の Riemann 面である  
 $\gamma = \tau \ni p \in R_2 \quad H / \text{Imp} = DP$  である  $\pi_1(P, *)$  の  $p$  を制限

$\rho|_{\pi_1(P, *)} : \pi_1(P, *) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  は単射群準同型である

$\rho(\pi_1(P, *)) \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  は離散的である  $1 \neq \forall \gamma \in \pi_1(P, *)$

$\rho(\gamma) : \text{双曲的}$  である

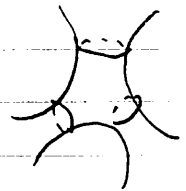
よって  $\rho(\gamma_1), \rho(\gamma_2) : \text{双曲的}$

$\text{Fix}(\rho(\gamma_1)) \cap \text{Fix}(\rho(\gamma_2)) = \emptyset$  である

逆に  $\rho$  が決まれば  $H / \rho(\pi_1(P, *))$  により

$\rho(\gamma_1), \rho(\gamma_2), \rho(\gamma_1 \gamma_2)$  に対応する測地線  $\gamma$

が  $\pi_1$  および双曲 pants を与える



定理 8.7 双曲 pants は境界の長さだけが一意的に決まる

証明  $\rho$  が  $\widehat{\text{PSL}}_2(\mathbb{R}) = \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \cup \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \tau$  における共役を除いて一意に決まることを示せばよい

共役運動

$$p(\delta_1) = \pm \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \lambda > 1. \quad 2 \log \lambda = \ell_1$$

$\ell_2 \neq 0, 2 \log \mu = \ell_2$  かつ  $\mu > 1$  ならば,  $\exists \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$

$$p(\delta_2) = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

かつ  $\tau: z \mapsto -\bar{z} \in \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} (t > 0)$  は共役運動で  $p(\delta_2)$  は attracting fixed point  $\frac{a}{c}$  は  $+1$  であるから  $(\because) \text{Fix } p(\delta_2) \cap \{0, \infty\} = \emptyset$

かつ  $a = c \neq 0$  である

$$\therefore \text{tr } p(\delta_1 \delta_2) = e^{\frac{1}{2} \ell_3} + e^{-\frac{1}{2} \ell_3} \quad \ell_3 \text{ は } \tau \text{ の長}$$

$$\text{tr}(p(\delta_1) p(\delta_2)) = \text{tr} \left( \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \left( \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda^{-1} c & \lambda^{-1} d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu d & -\mu b \\ -\mu^{-1} c & \mu^{-1} a \end{pmatrix} \right)$$

$$= \lambda \mu a d - \lambda \mu^{-1} b c + \lambda^{-1} \mu^{-1} a d - \lambda^{-1} \mu b c = (\lambda \mu + \lambda^{-1} \mu^{-1}) a d - (\lambda \mu^{-1} + \lambda^{-1} \mu) b c$$

$$= (\lambda \mu + \lambda^{-1} \mu^{-1})(1 + bc) - (\lambda \mu^{-1} + \lambda^{-1} \mu) b c \quad (\because ad - bc = 1)$$

$$= \lambda \mu + \lambda^{-1} \mu^{-1} + \underbrace{(\lambda - \lambda^{-1})}_{>0} \underbrace{(\mu - \mu^{-1})}_{>0} b c$$

よって  $bc$  は  $-1$  より大きい実数である。ゆえに  $bc = s < 0$ 。

$$cd = ad = 1 + bc = 1 + s \quad \text{かつ} \quad b = \frac{1}{2} s, \quad d = \frac{1}{2} (1 + s), \quad a = c \quad \text{である}$$

$$p(\delta_2) = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} c & \frac{1}{2} s \\ c & \frac{1}{2} (1 + s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (1 + s) & -\frac{1}{2} s \\ -c & c \end{pmatrix}$$

$$= \pm \begin{pmatrix} c \mu & \frac{1}{2} c \mu s \\ c \mu & \frac{1}{2} c \mu (1 + s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (1 + s) & -\frac{1}{2} s \\ -c & c \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \mu (1 + s) - \frac{1}{2} s & -\mu s + \frac{1}{2} s \\ \mu (1 + s) - \frac{1}{2} \mu (1 + s) & -\mu s + \frac{1}{2} \mu (1 + s) \end{pmatrix}$$

かつ  $p(\delta_2)$  は  $-1$  より大きい実数である。ゆえに  $\mu > 1$  である。

$\ell_1, \ell_2$  は可成りの双曲 points は Thm 8.6 で構成して  $\ell_3$  は  $\mathbb{R}$  上の

系 8.8 双曲 points には必ず向きが逆になる isometry

の fixed point が境界同士を区別する線系である

かつ  $\ell_3 \neq 0$

ゆえに side seam かつ  $\ell_3 > 0$  である

