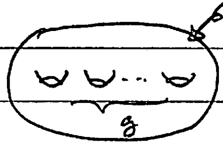
第7回, 20年6月24日

§7. Teichmüller空間とFricke座標

Fricke座標については次の参考書のやり方に従った:
今吉・谷口「タイヒミュラー空間論」日本評論社
(英訳あり, Springer刊行)

前回までの復習

表面だけ

$g \geq 0$ $\Sigma_g =$  , $* \in \Sigma_g$ をとる

$\pi_1(\Sigma_g, *) = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_g \ ; \ \prod_{i=1}^{g} \alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1} = 1 \rangle$

C: 種数 g 閉Riemann面

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 1) C: Riemann面
2) $C \approx \Sigma_g$ 同相

$M_g \overset{\text{def}}{=} \{ C : \text{種数 } g \text{ 閉Riemann面} \} / \text{正則同型}$, Riemann moduli空間

$R_g \overset{\text{def}}{=} \{ \rho : \pi_1(\Sigma_g, *) \to PSL_2(\mathbb{R}) \ ; \ \text{単射群準同型}, \ \mathrm{Im}\,\rho < PSL_2(\mathbb{R}) \text{ discrete} \}$

((注) ここでは ρ の向きを考えていない)

Thm 6.5. $g \geq 2$ のとき

$$\mathrm{Aut}(\pi_1(\Sigma_g, *)) \backslash R_g / PSL_2(\mathbb{R}) \cong M_g$$

向きのことは後まわしにしたいので向きを逆にする $\mathbb{H}$ の isometry を考える

ここだけの記号 $\tau : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto -\bar{z}$ 双曲計量を保つ

($\because$ $|\tau^*(dz)| = |-d\bar{z}| = |dz|$, $\tau^* \mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\, z$)

$\forall A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$, $\tau A \tau^{-1} = \pm \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$

$\left(\because \ -\overline{\left(\frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d} \right)} = -\frac{-az+b}{-cz+d} = \frac{az-b}{-cz+d} \ // \right)$

$\widehat{PSL_2(\mathbb{R})} := PSL_2(\mathbb{R}) \cup (PSL_2(\mathbb{R}) \circ \tau)$ 群となる ($\because$ $\tau A \tau^{-1} \in PSL_2(\mathbb{R})$)

No. Date 20·06·24

$T_g \overset{\mathrm{def}}{=} R_g / \widehat{PSL_2(\mathbb{R})}$ 種数g(閉Riemann面の)Teichmüller空間

- 事実として T_g は manifold だが $\mathbb{M}_g$ は orbifold である
- T_g の方が $\mathbb{M}_g$ よりも研究の手がかりが沢山ある

今日の目標: Fricke座標とよばれる単射 $\mathcal{F}_g : T_g \to \mathbb{R}^{6g-6}$ を構成する

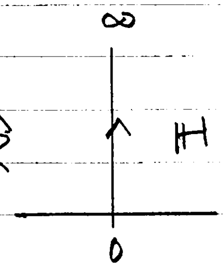
その準備として

双曲元について考える（復習 $\forall \rho \in R_g$, $1 \neq \forall A \in \mathrm{Im}\,\rho$, A: 双曲的である）

一般に $A \in PSL_2(\mathbb{R})$ 双曲元（つまり $|\mathrm{tr}\,A| \gneqq 2$）について

$\exists P \in PSL_2(\mathbb{R})$, $\exists \lambda > 1$, $A = \pm P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} P^{-1}$

$0, \infty \in \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \partial \mathbb{H}$ について



$AP(0) = P(\lambda^2 0) = P(0)$ $\in \hat{\mathbb{R}}$ であるから

$AP(\infty) = P(\lambda^2 \infty) = P(\infty)$

$\mathrm{Fix}(A) := \{ z \in \hat{\mathbb{C}} : Az = z \} = \{ P(0) \overset{\neq}{,} P(\infty) \} \subset \hat{\mathbb{R}}$

とくに $\# \mathrm{Fix}(A) = 2$ である

$\forall z \in \mathbb{H}$ $\displaystyle \lim_{n \to \infty} A^n(z) = \lim_{n \to \infty} P(\lambda^{2n} P^{-1}(z)) = P(\infty)$

$\displaystyle \lim_{n \to -\infty} A^n(z) = \lim_{n \to -\infty} P(\lambda^{2n} P^{-1}(z)) = P(0)$

$P(\infty)$: attracting fixed point of A
$P(0)$: repelling fixed point of A
とよばれる

補題7.1. $A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$, $|a+d| \gneqq 2$ つまり双曲的とすると

$$A \text{ の attracting fixed point} = \frac{a-d+\sqrt{|a+d|^2-4}}{2c}$$

$$A \text{ の repelling fixed point} = \frac{a-d-\sqrt{|a+d|^2-4}}{2c}$$

$\in \hat{\mathbb{R}}$

である. とくに attracting fixed point と repelling fixed point をとる写像

$$\{ A \in PSL_2(\mathbb{R}) : |\mathrm{tr}\,A| \gneqq 2 \} \to \hat{\mathbb{R}} \times \hat{\mathbb{R}}$$

は C^∞ 写像である

証明 $\det\begin{pmatrix}\lambda-a & -b\\ -c & \lambda-d\end{pmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-d)-bc=\lambda^2-(a+d)\lambda+1$ だから固有値は

$$\lambda_\pm := \frac{a+d\pm\sqrt{(a+d)^2-4}}{2}$$

である. $\lambda_+>\lambda_-$, $\lambda_+\lambda_-=1$ より $\lambda_+>1$ である

$$\begin{pmatrix}\lambda_\pm-a & -b\\ -c & \lambda_\pm-d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_\pm-d\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_\pm-a & -b\\ -c & \lambda_\pm-d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ \lambda_\pm-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

だから $x_\pm := \dfrac{b}{\lambda_\pm-a}=\dfrac{\lambda_\pm-d}{c}=\dfrac{a-d\pm\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}$ とおくと x_+ が attracting で x_- は repelling な fixed point である //

補題 7.2 $A, B\in PSL_2(\mathbb{R})$ ともに双曲的とする

(1) $\#(\mathrm{Fix}(A)\cap \mathrm{Fix}(B))=2$ つまり $\mathrm{Fix}(A)=\mathrm{Fix}(B)$ のとき

$ABA^{-1}B^{-1}=1$ つまり A と B は可換である

(2) $\#(\mathrm{Fix}A\cap \mathrm{Fix}(B))=1$ のとき

$ABA^{-1}B^{-1}$ は $\neq 1$ かつ放物的である

とくに $ABA^{-1}B$ が双曲的ならば $\mathrm{Fix}(A)\cap\mathrm{Fix}(B)=\phi$ である.

証明 (1) このとき $\mathrm{Fix}(A)=\mathrm{Fix}(B)=\{0,\infty\}$ としてよい. すると

$$A=\pm\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix},\quad B=\pm\begin{pmatrix}\mu & 0\\ 0 & \mu^{-1}\end{pmatrix},\quad \lambda\neq 1, \mu\neq 1$$

となるから $ABA^{-1}B^{-1}=\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ である.

(2) $\mathrm{Fix}(A)=\{0,\infty\}$ かつ $\mathrm{Fix}(A)\cap\mathrm{Fix}(B)=\{\infty\}$ としてよい

$$A=\pm\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix},\quad B=\pm\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix},\quad \lambda^2\neq 0, 1,\ a\neq 0$$

と表わされる. $0\notin\mathrm{Fix}(B)$ より $b\neq 0$ である. このとき

$$ABA^{-1}B^{-1}=\pm\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^{-1} & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^{-1} & -b\\ 0 & a\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}\lambda a & \lambda b\\ 0 & \lambda^{-1}a^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^{-1}a^{-1} & -\lambda^{-1}b\\ 0 & \lambda a\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & (\lambda^2-1)ab\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad (\lambda^2-1)ab\neq 0$$

であるから $ABA^{-1}B^{-1}\neq 1=\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ かつ放物的である //

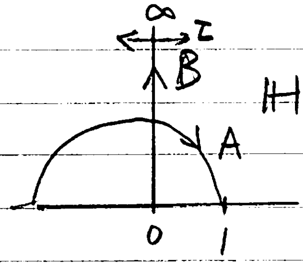
ここだけの記号

$$\mathrm{Hyp} := \left\{(A,B)\in PSL_2(\mathbb{R})\,;\ \begin{matrix}|\mathrm{tr}A|, |\mathrm{tr}B|, |\mathrm{tr}ABA^{-1}B^{-1}|\neq 2\\ \text{つまり } A, B, ABA^{-1}B^{-1}: \text{双曲的}\end{matrix}\right\} \underset{\text{open}}{\subset} PSL_2(\mathbb{R})\times PSL_2(\mathbb{R})$$

補題7.3 次の写像は C^∞ かつ単射である

$$\Phi : Hyp \to PSL_2(\mathbb{R}) \times \widehat{PSL_2(\mathbb{R})},\quad (A,B) \mapsto (ABA^{-1}B^{-1}, P)$$

ここで $P(\text{repelling fixed point of } B) = 0$
$P(\text{attracting fixed point of } A) = 1$
$P(\text{attracting fixed point of } B) = \infty$



((注) $ABA^{-1}B^{-1}$: 双曲的 より $\mathrm{Fix}\,A \cap \mathrm{Fix}\,B = \infty$ である
$\widehat{PSL_2(\mathbb{R})}$ は $\hat{\mathbb{R}}$ 上の相異なる3点を $0, 1, \infty$ にうつす)
$\mathbb{H}$ を保って

証明 C^∞ であることは Lem 7.1 と非調和比から明らかである。あとは単射性を示す
つまり $ABA^{-1}B^{-1}$ と P から A と B が回復することを示す
$P \in PSL_2(\mathbb{R})\circ\tau$ の場合には、A, B の代わりに $\tau A\tau^{-1}$, $\tau B\tau^{-1}$ を考えれば
$P \in PSL_2(\mathbb{R})$ の場合に帰着できる そこで $P \in PSL_2(\mathbb{R})$ としてよい
PBP^{-1} は 0 を repelling, ∞ を attracting な fixed point にもつから

$$^\exists\lambda > 1.\quad PBP^{-1} = \pm\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$$

である。また $PAP^{-1} = \pm\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$ とおくと次が成り立つ

$$p + q = r + s \quad \cdots\cdots ①$$

$(\because\ PAP^{-1}(1) = 1)$

$$rq \neq 0 \quad \cdots\cdots ②$$

$(\because)$ $r = 0$ なら $\infty \in \mathrm{Fix}(PAP^{-1})$, $q = 0$ なら $0 \in \mathrm{Fix}(PAP^{-1})$ となり
いずれにせよ $\mathrm{Fix}(PAP^{-1}) \cap \mathrm{Fix}(PBP^{-1}) \neq \phi$ となる
これは $PABA^{-1}B^{-1}P^{-1}$: 双曲的という仮定に反する //

$$PBAB^{-1}A^{-1}P^{-1} = (PABA^{-1}B^{-1}P^{-1})^{-1} = \pm\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \quad \text{とおく}$$

λ と $\pm\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$ が a, b, c, d から求まることを示せばよい。
いま

$$\pm\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} PAP^{-1} = PBP^{-1}PAP^{-1}PBP^{-1}$$

であるが

$$(\text{左辺}) = \pm\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix}ap + br & aq + bs\\ cp + dr & cq + ds\end{pmatrix}$$

$$(\text{右辺}) = \pm \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} \lambda p & \lambda q \\ \lambda^{-1} r & \lambda^{-1} s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} p & \lambda^2 q \\ \lambda^{-2} r & s \end{vmatrix}$$

だから必要なら $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ の符号をとりかえて

$p = ap + br$, $\lambda^2 q = aq + bs$, $\lambda^{-2} r = cp + dr$, $s = cq + ds$ とくに

$$(a-1)p + br = 0 \quad \cdots ③$$

$$(d-\lambda^{-2})r + cp = 0 \quad \cdots ④$$

$$(d-1)s + cq = 0 \quad \cdots ⑤$$

となる③④より $\begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-\lambda^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるが②より $r \neq 0$ だから

$$0 = \det \begin{vmatrix} a-1 & b \\ c & d-\lambda^{-2} \end{vmatrix} = (a-1)(d-\lambda^{-2}) - bc = ad - d - \lambda^{-2}a + \lambda^{-2} - bc$$

$$= (1-a)\lambda^{-2} - d + 1$$

となる。ゆえに $a = 1 \Leftrightarrow d = 1$ であるが、これらが成立つと

$2 = |a+d| = |\operatorname{tr}(ABA^{-1}B^{-1})^{-1}|$ となって $ABA^{-1}B^{-1}$: 双曲的に反する

ゆえに $a \neq 1$ かつ $d \neq 1$ であって

$$\lambda = \sqrt{\left|\frac{1-a}{1-d}\right|}, \quad a \neq 1,\ d \neq 1$$

と求まる。③より $p = \dfrac{br}{1-a}$、⑤より $s = \dfrac{cq}{1-d}$ となる これを①に代入して

$$\frac{br}{1-a} + q = r + \frac{cq}{1-d} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{b-1+a}{1-a}\right) r = \left(\frac{c-1+d}{1-d}\right) q$$

となる ここで $c+d=1$ とすると $a \neq 1$, $r \neq 0$ より $a+b=1$ となり

$$1 = ad - bc = ad - (1-a)(1-d) = a+d-1$$

ゆえに

$$2 = |a+d| = |\operatorname{tr}((ABA^{-1}B^{-1})^{-1})|$$

となって $ABA^{-1}B^{-1}$: 双曲的に反する ゆえに $c+d \neq 1$ であり

$$q = \frac{(1-d)(a+b-1)}{(1-a)(c+d-1)} r$$

ととける あとは $1 = ps - qr = r^2(\cdots)$ により r が符号を除き解ける

以上で単射性が示された // Lem 7.3

No. Date 20・06・24

$\pi_1(\Sigma_g, *) = \langle \alpha_1, \cdots \alpha_g, \beta_1, \cdots \beta_g \,;\, \prod_{i=1}^{g} \alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1} = 1 \rangle$ にもどる.

補題7.4 $g = 2$ とする. このとき $\forall \gamma, \forall \delta \in \{\alpha_1, \cdots \alpha_g, \beta_1, \cdots \beta_g\}$ について
$\gamma \neq \delta$ ならば γ と δ は可換ではない

証明 $\{\gamma, \delta\}$ が $i \neq j$ のときの $\{\alpha_i, \alpha_j\}$, $\{\beta_i, \beta_j\}$, $\{\alpha_i, \beta_j\}$ については
Lem 4.5 と同じやり方で非可換性が証明できる
$i = j$ のときの α_i と β_i が非可換であることを示せばよい. $g \geq 2$ より
$j \neq i$ をとることができる. 正則行列 $P, Q \in GL_m(\mathbb{R})$ で $PQ \neq QP$
をみたすものをとる. $PQP^{-1}Q^{-1}QPQ^{-1}P^{-1} = E$ だから $1 \leq k \leq g$ について

$$f(\alpha_k) = \begin{cases} P & \text{if } k = i \\ Q & \text{if } k = j \\ E & \text{if } k \neq i, j \end{cases} \qquad f(\beta_k) = \begin{cases} Q & \text{if } k = i \\ P & \text{if } k = j \\ E & \text{if } k \neq i, j \end{cases}$$

をみたす群準同型 $f : \pi_1(\Sigma_g, *) \to GL_m(\mathbb{R})$ が定義される
このとき $f(\alpha_i \beta_i) = PQ \neq QP = f(\beta_i \alpha_i)$ だから $\alpha_i \beta_i \neq \beta_i \alpha_i$ である
以上で補題が示された //

系7.5 $\forall \rho \in R_g$, $\forall \gamma \neq \forall \delta \in \{\alpha_1, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_g\}$ について

$$\mathrm{Fix}(\rho(\gamma)) \cap \mathrm{Fix}(\rho(\delta)) = \phi$$

証明 Lem 7.4 より $\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1} \neq 1$ だから Thm 5.11 より $\rho(\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1})$: 双曲的である
ゆえに Lem 7.2 から $\mathrm{Fix}(\rho(\gamma)) \cap \mathrm{Fix}(\rho(\delta)) = \phi$ である //

ここだけの記号

$$R_g' := \left\{ \rho \in \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g, *), PSL_2(\mathbb{R})) \,;\, \begin{array}{l} \rho(\alpha_g), \rho(\beta_g), \rho(\alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1}) \text{ すべて双曲的} \\ 1 \leq {}^\forall i \leq g-1, \ \mathrm{Fix}\, \rho(\alpha_i) \cap \mathrm{Fix}\, \rho(\beta_g) = \phi \\ \mathrm{Fix}\, \rho(\beta_i) \cap \mathrm{Fix}\, \rho(\beta_g) = \phi \end{array} \right\}$$

$\left(\begin{array}{c} R_g' \\ \cup \\ R_g \end{array} \text{である} \right)$

$\rho \in R_g'$ について $(\rho(\alpha_g), \rho(\beta_g)) \in \mathrm{Hyp}$ だから $P_\rho \in \widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ を

$$\Phi(\rho(\alpha_g), \rho(\beta_g)) = (*, P_\rho)$$

によって定める

Date 20・06・24 No.

R_g' の定義の条件から $1 \le {}^\forall i \le g-1$ について $P_\rho \rho(\alpha_i) P_\rho^{-1}, P_\rho \rho(\beta_i) P_\rho^{-1}$ は ∞ を固定点にもたない。そこで

$$P_\rho \rho(\alpha_i) P_\rho^{-1} = \pm \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}, \quad c_i > 0, \quad a_i d_i - b_i c_i = 1$$

$$P_\rho \rho(\beta_i) P_\rho^{-1} = \pm \begin{pmatrix} a_i' & b_i' \\ c_i' & d_i' \end{pmatrix}, \quad c_i' > 0, \quad a_i' d_i' - b_i' c_i' = 1$$

と一通りに表わされる。そこで写像

$$\mathcal{F}_g : R_g' \to \mathbb{R}^{6g-6}, \quad \rho \mapsto ((a_i, c_i, d_i), (a_i', c_i', d_i'))_{i=1}^{g-1}$$

が定まる。これを <u>Fricke 座標</u>(Fricke coordinate)とよぶ

<u>定理7.6</u> $\mathcal{F}_g : R_g' / \widehat{PSL_2(\mathbb{R})} \to \mathbb{R}^{6g-6}$ は単射である

<u>証明</u> $\mathcal{F}_g(\rho)$ から $\gamma \in \pi_1(\Sigma_g, *) \mapsto P_\rho \rho(\gamma) P_\rho^{-1}$ が回復することを示せばよい

γ としては生成元 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{g-1}, \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_{g-1}, \beta_g$ だけ回復すればよい

$1 \le i \le g-1$ については、$c_i > 0$, $c_i' > 0$ より $b_i = \dfrac{a_i d_i - 1}{c_i}$, $b_i' = \dfrac{a_i' d_i' - 1}{c_i'}$ と求まる

のこるは $P_\rho \rho(\alpha_g) P_\rho^{-1}$ と $P_\rho \rho(\beta_g) P_\rho^{-1}$ である

$1 \le i \le g-1$ については求まっているから

$$P_\rho \rho(\alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1}) P_\rho^{-1} = P_\rho \rho\left(\left(\prod_{i=1}^{g-1} \alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1}\right)^{-1}\right) P_\rho^{-1}$$

も求まっている。そこで Lem 7.3 から $P_\rho \rho(\alpha_g) P_\rho^{-1}$, $P_\rho \rho(\beta_g) P_\rho^{-1}$ も

$\mathcal{F}_g(\rho) = ((a_i, c_i, d_i), (a_i', c_i', d_i'))_{i=1}^{g}$ から求まる //

<u>系7.7</u> Fricke 座標

$$\mathcal{F}_g : T_g \to \mathbb{R}^{6g-6}$$

は単射である。