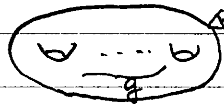
第6回, 20年6月17日

§6. Riemann moduli 空間.

表面だけ

$g \geq 0$. $\Sigma_g =$  $* \in \Sigma_g$ をとる

C: <u>種数 g 閉 Riemann 面</u> (closed Riemann surface of genus g)

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ 1) C: Riemann 面

2) $C \approx \Sigma_g$ 同相

$\mathbb{M}_g \overset{def}{=} \{C : \text{種数 } g \text{ 閉 Riemann 面}\}/_{\text{正則同型}}$ Riemann moduli 空間

$\ni$ [C]: C の正則同型類

$\mathbb{M}_0 = \{[\mathbb{CP}^1]\}$, $\mathbb{M}_1 = \mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$

以下 $g \geq 2$ とする。このときの $\mathbb{M}_g$ と双曲幾何との関係を調べる

C: 種数 g 閉 Riemann 面, $g \geq 2$

$\pi: \tilde{C} \to C$ 普遍被覆空間 とする

<u>前回までにやったこと</u> (Thm 5.8, Lem 5.5, Thm 5.10, Thm 5.11, Lem 5.1)

$\tilde{C} \cong \mathbb{H}$ (正則同型)

$\exists \rho : \pi_1(\Sigma_g, *) \to PSL_2(\mathbb{R})$ 単射準同型

$\mathrm{Im}\,\rho \subset PSL_2(\mathbb{R})$ 離散部分群

$\mathbb{H}/\mathrm{Im}\,\rho \cong C$ (正則同型)

$1 \neq {}^\forall \gamma \in \mathrm{Im}\,\rho$, γ: 双曲的

$\mathrm{Im}\,\rho \curvearrowright \mathbb{H}$ 自由作用

ここで 群 Γ の $\mathbb{H}$ への作用が <u>自由</u> (free) であるとは

$\gamma \in \Gamma$, $x \in \mathbb{H}$. $\gamma x = x \Rightarrow \gamma = 1$

をみたすことをいう

逆に 離散部分群 $\Gamma < PSL_2(\mathbb{R})$ について Γ の $\mathbb{H}$ への作用が自由ならば $\mathbb{H}/\Gamma$ は Riemann 面となるか？

定理6.1 $\Gamma < PSL_2(\mathbb{R})$ 離散部分群
作用 $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}$ は自由である
$\Rightarrow$ (1) $\mathbb{H}/\Gamma$: Hausdorff空間
(2) $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma,\ x \mapsto \pi(x) := x \bmod \Gamma$, 普遍被覆空間
(3) $\pi_1(\mathbb{H}/\Gamma) \cong \Gamma$
(4) $\mathbb{H}/\Gamma$: Riemann面で π は局所双正則である

証明 $G = PSL_2(\mathbb{R})$ と略記する.

Step 1 $1 \in {}^{\exists}O \overset{\text{open}}{\subset} G,\ \forall x \in G,\ \#(\Gamma \cap xO) \leqq 1$

(pf) $\nu : G \times G \to G,\ (x, y) \mapsto x^{-1}y$ とする. ν は連続である
Γ は離散的だから $1 \in {}^{\exists}O' \overset{\text{open}}{\subset} G,\ \Gamma \cap O' = \{1\}$ である
$(1, 1) \in \nu^{-1}(O') \overset{\text{open}}{\subset} G \times G$ より $1 \in {}^{\exists}O \overset{\text{open}}{\subset} G,\ O \times O \subset \nu^{-1}(O')$
このとき $x \in G,\ \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma \cap xO$ とすると, $\gamma_1^{-1}\gamma_2 \in \nu(O \times O) \subset O'$
ゆえに $1 = \gamma_1^{-1}\gamma_2$ つまり $\gamma_1 = \gamma_2$ となる. ゆえに $\#(\Gamma \cap xO) \leqq 1$ である //

Step 2 $\forall K \subset \mathbb{H}$ compact subspace
$$\#\{\gamma \in \Gamma : K \cap \gamma K \neq \phi\} \lneqq \infty$$

(pf) $\sqrt{-1} \in \mathbb{H}$ について $\varpi : G \to \mathbb{H},\ x \mapsto x\sqrt{-1}$, を考える
$\varpi^{-1}(K) \subset G$: compact
(∵) $G \overset{\cong}{\to} ST\mathbb{H}$ $\quad x \mapsto x_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{\sqrt{-1}}\right)$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "\varpi"'] & ST\mathbb{H} \arrow[d, "\text{projection}"] \\ & \mathbb{H} \end{tikzcd}$$

$ST\mathbb{H} \approx \mathbb{H} \times S^1$ より
$\varpi^{-1}(K) \approx \underbrace{K}_{\text{cpt}} \times \underbrace{S^1}_{\text{cpt}}$: compact //

$\{\gamma \in \Gamma : K \cap \gamma K \neq \phi\} \subset \{\gamma \in \Gamma : \varpi^{-1}(K) \cap \gamma\varpi^{-1}(K) \neq \phi\}$
(∵) $K \cap \gamma K \neq \phi$ とする. ${}^{\exists}k_1, {}^{\exists}k_2 \in K,\ k_2 = \gamma k_1$
${}^{\exists}x_1, {}^{\exists}x_2 \in G$ $\quad k_1 = x_1\sqrt{-1},\ k_2 = x_2\sqrt{-1}$ とくに $x_1, x_2 \in \varpi^{-1}(K)$
$x_2\sqrt{-1} = k_2 = \gamma k_1 = \gamma x_1\sqrt{-1}$, $\quad x_2^{-1}\gamma x_1\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$
${}^{\exists}\theta \in \mathbb{R}$ $\quad x_2^{-1}\gamma x_1 = \pm\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad$ (∵ Lem 1.5(2))
$$\gamma x_1 = x_2\left(\pm\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right) \in \varpi^{-1}(K)$$
ゆえに $\varpi^{-1}(K) \cap \gamma\varpi^{-1}(K) \neq \phi$ //

ゆえに $\#\{\gamma\in\Gamma : \varpi^{-1}(K)\cap\gamma\varpi^{-1}(K)\neq\phi\} \lneq \infty$ を示せばよい

Step 1 の $v : (x,y)\mapsto x^{-1}y$ について

$$L := v\left((\varpi^{-1}(K))^{-1}\times(\varpi^{-1}(K))^{-1}\right) = \{xy^{-1} ; x,y\in\varpi^{-1}(K)\}\subset G$$

とおく. L : compact (∵ $(\varpi^{-1}(K))^{-1}$: compact)

ゆえに Step 1 の O について $\exists x_1,\dots,\exists x_m\in L$, $L\subset\bigcup_{i=1}^{m} x_i O$

O のとり方から $\#(L\cap\Gamma)\leq m \lneq +\infty$ である

いま $\gamma\in\Gamma$ が $\varpi^{-1}(K)\cap\gamma\varpi^{-1}(K)\neq\phi$ とする

$\exists y_1, \exists y_2\in\varpi^{-1}(K)$ $y_1=\gamma y_2$ である. そこで

$\gamma = y_1 y_2^{-1}\in L$ ゆえに $\gamma\in L\cap\Gamma$ である.

ゆえに $\#\{\gamma\in\Gamma : \varpi^{-1}(K)\cap\gamma\varpi^{-1}(K)\neq\phi\}\leq\#(L\cap\Gamma)\leq m\lneq+\infty$ //

Step2

Step 3 $\mathbb{H}/\Gamma$: Hausdorff space → (1)

(pf) $x_1, x_2\in\mathbb{H}$, $x_1 \bmod \Gamma=\pi(x_1)\neq\pi(x_2)=x_2 \bmod \Gamma$ とする

$\exists K_1, \exists K_2\subset\mathbb{H}$ compact

s.t. $x_1\in\mathring{K}_1$, $x_2\in\mathring{K}_2$ (∵ $\mathbb{H}$: loc. compact) ($\mathring{K}_i$ = interior of K_i)

$K_1\cup K_2$: compact だから Step 2 より

$\{\gamma\in\Gamma : (K_1\cup K_2)\cap\gamma(K_1\cup K_2)\neq\phi\}$: finite

$=: \{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_m\}$ とおく.

$1\leq\forall j\leq m$ $x_1\neq\gamma_j x_2$ (∵ $x_1 \bmod \Gamma\neq x_2 \bmod \Gamma$)

このとき

$x_1\in\exists U \overset{open}{\subset}\mathring{K}_1$, $x_2\in\exists V\overset{open}{\subset}\mathring{K}_2$ s.t. $\forall\gamma\in\Gamma$, $U\cap\gamma V=\phi$

(∵ $1\leq\forall j\leq m$ $x_1\in\exists U_j\overset{open}{\subset}\mathring{K}_1$, $x_2\in\exists V_j\overset{open}{\subset}\mathring{K}_2$ $U_j\cap\gamma V_j=\phi$ (∵ $\mathbb{H}$: Hausdorff)

$U:=\bigcap_{j=1}^{m} U_j\ni x_1$, $V:=\bigcap_{j=1}^{m} V_j\ni x_2$

$1\leq\forall j\leq m$, $U\cap\gamma_j V\subset U_j\cap\gamma_j V_j=\phi$

$\forall\gamma\in\Gamma\setminus\{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_m\}$ $U\cap\gamma V\subset(K_1\cup K_2)\cap\gamma(K_1\cup K_2)=\phi$ //

ゆえに $\pi(U) \cap \pi(V) = \phi$

$\pi(x_1) \in \pi(U) \overset{open}{\subset} \mathbb{H}/\Gamma$ ($\because$ $\pi^{-1}\pi(U) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma U \overset{open}{\subset} \mathbb{H}$)

$\pi(x_2) \in \pi(V) \overset{open}{\subset} \mathbb{H}/\Gamma$ ($\because$ $\pi^{-1}\pi(V) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma V \overset{open}{\subset} \mathbb{H}$) //

Step 4 $\forall x \in \mathbb{H}$, $x \in \exists U \overset{open}{\subset} \mathbb{H}$

s.t. $1 \neq \forall \gamma \in \Gamma$, $U \cap \gamma U = \phi$,

$\pi|_U : U \to \pi(U)$ 同相写像

(pf) $\exists K \subset M$ compact s.t. $x \in \mathring{K}$ ($\because$ $\mathbb{H}$: loc. compact)

$\{\gamma \in \Gamma : K \cap \gamma K \neq \phi\} = \{\gamma_0 = 1, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ 相異なる

$\forall i \geq 1$ $x \neq \gamma_i x$ ($\because$ $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}$ 自由)

$x \in \exists U \overset{open}{\subset} \mathring{K}$; $\forall \gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$, $U \cap \gamma U = \phi$

($\because$ $x \in \exists U_i \overset{open}{\subset} \mathring{K}$ $x \in \exists V_i \overset{open}{\subset} \mathring{K}$ $U_i \cap \gamma_i V_i = \phi$ ($\because$ $\mathbb{H}$: Hausdorff, γ_i: homeo)

$U := \bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap V_i)$ とおく. $\forall i \geq 1$ $U \cap \gamma_i U \subset U_i \cap \gamma_i V_i = \phi$

$\forall \gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ について $U \cap \gamma U \subset K \cap \gamma K = \phi$ //

$\pi|_U : U \to \pi(U)$ homeo

($\because$ $\pi|_U$: 全射

$\pi|_U$: 単射 ($\because$ $x, y \in U$, $\pi(x) = \pi(y)$ なら

$\exists \gamma \in \Gamma$, $y = \gamma x \in U \cap \gamma U \neq \phi$ ゆえに $\gamma = 1$ $y = x$) //

π: open map //

Step 5 $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma$, $x \mapsto \pi(x) = x \bmod \Gamma$

は普遍被覆空間である.

(pf) $\mathbb{H} \approx \mathbb{R}^2$ より 単連結かつ局所弧状連結である

$\forall x \in \mathbb{H}$ について Step 4 の U をとる $x \in U \overset{open}{\subset} \mathbb{H}$ より

$x \in \exists U_0 \overset{open}{\subset} U$, U_0 : open ball とくに弧状連結

$\forall \gamma \in \Gamma$ γU_0 も弧状連結である.

$\pi^{-1}(U_0) = \coprod_{\gamma\in\Gamma} \gamma U_0$, $\pi|_{\gamma U_0} : \gamma U_0 \to \pi(U_0)$ homeo

liftの存在と一意性は被覆空間の一般論による

(cf. e.g. 松本「トポロジー入門」

Hatcher "Algebraic Topology" Section 1.3 pp61-63) //

Step 6 $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}/(\mathbb{H}/\Gamma)) = \Gamma$ $\left(\xrightarrow{\text{Lem5.5}} (3)\ \pi_1(\mathbb{H}/\Gamma) \cong \Gamma \right)$

(pf) ($\supset$) 明らか

($\subset$) $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}/(\mathbb{H}/\Gamma))$ $x_0 \in \mathbb{H}$ について

$\pi(\varphi(x_0)) = \pi(x_0)$ より $\exists \gamma \in \Gamma$ $\varphi(x_0) = \gamma x_0$.

lift の一意性 (Lem 5.1) により $\varphi = \gamma \in \Gamma$ //

Step 7 $\mathbb{H}/\Gamma$ には π が局所双正則となるように Riemann 面の構造が入る

(pf) $x \in \mathbb{H}$ Step 4 の U をとる $\pi(x) \in \mathbb{H}/\Gamma$ のまわりの座標として

$(\pi|_U)^{-1} : \pi(U) \to U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{H} \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{C}$)

をとればよい、はりあわせは Γ の元で与えられるから正則である

つくり方から π は loc. biholomorphic である //

// Thm 6.1.

ここから Σ_g, $g \geq 2$, にもどる

補題 6.2 $\forall \gamma \in \pi_1(\Sigma_g, *)$ $(\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\ \gamma^n = 1 \Rightarrow \gamma = 1)$

このことを $\pi_1(\Sigma_g, *)$ は torsion-free であるという

証明 C : 種数 g 閉 Riemann 面 をとる

$\pi_1(\Sigma_g, *) \cong \mathrm{Aut}(\tilde{C}/C)$ ($\because$ Lem 5.5)

$1 \neq \forall \varphi \in \mathrm{Aut}(\tilde{C}/C)$ について $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ $\varphi^n \neq 1$ を示せばよい

$\varphi \in PSL_2(\mathbb{R})$ hyperbolic ($\because$ Thm 5.11) より

$$\varphi = \pm P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} P^{-1} \quad P \in PSL_2(\mathbb{R}),\ \lambda > 1$$

ゆえに $\varphi^n = \pm P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^{-n} \end{pmatrix} P^{-1} \neq \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\forall n \geq 1$ //

(ここだけの記号 $R_g \overset{\text{def}}{=} \{ \rho : \pi_1(\Sigma_g, *) \to PSL_2(\mathbb{R});$ 単射群準同型, $\mathrm{Im}\,\rho < PSL_2(\mathbb{R})$ discrete $\}$)

((Rmk) ここでは向きを考えていない)

<u>系6.3</u> $\forall \rho \in R_g.$ $\mathrm{Im}\rho \curvearrowright \mathbb{H}$ 自由作用

<u>証明</u> $x \in \mathbb{H}$ について $K=\{x\}$: compact

Thm 6.1 Step 2 より $\{\gamma \in \mathrm{Im}\rho : \gamma x = x\}$: 有限集合 位数 n とする

そこで $\gamma \in \mathrm{Im}\rho$ が $\gamma x = x$ とすると $\gamma^n = 1$ Lem 6.2 より $\gamma = 1$ //

Thm 6.1 より $\forall \rho \in R_g$, $\mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho$ は Riemann 面だが

$\pi_1(\mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho) \cong \mathrm{Im}\rho \cong \pi_1(\Sigma_g, *)$ である

曲面の分類定理から $\mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho \approx \Sigma_g$ である

そこで Riemann moduli 空間への写像

$$R_g \to \mathbb{M}_g, \quad \rho \mapsto [\mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho]$$

が定義できる. 前回示したことからこの写像は全射である

$\rho, \rho' \in R_g$ についていつ $[\mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho] = [\mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho']$ となるのか?

<u>定理6.4</u> $\rho, \rho' \in R_g$. $\mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho \cong \mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho'$ 双正則

$\Longrightarrow$ $\exists \varphi \in \mathrm{Aut}(\pi_1(\Sigma_g, *))$ 群自己同型

$\exists A \in PSL_2(\mathbb{R})$

s.t. $\forall \gamma \in \pi_1(\Sigma_g, *)$ $\rho'(\gamma) = A\rho(\varphi(\gamma))A^{-1} \in PSL_2(\mathbb{R})$

<u>証明</u> $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho$ $x \mapsto x \bmod \mathrm{Im}\rho$

$\pi' : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho'$ $x \mapsto x \bmod \mathrm{Im}\rho'$

$\exists f : \mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho'$ 正則同型 (仮定)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho \arrow[r, "f"] & \mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho' \\
\mathbb{H} \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "\exists \tilde{f}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{H} \arrow[u, "\pi'"']
\end{tikzcd}$$

lift をとる $\tilde{f}$ は正則である

$z_0 \in \mathbb{H}$ をとる. $f^{-1} : \mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho' \to \mathbb{H}/\mathrm{Im}\rho$ の lift $\widetilde{f^{-1}}$ を

$\widetilde{f^{-1}}(\tilde{f}(z_0)) = z_0$ をみたすようにとる $\widetilde{f^{-1}}$ も正則である

Lem 5.1 より $\widetilde{f^{-1}} = \tilde{f}^{-1}$ であり $\tilde{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ は正則同型である

つまり $\exists A \in PSL_2(\mathbb{R})$, $\tilde{f} = A \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ である

このとき

$$A^{-1}(\mathrm{Im}\,\rho')A \subset \mathrm{Im}\,\rho$$

∵) $\gamma \in \pi_1(\Sigma_g, *)$, $z_0 \in \mathbb{H}$ について

$$\pi(A^{-1}\rho'(\gamma)A(z_0)) = \pi'(\rho'(\gamma)A(z_0)) = \pi'(Az_0) = \pi(z_0)$$

ゆえに $\exists \gamma' \in \pi_1(\Sigma_g, *)$ $A^{-1}\rho'(\gamma)A(z_0) = \rho(\gamma')(z_0)$

Lem 5.1 より $A^{-1}\rho'(\gamma)A = \rho(\gamma') \in \mathrm{Im}\,\rho$ である //

$\tilde{f}^{-1} = A^{-1}$ について同じことを考えて

$$A(\mathrm{Im}\,\rho)A^{-1} \subset \mathrm{Im}\,\rho'$$

ゆえに

$$\mathrm{Im}\,\rho' = A(\mathrm{Im}\,\rho)A^{-1},$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\Sigma_g, *) \arrow[r, "\rho", "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Im}\,\rho \arrow[d, "\cong"] & x \arrow[d, mapsto] \\
\pi_1(\Sigma_g, *) \arrow[u] \arrow[r, "\cong", "\rho'"'] & \mathrm{Im}\,\rho' & AxA^{-1}
\end{tikzcd}$$

これを φ とおくと群自己同型である

ゆえに $\forall \gamma \in \pi_1(\Sigma_g, *)$ $\rho'(\gamma) = A\rho(\varphi(\gamma))A^{-1}$ //

逆に $\exists \varphi \in \mathrm{Aut}(\pi_1(\Sigma_g, *))$ $\exists A \in PSL_2(\mathbb{R})$

$\forall \gamma \in \pi_1(\Sigma_g, *)$ $\rho'(\gamma) = A\rho(\varphi(\gamma))A^{-1}$ とすると

$\mathbb{H}/\mathrm{Im}\,\rho \overset{A}{\cong} \mathbb{H}/\mathrm{Im}\,\rho'$ 正則同型 である

以上をまとめて次が得られる

定理6.5.

$$\mathrm{Aut}(\pi_1(\Sigma_g, *)) \backslash R_g / PSL_2(\mathbb{R}) \cong \mathcal{M}_g$$