第5回, 20年6月10日

§5, 閉Riemann面のFuchs群

前回の復習

C: Riemann面 (=連結1次元複素多様体)

Thm 4.7 + Lem 4.8

$\exists \tilde{C}$: 単連結Riemann面

$\exists \pi: \tilde{C} \to C$ 局所双正則写像

で次をみたすものが存在する (liftの存在と一意性)

(#) Z: 単連結かつ局所弧状連結

$f: Z \to C$ 連続写像, $z_0 \in Z$

$\Longrightarrow \forall \tilde{p} \in \pi^{-1}(f(z_0))$, $\exists! \tilde{f}: Z \to \tilde{C}$ 連続写像

存在かつ一意的

s.t. $f = \pi \circ \tilde{f}$ かつ $\tilde{f}(z_0) = \tilde{p}$

$$\begin{tikzcd} & \tilde{p}_\in \tilde{C} \arrow[d, "\pi"] \\ z_0 \in Z \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Thm 4.9 $\tilde{C}$ は $\mathbb{CP}^1$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ $(\cong \mathbb{D})$ のどれかに正則同型である

補題5.1 $f: \tilde{C} \to \tilde{C}$ 連続写像

$\pi \circ f = \pi : \tilde{C} \to C$

$\exists \tilde{p} \in \tilde{C}$ $f(\tilde{p}) = \tilde{p}$

$\Longrightarrow f = 1_{\tilde{C}} : \tilde{C} \to \tilde{C}$

$$\begin{tikzcd} & \tilde{C} \arrow[d, "\pi"] \\ \tilde{C} \arrow[ur, shift left, "\tilde{f}"] \arrow[ur, shift right, "1_{\tilde{C}}"'] \arrow[r, "\pi"'] & C \end{tikzcd}$$

(証明 (#)の一意性による //

π が局所双正則写像 (locally biholomorphic map) であるとは

π が正則 (holomorphic) であって次の条件をみたすことをいう

(##) $\forall \tilde{p} \in \tilde{C}$ $\tilde{p} \in {}^\exists \tilde{U} \overset{\text{open}}{\subset} \tilde{C}$, $\pi(\tilde{p}) \in {}^\exists U \overset{\text{open}}{\subset} C$

s.t. $\pi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$ 正則同型

(つまり $\pi|_{\tilde{U}}$: 全単射で $(\pi|_{\tilde{U}})^{-1}: U \to \tilde{U}$ も正則である)

補題5.2. Z: Riemam面, $f: Z \to \mathbb{C}$ 正則写像
$\tilde{f}: Z \to \tilde{\mathbb{C}}$ 連続写像 $f = \pi \circ \tilde{f}$
$\Rightarrow \tilde{f}: Z \to \tilde{\mathbb{C}}$ 正則写像

証明 $\forall z_0 \in Z$ の近傍で $\tilde{f}$ が正則であることを示せばよい
$\tilde{f}(z_0) \in \tilde{\mathbb{C}}$ に (##) を適用する: $\tilde{f}(z_0) \in {}^{\exists}\tilde{U} \overset{\text{open}}{\subset} \tilde{\mathbb{C}}$, $f(z_0) = \pi(\tilde{f}(z_0)) \in {}^{\exists}U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{C}$
s.t. $\pi|\tilde{U}: \tilde{U} \to U$ 正則同型
$\tilde{f}$: 連続だから $(z_0 \in)\ \tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \overset{\text{open}}{\subset} Z$
このとき $\tilde{f}|\tilde{f}^{-1}(U) = \underbrace{(\pi|\tilde{U})^{-1}}_{\text{正則}} \circ \underbrace{f}_{\text{正則}}$

$$\begin{tikzcd} \tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & \tilde{U} \arrow[d, "\pi|\tilde{U}", "\cong"'] \\ & U \end{tikzcd}$$

ゆえに $\tilde{f}$ は z_0 の近傍で正則である //

被覆変換群 (covering transformation group)

$$\mathrm{Aut}(\tilde{\mathbb{C}}/\mathbb{C}) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi: \tilde{\mathbb{C}} \to \tilde{\mathbb{C}} \text{ 同相写像}\ ;\ \pi \circ \varphi = \pi\}$$

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathbb{C}} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \tilde{\mathbb{C}} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

群である (∵) $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(\tilde{\mathbb{C}}/\mathbb{C}) \Rightarrow \pi \circ \varphi \circ \psi = \pi \Rightarrow \varphi\psi \in \mathrm{Aut}(\tilde{\mathbb{C}}/\mathbb{C})$
$\varphi \in \mathrm{Aut}(\tilde{\mathbb{C}}/\mathbb{C}) \Rightarrow (\pi \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = \pi \circ \varphi^{-1} \Rightarrow \varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}(\tilde{\mathbb{C}}/\mathbb{C})$

$\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(\tilde{\mathbb{C}}/\mathbb{C})$ は正則同型である (∵ Lem 5.2)

Lem 5.1 より
系5.3 $\mathrm{Aut}(\tilde{\mathbb{C}}/\mathbb{C})$ の $\tilde{\mathbb{C}}$ への作用は自由(free)である
つまり $1 \neq {}^{\forall}\varphi \in \mathrm{Aut}(\tilde{\mathbb{C}}/\mathbb{C})$ は固定点(fixed point)をもたない
証明 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\tilde{\mathbb{C}}/\mathbb{C})$ が ${}^{\exists}\tilde{p} \in \tilde{\mathbb{C}}$, $\varphi(\tilde{p}) = \tilde{p}$ ならば
Lem 5.1 より $\varphi = 1_{\tilde{\mathbb{C}}}$ である //

補題5.4 π は同相写像

$$\bar{\pi}: \tilde{\mathbb{C}}/\mathrm{Aut}(\tilde{\mathbb{C}}/\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \quad \tilde{p} \bmod \mathrm{Aut}(\tilde{\mathbb{C}}/\mathbb{C}) \mapsto \pi(\tilde{p})$$

を誘導する. 以下, これにより $\tilde{\mathbb{C}}/\mathrm{Aut}(\tilde{\mathbb{C}}/\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ とみなす
証明 $\bar{\pi}$ の連続性は π の連続性と $\tilde{\mathbb{C}}/\mathrm{Aut}(\tilde{\mathbb{C}}/\mathbb{C})$ 上の商位相の定義とによる. π は開写像だから $\bar{\pi}$ も開写像であり
π は全射だから $\bar{\pi}$ も全射である

あとは $\bar{\pi}$ の単射性を示せばよい

$$\begin{tikzcd} & \tilde{C} \arrow[d, "\pi"] \\ \tilde{C} \arrow[ur] \arrow[r, "\pi"'] & C \end{tikzcd}$$

$\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in \tilde{C}$ が $\pi(\tilde{p}_1) = \pi(\tilde{p}_2) \in C$ とする

(#)により $\exists \varphi, \exists \psi : \tilde{C} \to \tilde{C}$ 連続写像

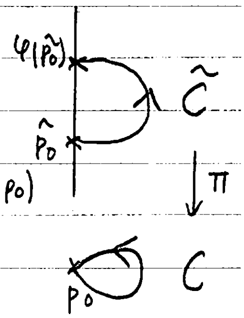
s.t. $\pi \circ \varphi = \pi \circ \psi = \pi$, $\varphi(\tilde{p}_1) = \tilde{p}_2$, $\psi(\tilde{p}_2) = \tilde{p}_1$

このとき $\varphi \circ \psi$ と $\psi \circ \varphi$ に Lem 5.1 を適用して

$\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = 1_{\tilde{C}}$ となる つまり φ と ψ は互いに逆で同相写像である

ゆえに $\tilde{p}_1 \bmod \mathrm{Aut}(\tilde{C}/C) = \tilde{p}_2 \bmod \mathrm{Aut}(\tilde{C}/C) \in \tilde{C}/\mathrm{Aut}(\tilde{C}/C)$ であり

単射性が示された//



補題 5.5 $\hat{p}_0 \in \tilde{C}$ を1つとって固定し $p_0 = \pi(\hat{p}_0) \in C$ とおく

$\Phi : \varphi \in \mathrm{Aut}(\tilde{C}/C) \mapsto [\pi(\hat{p}_0$ を $\varphi(\hat{p}_0)$ につなぐ $\tilde{C}$ 内のpath$)] \in \pi_1(C, p_0)$

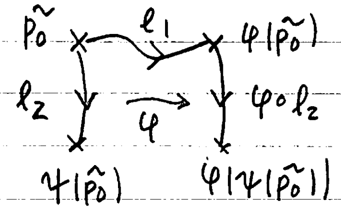
は well-defined な群同型である

証明 $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ とする

well-defined $\tilde{C}$: 単連結より $\hat{p}_0$ を $\varphi(\hat{p}_0)$ をつなぐ $\tilde{C}$ 内のpathは必ず存在し 端点を動かさないhomotopyを除いて一意的だから

$\Phi(\varphi)$ は well-defined である

準同型 $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(\tilde{C}/C)$ について



とすると $\Phi(\varphi) = [\pi(l_1)]$

$\Phi(\psi) = [\pi(l_2)] = [\pi(\varphi \circ l_2)]$ $\in \pi_1(C, p_0)$ である

このとき $l_1 \cdot (\varphi \circ l_2)$ は $\hat{p}_0$ を $\varphi\psi(\hat{p}_0)$ につなぐ path だから

$$\Phi(\varphi\psi) = [\pi(l_1 \cdot (\varphi \circ l_2))] = [\pi(l_1)] \cdot [\pi(\varphi \circ l_2)] = \Phi(\varphi)\Phi(\psi)$$

となる

$$\begin{tikzcd} & \tilde{C} \ni \tilde{p}_0 \arrow[d, "\pi"] \\ I \arrow[ur, "\exists \tilde{l}"] \arrow[r, "l"'] & C \ni p_0 \end{tikzcd}$$

全射 $\forall [l] \in \pi_1(C, p_0)$ について l と $\hat{p}_0 \in \pi^{-1}(l(0))$ に

(#)を適用して $\exists \tilde{l} : I \to \tilde{C}$ 連続写像(path)

s.t. $\tilde{l}(0) = \tilde{p}_0$ である. このとき $\tilde{l}(1) \in \pi^{-1}(p_0)$

だから Lem 5.4 より

$\exists \varphi \in \mathrm{Aut}(\tilde{C}/C)$ $\varphi(\tilde{p}_0) = \tilde{l}(1)$

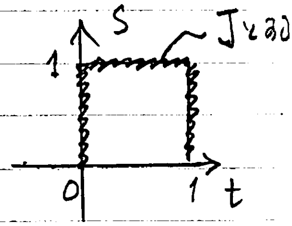
そこで $\Phi(\varphi) = [\pi(\tilde{l})] = [l] \in \pi_1(C, p_0)$ である

<u>単射</u> $\varphi \in \mathrm{Ker}\,\Phi \subset \mathrm{Aut}(\tilde{C}/C)$ とする このとき

$\exists \tilde{\ell} : I \to \tilde{C}$ path. s.t. $\tilde{\ell}(0) = \tilde{p}_0$, $\tilde{\ell}(1) = \varphi(\tilde{p}_0)$, $[\pi(\tilde{\ell})] = 1 \in \pi_1(C, p_0)$

である $[\pi(\tilde{\ell})] = 1 \in \pi_1(C, p_0)$ より

$\exists L : I \times I \to C$ 連続写像



s.t. $\begin{cases} L(t,0) = \pi(\tilde{\ell}(t)) \\ L(t,1) = p_0 \\ L(0,s) = L(1,s) = p_0 \end{cases}$ $(\forall t, \forall s \in I)$

$J := \{0,1\} \times I \cup I \times \{1\} \subset I \times I$ とおくと、Jは弧状連結で

$\forall (t,s) \in A$, $L(t,s) = p_0$ である

(#)を L と $\tilde{p}_0 \in \pi^{-1}(L(0,0))$ に適用すると

$\exists \tilde{L} : I \times I \to \tilde{C}$ 連続写像 s.t. $\pi \circ \tilde{L} = L$, $\tilde{L}(0,0) = \tilde{p}_0$

このとき $\tilde{L}(A) = \{\tilde{p}_0\}$ である ($\because$ $\tilde{p}_0 \in \tilde{L}(A) \subset \pi^{-1}(p_0)$ path-com discrete)

他方(#)の一意性から $\tilde{L}(t,0) = \tilde{\ell}(t)$ $(\forall t \in I)$ だから

$\tilde{p}_0 = \tilde{L}(1,0) = \tilde{\ell}(1) = \varphi(\tilde{p}_0)$

そこで Lem 5.1 より $\varphi = 1_{\tilde{C}}$ である //

<u>正則自己同型群</u> $\mathrm{Aut}(\tilde{C}) := \{\varphi : \tilde{C} \to \tilde{C}$ 正則同型$\}$ とおく

$\mathrm{Aut}(\tilde{C}/C) < \mathrm{Aut}(\tilde{C})$

かつ $\tilde{C} = \mathbb{CP}^1$, $\mathbb{C}$ または $\mathbb{H}$

である $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = PSL_2(\mathbb{R})$ は Lem 2.3 で示した

$\mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1)$ と $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ を求めたい

<u>補題5.6.</u> $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1)$ が $\varphi(0) = 0$ かつ $\varphi(\infty) = \infty$ ならば

$0 \neq \exists a \in \mathbb{C}$, $\forall z \in \mathbb{CP}^1$ $\varphi(z) = az$ となる

<u>証明</u> φは∞で極であるから $z = \infty$ でのLaurent展開により

$\exists p(z)$: zの多項式 $\varphi(z) - p(z)$ は $z = \infty$ で正則である

そこで $\varphi(z) - p(z)$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則かつ有界である

Liouville の定理により $\varphi(z) - p(z) = \mathrm{const}$ つまり

$\varphi(z)$はzの多項式である。$\varphi^{-1}(0) = 0$ から $\varphi(z) = az^n$, $\exists a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\exists n \geq 1$ であるが $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1)$ より $n = 1$ である //

系5.7 (1) $\mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1) = PGL_2(\mathbb{C})$ (一次分数変換)
(2) $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{(z \mapsto az+b) ; a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$

証明 (⊃)は明らか (⊂)を示す
(1) $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1)$ をとる。非調和比を使って $\varphi(0) \mapsto 0, \varphi(1) \mapsto 1,$
$\varphi(\infty) \mapsto \infty$ なる一次分数変換をとり、これを合成することで $\varphi(0)=0$
$\varphi(\infty)=\infty, \varphi(1)=1$ としてよい これに Lem 5.6 を適用して ($\varphi(1)=1$ により)
$\varphi = 1_{\mathbb{CP}^1}$ をうる。つまり $\varphi \in PGL_2(\mathbb{C})$ である
(2) 特異点除去定理により $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ は $\varphi(\infty)=\infty$ となるように
$\mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1)$ の元に拡張する。右辺の元を合成して $\varphi(0)=0, \varphi(1)=1$
としてよい。これに Lem 5.6 を適用して $\varphi = 1_{\mathbb{CP}^1}$ をうる。つまり $\varphi \in$ 右辺である //

定理5.8 C : 種数 g 閉 Riemann 面 ($\overset{\text{つまり}}{C}$: Riemann面で Σ_g に同相)
$g \geq 2$
$\Rightarrow \tilde{C} = \mathbb{H}$

証明 $\tilde{C} \neq \mathbb{CP}^1$ かつ $\tilde{C} \neq \mathbb{C}$ を示す
$\mathrm{Aut}(\tilde{C}/C) \cong \pi_1(C, p_0)$ が非可換 (Lem 4.5) で
$\tilde{C}$ に自由に作用している (Cor 5.3) ことをつかう

Claim 1 $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad-bc \neq 0$ は必ず
$\mathbb{CP}^1$ に固定点をもつ

(∵) $c=0$ のとき $\varphi(\infty)=\infty$ である
$c \neq 0$ とすると $\dfrac{az+b}{cz+d} = z \iff cz^2 + (d-a)z - b = 0$
は $\mathbb{C}$ 内に必ず解をもつ //

Cor 5.3 から $1 \neq \forall \varphi \in \mathrm{Aut}(\tilde{C}/C)$ は $\tilde{C}$ に固定点をもたないから
$\mathrm{Aut}(\tilde{C}/C)$ は $PGL_2(\mathbb{C})$ にふくまれない。ゆえに $\tilde{C} \neq \mathbb{CP}^1$ である

Claim 2 $\varphi(z) = az+b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, が $\mathbb{C}$ 内に不動点を
もたないなら $a=1$ である
((∵) $a \neq 1$ のとき $z = -b/(a-1)$ が $z = az+b$ をみたす //)

そこでもし $\tilde{C}=\mathbb{C}$ ならば

$$\mathrm{Aut}(\tilde{C}/C) \subset \{(z\mapsto z+b) ; b\in\mathbb{C}\} \cong \mathbb{C} \quad (\text{可換群})$$

となり $\pi_1(C,p_0) \cong \mathrm{Aut}(\tilde{C}/C)$ は可換である

これは $g\geqq 2$ (Lem 4.5) に反する ゆえに $\tilde{C}\neq\mathbb{C}$ である

以上により $\tilde{C}=\mathbb{H}$ である //

(C が閉 Riemann 面に限らず) $\tilde{C}=\mathbb{H}$ のとき

$$\mathrm{Aut}(\tilde{C}/C) \subset PSL_2(\mathbb{R})$$

とみなすことができる $PSL_2(\mathbb{R})$ は双曲計量を保つので

$C=\mathbb{H}/\mathrm{Aut}(\tilde{C}/C)$ にも双曲計量が入る, つまり

<u>系5.9.</u> $\tilde{C}=\mathbb{H}$ のとき (たとえば C: 種数 g 閉 Riemann 面 $g\geqq 2$)

C には双曲曲面の構造が入る

<u>定理5.10.</u> $\tilde{C}=\mathbb{H}$ のとき $\mathrm{Aut}(\tilde{C}/C)$ は $PSL_2(\mathbb{R})$ の<u>離散部分群</u> (discrete subgroup) である, つまり

$$\forall\varphi\in\mathrm{Aut}(\tilde{C}/C) \quad \varphi\in{}^{\exists}O \overset{\text{open}}{\subset} PSL_2(\mathbb{R})$$

$$O\cap\mathrm{Aut}(\tilde{C}/C)=\{\varphi\}$$

<u>証明</u> $\tilde{p}_0\in\tilde{C}=\mathbb{H}$. $p_0:=\pi(\tilde{p}_0)\in C$ とする

$\varphi(\tilde{p}_0)\in{}^{\exists}\tilde{U}\overset{\text{open}}{\subset}\tilde{C}$, $p_0\in{}^{\exists}U\overset{\text{open}}{\subset}C$

s.t. $\pi|_{\tilde{U}}:\tilde{U}\xrightarrow{\simeq}U$ homeo

とくに $\varphi\neq{}^{\forall}\psi\in\mathrm{Aut}(\tilde{C}/C)$ $\psi(\tilde{p}_0)\notin\tilde{U}$ である

連続写像

$$f: PSL_2(\mathbb{R})\to\mathbb{H},\quad g\mapsto g(\tilde{p}_0)$$

について $O:=f^{-1}(\tilde{U})\overset{\text{open}}{\subset}PSL_2(\mathbb{R})$ とおくと

$O\cap\mathrm{Aut}(\tilde{C}/C)=\{\varphi\}$ である //

$PSL_2(\mathbb{R})$ の離散部分群を <u>Fuchs 群</u> (Fuchsian group) とよぶ

C が閉 Riemann 面のときは、さらに強いことが言える

<u>定理5.11</u> $g \geqq 2$, C : 種数 g 閉 Riemann 面 (Riemann 面であって Σ_g に同相である) とする。このとき $\exists r \gneqq 0$, $1 \neq \forall \varphi \in \mathrm{Aut}(\tilde{C}/C) \subset PSL_2(\mathbb{R})$

$$tl(\varphi) \geqq r$$

とくに φ は双曲的である

<u>証明</u> $\forall \hat{p} \in \tilde{C} = \mathbb{H}$ $\hat{p} \in {}^{\exists}\tilde{U}_{\hat{p}} \overset{open}{\subset} \mathbb{H} = \tilde{C}$, $\pi(\hat{p}) \in {}^{\exists}U_{\hat{p}} \overset{open}{\subset} C$

$\pi|\tilde{U}_{\hat{p}} : \tilde{U}_{\hat{p}} \xrightarrow{\approx} U_{\hat{p}}$: 同相

Thm 3.1 より 双曲距離 d について $\exists r_{\hat{p}} > 0$

$$\{\hat{q} \in \mathbb{H} ; d(\hat{p}, \hat{q}) < 2r_{\hat{p}}\} \subset \tilde{U}_{\hat{p}}$$

である。そこで

$$\tilde{V}_{\hat{p}} := \{\hat{q} \in \mathbb{H} ; d(\hat{p}, \hat{q}) < r_{\hat{p}}\} \overset{open}{\subset} \tilde{U}_{\hat{p}}$$

$$V_{\hat{p}} := \pi(\tilde{V}_{\hat{p}})$$

とおく。$\forall \hat{q} \in \tilde{V}_{\hat{p}}$, $1 \neq \forall \varphi \in \mathrm{Aut}(\tilde{C}/C)$ について

$\varphi(\hat{q}) \in \mathbb{H} \setminus \tilde{U}_{\hat{p}}$ だから $d(\hat{p}, \varphi(\hat{q})) \geqq 2r_{\hat{p}}$

$$2r_{\hat{p}} \leqq d(\hat{p}, \varphi(\hat{q})) \leqq d(\hat{p}, \hat{q}) + d(\hat{q}, \varphi(\hat{q})) \lneqq r_{\hat{p}} + d(\hat{q}, \varphi(\hat{q}))$$

ゆえに $r_{\hat{p}} \lneqq d(\hat{q}, \varphi(\hat{q}))$ である。

また $V_{\hat{p}} \overset{open}{\subset} U_{\hat{p}} \overset{open}{\subset} C$ であって $\bigcup_{\hat{p} \in \tilde{C}} V_{\hat{p}} = C$: compact より

$\exists \hat{p}_1, \cdots, \exists \hat{p}_m \in \tilde{C}$. $\bigcup_{i=1}^{m} V_{\hat{p}_i} = C$

である。$r := \min_{1 \leq i \leq m} r_{\hat{p}_i}$ とおく。$r \gneqq 0$ である

このとき $\forall \hat{p} \in \mathbb{H} = \tilde{C}$ について $\pi(\hat{p}) \in C = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\hat{p}_i}$ より

$\exists \psi \in \mathrm{Aut}(\tilde{C}/C)$ $1 \leq \exists i \leq m$. $\psi(\hat{p}) \in \tilde{V}_{\hat{p}_i}$ である

$1 \neq \forall \varphi \in \mathrm{Aut}(\tilde{C}/C)$ について $1 \neq \psi \varphi \psi^{-1}$ だから

$$d(\varphi(\hat{p}), \hat{p}) = d(\psi\varphi\psi^{-1}(\psi(\hat{p})), \psi(\hat{p})) \gneqq r_{\hat{p}_i} \geqq r$$

である $\hat{p} \in \tilde{C} = \mathbb{H}$ は任意だから

$$tl(\varphi) = \inf_{\hat{p} \in \mathbb{H}} d(\varphi(\hat{p}), \hat{p}) \geqq r$$

となる。これが示すべきことであった //