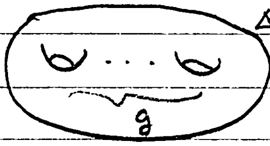
第4回, 20年6月3日.

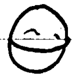
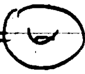
## §4. Riemann 面

**閉曲面** (closed surface)

= 向きづけられた (oriented) 連結 (connected) compact 曲面

$g \geq 0$

$\Sigma_g =$  ← 表面だけ

$\Sigma_0 =$  $= S^2$, $\Sigma_1 =$  $= T^2$

**定理 4.1.** (閉曲面の分類定理)

$\Sigma$ : 閉曲面

$\Longrightarrow \exists g \geq 0 \quad \Sigma \approx \Sigma_g$ (同相 (homeomorphic) である)

$g \neq g' \Rightarrow \Sigma_g \not\approx \Sigma_{g'}$ (同相ではない)

たとえば **基本群** (fundamental group) を使うと同相でないことがわかる

$I := [0,1] = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1\}$ と表す

**定義 4.2.** (基本群) $X$ : 位相空間, $x_0 \in X$

$\pi_1(X, x_0) \overset{\text{def}}{=} \{ l : I \to X : \text{連続写像}, \ l(0) = l(1) = x_0 \} / \simeq \text{rel}\,\partial$

$x_0$ を **基点** (basepoint) とする $X$ の 基本群 　　$\overset{\forall}{l_0, l_1}$

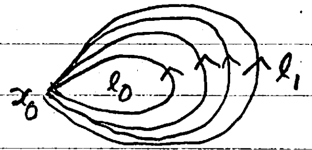
ここで $l_0 \simeq l_1 \ \text{rel}\,\partial$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists L : I \times I \to X$ 連続写像

s.t. $\forall t \in I \quad L(t, 0) = l_0(t)$

$L(t, 1) = l_1(t)$

$\forall s \in I \quad L(0, s) = L(1, s) = x_0$



$[l_0] := l_0 \bmod \simeq \text{rel}\,\partial \ \in \pi_1(X, x_0)$

**積** $(l_0 \cdot l_1)(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} l_0(2t) & \text{if } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ l_1(2t-1) & \text{if } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

$[l_0] \cdot [l_1] \overset{\text{def}}{=} [l_0 \cdot l_1] \in \pi_1(X, x_0)$ well-defined

この積により 群 になる 　**単位元** $[c_{x_0}]$, $c_{x_0} : \forall t \in I \mapsto x_0 \in X$

(constant loop)

ことば

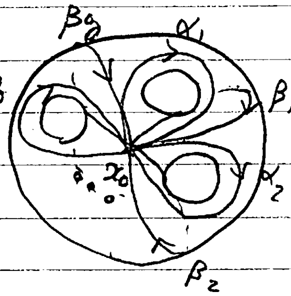
**定義4.3** 位相空間 $X$ が単連結(simply connected)とは次をみたすことをいう

(1) $X \neq \phi$

(2) $X$：弧状連結 つまり $\forall x_0, \forall x_1 \in X$ $\exists \ell : I \to X$ 連続写像 $\ell(0)=x_0$, $\ell(1)=x_1$

(3) $\forall x_0 \in X$, $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$

たとえば $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{D}$ は単連結である.




$\Sigma_g$ の基本群　たとえば cell decomposition をつかうとわかる

$\pi_1(X, x_0)$ は以下の表示をもつ

生成元 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_g$

基本関係式 $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}\cdots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1$

$g=0$　生成元はないので $\pi_1(\Sigma_g, x_0) = \{1\}$ つまり $\Sigma_0 = S^2$ は単連結である

$g \geq 1$　「表示をもつ」とは次の3つのことが成立つことをいう

(1) $\pi_1(\Sigma_g, x_0)$ は元 $\alpha_1, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_g$ たちで生成される

(2) $\pi_1(\Sigma_g, x_0)$ において $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\cdots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1$ が成立つ

(3) 任意の群 $G$ とその元 $a_1, \cdots, a_g, b_1, \cdots b_g \in G$ について

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} = 1 \in G$$

が成立つとする. このとき 群準同型 $f : \pi_1(\Sigma_g, x_0) \longrightarrow G$ で

$1 \leq \forall i \leq g$　$f(\alpha_i) = a_i$, $f(\beta_i) = b_i$

をみたすものがただ一つ存在する

たとえば

$g=1$　$\pi_1(\Sigma_1, x_0) \cong \mathbb{Z}^2$

証明　$G = \mathbb{Z}^2$, $a_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ について $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} = 1$ だから

群準同型 $f : \pi_1(\Sigma_1, x_0) \longrightarrow \mathbb{Z}^2$, $\alpha_1 \longmapsto \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\beta_1 \longmapsto \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ が

ただ一つ存在する. 逆写像は

$$\mathbb{Z}^2 \to \pi_1(\Sigma_1, x_0), \quad \begin{pmatrix}n\\m\end{pmatrix} \longmapsto \alpha_1^n \beta_1^m$$

によって定義される ($\alpha_1\beta_1 = \beta_1\alpha_1$ より準同型である) //

一般に $\forall g \geqq 1$ について 群準同型

$$\alpha : \pi_1(\Sigma_g, x_0) \longrightarrow \mathbb{Z}^{2g},\quad \alpha_i \longmapsto {}^t(0 \cdots 0 \overset{i}{1} 0 \cdots 0),\quad \beta_i \longmapsto {}^t(0 \cdots \cdots 0 \overset{g+i}{1} 0 \cdots 0)$$

が定義される. これは全射である. さらに任意の可換群 $H$ について, 任意の群準同型 $h : \pi_1(\Sigma_g, x_0) \to H$ は 群準同型 $\alpha$ と ある群準同型 $\bar{h} : \mathbb{Z}^{2g} \to H$ との合成で表わされる:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\Sigma_g, x_0) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\alpha"'] & H \\ \mathbb{Z}^{2g} \arrow[ur, dashed, "\exists \bar{h}"'] \arrow[u, phantom, shift left=6, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

**補題4.4** $g \neq g' \Rightarrow \pi_1(\Sigma_g, x_0) \ncong \pi_1(\Sigma_{g'}, x_0')$ とくに $\Sigma_g \not\simeq \Sigma_{g'}$ である

証明 $\alpha$ によって $\forall g \geqq 1$, $\pi_1(\Sigma_g, x_0) \ncong \{1\} = \pi_1(\Sigma_0, x_0)$ である
ゆえに $1 \leqq g \lneqq g'$ としてよい. 線型代数により 全射準同型 $\mathbb{Z}^{2g} \to \mathbb{Z}^{2g'}$ は存在しない. そこで, もし同型 $\pi_1(\Sigma_g, x_0) \cong \pi_1(\Sigma_{g'}, x_0')$ が成立つと仮定すると, この同型と $\alpha$ の合成にこのことを適用して

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\Sigma_g, x_0) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\alpha"', "\text{全射}"] & \pi_1(\Sigma_{g'}, x_0') \arrow[d, "\alpha", "\text{全射}"'] \\ \mathbb{Z}^{2g} \arrow[r, "\exists"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{Z}^{2g'} \end{tikzcd}$$

となる. これは全射だから上にのべたことに矛盾する.
ゆえに $\pi_1(\Sigma_g, x_0) \ncong \pi_1(\Sigma_{g'}, x_0')$ である //

**補題4.5** $g \geqq 2 \Rightarrow \pi_1(\Sigma_g, x_0)$ は非可換である

証明 $m$ 次正則行列 $P, Q \in GL_m(\mathbb{R})$ で $PQ \neq QP$ をみたすものをとる
(例 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $PQ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = QP$)
このとき 単位行列 $E \in GL_m(\mathbb{R})$ について

$$PEP^{-1}E^{-1}QEQ^{-1}E^{-1}EEE^{-1}E^{-1} \cdots EEE^{-1}E^{-1} = E$$

だから 群準同型 $f : \pi_1(\Sigma_g, x_0) \longrightarrow GL_m(\mathbb{R})$ で

$$f(\alpha_i) = \begin{cases} P & \text{if } i = 1 \\ Q & \text{if } i = 2 \\ E & \text{if } i \geqq 3 \end{cases}, \qquad f(\beta_i) = E \quad (1 \leqq i \leqq g)$$

をみたすものが存在する. $f(\alpha_1\alpha_2) = PQ \neq QP = f(\alpha_2\alpha_1)$ だから
$\alpha_1\alpha_2 \neq \alpha_2\alpha_1$ である. とくに $\pi_1(\Sigma_g, x_0)$ は非可換である //

[休憩を入れる]

Riemann面 = 連結1次元複素多様体

定義4.6 $(C, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha\in A})$ Riemann面 (Riemann surface)

$\overset{def}{\iff}$ 0) $C$: 連結な Hausdorff 空間

$A$: 添字集合 (index set)

$U_\alpha \overset{open}{\subset} C$, $V_\alpha \overset{open}{\subset} \mathbb{C}$, $\varphi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\simeq} V_\alpha$ 同相 $(\alpha \in A)$

1) $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = C$ つまり $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$: $C$の開被覆

2) $\forall \alpha, \forall \beta \in A$ $\quad {}^{open}\!\subset V_\alpha \overset{open}{\subset} \mathbb{C}$ $\quad {}^{open}\!\subset V_\beta \overset{open}{\subset} \mathbb{C}$

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 正則函数 (holomorphic)

$(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)$ を座標近傍, chart とよぶ

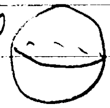
$C = (C, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha\in A})$ と略記することが多い

Riemann面の例

1) $O \overset{open}{\subset} \mathbb{C}$ $(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)$ として $(O, 1_O, O)$ をとる

2) $\mathbb{CP}^1 \ni [z_1 : z_2]$

genus 0



$U_0 := \{[z:1] \in \mathbb{CP}^1 ; z \in \mathbb{C}\} \xrightarrow[\simeq]{\varphi_0} \mathbb{C}$, $[z:1] \mapsto z$

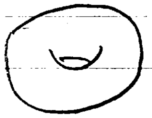
$U_\infty := \{[1:w] \in \mathbb{CP}^1 ; w \in \mathbb{C}\} \xrightarrow[\simeq]{\varphi_\infty} \mathbb{C}$, $[1:w] \longmapsto w$

$\varphi_0(U_0 \cap U_\infty) = \varphi_\infty(U_0 \cap U_\infty) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$\left.\begin{array}{l} \varphi_\infty \circ \varphi_0^{-1} : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\},\ z \longmapsto z^{-1} \\ \varphi_0 \circ \varphi_\infty^{-1} : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\},\ w \longmapsto w^{-1} \end{array}\right\}$ ともに holomorphic

3) $\tau \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ (つまり $\tau \in \mathbb{H}$)

$g=1$



$\wr\wr$

$T^2$

$\|$

$\Sigma_1$

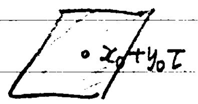
$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau = \{m + n\tau ; m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ 部分群

商集合 $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$ は以下のように Riemann面になる

$\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$, $z \longmapsto z \bmod (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$. 商写像

chartをつくる. $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ について

$$V_{(x_0,y_0)} := \left\{ x + y\tau ;\ \begin{array}{l} x_0 - \frac{1}{2} < x < x_0 + \frac{1}{2} \\ y_0 - \frac{1}{2} < y < y_0 + \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

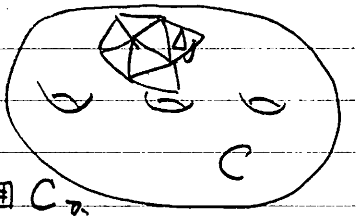



とおくと $\pi|_{V_{(x_0,y_0)}} : V_{(x_0,y_0)} \longrightarrow \pi(V_{(x_0,y_0)})$ $\left(\overset{open}{\subset} \mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau\right)$ は homeo である

$\varphi_{(x_0,y_0)} := (\pi|_{V_{(x_0,y_0)}})^{-1}$ と定めると chartになっている

(あとは各自) //

4) 双曲三角形のはりあわせでえられる双曲曲面




$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ で考える

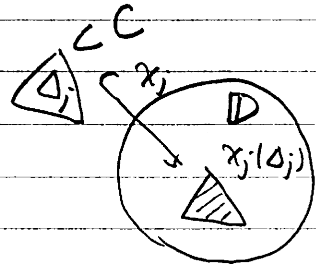
双曲三角形 $\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_m$ をはりあわせて

各頂点 $v_1,\dots,v_m$ での角度が $2\pi$ である双曲曲面 $C$ が

えられたとする このとき 以下のようにして $C$ に Riemann 面の構造が入る：

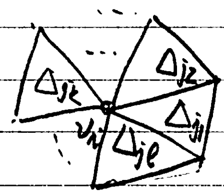
双曲構造を保つうめこみ $x_j:\Delta_j \hookrightarrow \mathbb{D}$ をとっておく $(1\le j\le m)$

(∵ $\Delta_j$ は $\mathbb{D}$ の一部を切り出したものだから//)

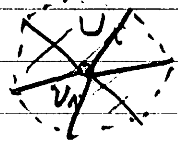



頂点 $v_i$ に集まる双曲三角形を反時計まわりに

$$\Delta_{j1},\Delta_{j2},\dots,\Delta_{jl}$$




とする. $v_i$ の open star を $U_i$ とする




$$U_i=\bigcup_{k=1}^{l}\left(\Delta_{jk}\setminus(v_k\text{の対辺})\right)$$

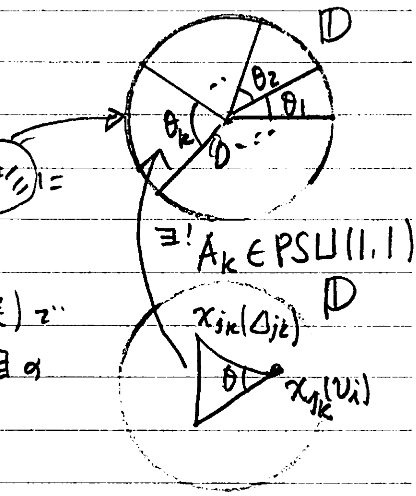
である. chart を $U_i$ 上に構成する

$\theta_k$ : $\Delta_{jk}$ の $v_i$ における角度とする

仮定により $\sum_{k=1}^{l}\theta_k=2\pi$ だから

$\mathbb{D}$ を原点 0 を中心に角度 $\theta_1,\dots,\theta_l$ の扇形に

分割する




このとき $\exists!\, A_k\in PSU(1,1)$ (一次分数変換)で

$A_k(x_{jk}(v_i))=0$ かつ $x_{jk}(\Delta_{jk})$ を $k$ 番目の

扇形にうつすものがただ一つ存在する

以上の準備の下で

$\varphi_i: U_i\to\mathbb{D}$ を

$$\varphi_i|_{\Delta_{jk}} := A_k\circ x_{jk} \quad (1\le k\le l)$$

で定義すれば well-defined であり $\varphi_i$ は $U_i$ から $V_i:=\varphi_i(U_i)\overset{\text{open}}{\subset}\mathbb{D}$

の上への同相を与える

つくり方から

$$\varphi_{\lambda'}\circ\varphi_{\lambda}^{-1}:\varphi_{\lambda}(U_{\lambda}\cap U_{\lambda'})\to\varphi_{\lambda'}(U_{\lambda}\cap U_{\lambda'})$$

は一次分数変換であらわされる。とくに正則関数である

したがって $(C,\{(U_{\lambda},\varphi_{\lambda},V_{\lambda})\}_{\lambda=1}^{m})$ は Riemann 面である。

## 普遍被覆空間 (universal covering space)

**定理4.7** $X$: 弧状連結, 局所弧状連結かつ半局所単連結な位相空間

$\Longrightarrow$

位相空間 $\tilde{X}$ と連続写像 $\pi:\tilde{X}\to X$ で次をみたすものが存在する

1) $\tilde{X}$: 弧状連結かつ局所弧状連結
2) $\forall x_0\in X$, $x_0\in\exists U\overset{\text{open}}{\subset}X$, $U$: 弧状連結かつ $\pi^{-1}(U)$ の各弧状連結成分 $\tilde{U}$ について $\pi|_{\tilde{U}}:\tilde{U}\to U$ は同相である
3) $\tilde{X}$ は単連結である。つまり $\forall\tilde{x}_0\in\tilde{X}$, $\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)=\{1\}$
4) $Z$: 単連結かつ局所弧状連結
   $f:Z\to X$ 連続写像, $z_0\in Z$
   $\Longrightarrow \forall\tilde{x}\in\pi^{-1}(f(z_0))$ $\exists!\ \tilde{f}:Z\to\tilde{X}$ 連続写像
   s.t. $f=\pi\circ\tilde{f}$ かつ $\tilde{f}(z_0)=\tilde{x}$

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ Z \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

(注) 1) 2) までが被覆空間 (covering space) の定義
1) 2) 3) が普遍被覆空間の定義
4) 普遍被覆空間についての定理
(cf. algebraic topology の教科書)

$\pi:\tilde{X}\to X$ を $X$ の普遍被覆空間とよぶ

$C$: Riemann 面 ($\Rightarrow$ 弧状連結, 局所弧状連結かつ半局所単連結)

$\Longrightarrow \pi:\tilde{C}\to C$　$C$ の普遍被覆空間

**補題4.8** $\pi$ が局所正則同型（局所双正則）であるように $\tilde{C}$ に Riemann 面の構造を入れることができる

証明 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ : $C$ の chart の集まり (atlas)
細分にとり直して 各 $U_\alpha$ が Thm 4.7 の条件2) をみたすようにできる
$\tilde{C}$ の chart の集まり (atlas) として
$\{(\tilde{U}_\alpha, \varphi_\alpha \circ (\pi|_{\tilde{U}_\alpha}), V_\alpha)$ ; $\alpha \in A$, $\tilde{U}_\alpha$ は $\pi^{-1}(U_\alpha)$ の弧状連結成分 $\}$
をとる。$\pi|_{\tilde{U}_\alpha}$ は同相だから $\varphi_\alpha \circ (\pi|_{\tilde{U}_\alpha})$ も同相である
$(\varphi_\beta \circ (\pi|_{\tilde{U}_\beta})) \circ (\varphi_\alpha \circ (\pi|_{\tilde{U}_\alpha}))^{-1}$ は $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ の制限だから正則である //

$\tilde{C}$ は単連結な Riemann 面である

定理4.9 (Riemann's mapping theorem)
単連結な Riemann 面は

$$\mathbb{CP}^1,\ \mathbb{C},\ \mathbb{H}\ (\cong \mathbb{D})$$

のどれかに正則同型 (双正則) である