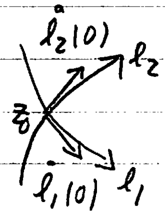
第1回. 20年5月6日

§1. 一次分数変換の復習

本論に入るまえに



正則函数の等角性の復習 $z_0 \in \mathbb{C}$

$\varepsilon > 0$

$l_1, l_2 :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{C}$, C^∞曲線

$l_1(0) = l_2(0) = z_0$, $\dot{l}_1(0) \neq 0$, $\dot{l}_2(0) \neq 0$ とする

$$|t=0\text{での}\, l_1 \,\text{と}\, l_2 \,\text{のなす角度}| = \arg\left(\frac{\dot{l}_2(0)}{\dot{l}_1(0)}\right)$$

f: z_0の近傍で定義された正則函数で $f'(z_0) \neq 0$ とする

$$|t=0\text{での}\, f\circ l_1 \,\text{と}\, f\circ l_2 \,\text{のなす角度}| = \arg\left(\frac{f'(z_0)\dot{l}_2(0)}{f'(z_0)\dot{l}_1(0)}\right) = \arg\left(\frac{\dot{l}_2(0)}{\dot{l}_1(0)}\right)$$

つまり f は角度を保つ (等角性)

Riemann 球面 (sphere) (1次元複素射影空間)

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{CP}^1 \quad (\supset \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\})$$

$\mathbb{CP}^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^\times$ (scalar倍) $[z_1 : z_2] := (z_1, z_2) \bmod \mathbb{C}^\times \in \mathbb{CP}^1$
$((z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$

(**同一視** (1.1) $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{CP}^1$, $z \mapsto [z:1]$, $\infty = [1:0]$

$\mathbb{CP}^1$ は 2枚の $\mathbb{C}$ について $z \in \mathbb{C}$ と $w \in \mathbb{C}$ を $zw = 1$ のときに同一視してえられる

⟶ 1次元複素多様体 (Riemann 面 (surface))

正則函数の等角性から角度の概念が定まる

一次分数変換 (linear fractional transformation)

$$GL_2(\mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; \begin{array}{l} a, b, c, d \in \mathbb{C} \\ ad - bc \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$\underset{\substack{\Psi \\ A}}{PGL_2(\mathbb{C})} := GL_2(\mathbb{C}) / \underbrace{\mathbb{C}^\times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{スカラー倍} \curvearrowright \mathbb{CP}^1 \ni [z_1 : z_2]$$

$$A[z_1 : z_2] := [az_1 + bz_2 : cz_1 + dz_2] \quad \text{well-defined}$$

同一視 (1.1) の下で

$$Az = \frac{az+b}{cz+d} \quad \left(\begin{array}{l} cz+d=0 \text{ のとき } Az = \infty \\ A\infty = \dfrac{a}{c} \end{array} \right)$$

となる. これを一次分数変換とよぶ

$A : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ は正則同型写像で

逆行列 A^{-1} が逆写像を与える. とくに等角である

非調和比 (複比, cross ratio)

$z_0, z_1, z_\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ 相異なる3点, $z \in \hat{\mathbb{C}}$ について

$$(z, z_1, z_0, z_\infty) := \frac{z - z_0}{z - z_\infty} \frac{z_1 - z_\infty}{z_1 - z_0} \in \hat{\mathbb{C}} \quad 非調和比$$

と定める. $z \mapsto (z, z_1, z_0, z_\infty)$ は一次分数変換であって, 性質

$$(1.2) \left\{ \begin{array}{l} (z_0, z_1, z_0, z_\infty) = 0 \\ (z_1, z_1, z_0, z_\infty) = 1 \\ (z_\infty, z_1, z_0, z_\infty) = \infty \end{array} \right.$$

をみたす. とくに一次分数変換の群は集合 $\{(z_0, z_1, z_\infty) \in (\hat{\mathbb{C}})^3 ; z_0 \neq z_1 \neq z_\infty \neq z_0\}$ に推移的に作用する (三重可移性)

さらに $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A0 = 0$, $A1 = 1$, および $A\infty = \infty$ とすると

$$\frac{b}{d} = 0, \quad \frac{a+b}{c+d} = 1 \quad \text{および} \quad \frac{a}{c} = \infty$$

により $b = c = 0$, $a = d$ つまり $A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ スカラー行列となる

(とくに $PGL_2(\mathbb{C}) \curvearrowright \hat{\mathbb{C}}$ は忠実作用である)

ゆえに性質 (1.2) をみたす一次分数変換は

$z \mapsto (z, z_1, z_0, z_\infty)$ に限られる. まとめると

定理1.1 次の一対一対応がなりたつ:

$$PGL_2(\mathbb{C}) \cong \{(z_0, z_1, z_\infty)\in\hat{\mathbb{C}}^3 \mid z_0\neq z_1\neq z_\infty\neq z_0\}$$
$$A \longmapsto (A0, A1, A\infty)$$
$$(z\mapsto (z, z_1, z_0, z_\infty)) \longleftarrow (z_0, z_1, z_\infty)$$

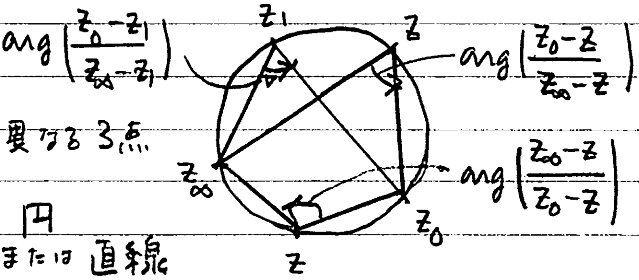
さらに

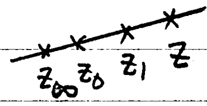
補題1.2 $\forall A\in PGL_2(\mathbb{C})$

$$(Az, Az_1, Az_0, Az_\infty) = (z, z_1, z_0, z_\infty)\in\hat{\mathbb{C}}$$

証明 $z\longmapsto (Az, Az_1, Az_0, Az_\infty)$ は一次分数変換の合成だから これも一次分数変換である。この変換は $z_0\longmapsto 0,\ z_1\longmapsto 1,\ z_\infty\longmapsto\infty$ をみたす。したがって $z\longmapsto (z, z_1, z_0, z_\infty)$ にひとしい //

円と直線





$z_0, z_1, z_\infty\in\mathbb{C}$ 相異なる3点

C: z_0, z_1, z_∞ を通る円 または直線

円周角の定理により

$$z\in C \iff \arg\left(\frac{z_0-z}{z_\infty-z}\right)=\arg\left(\frac{z_0-z_1}{z_\infty-z_1}\right) \text{ または } \arg\left(\frac{z_\infty-z}{z_0-z}\right)+\arg\left(\frac{z_0-z_1}{z_\infty-z_1}\right)=\pi$$

$$\iff \arg\left(\underbrace{\frac{z-z_0}{z-z_\infty}\cdot\frac{z_1-z_\infty}{z_1-z_0}}_{(z, z_1, z_0, z_\infty)}\right)=0 \text{ または } \pi$$

$$\iff (z, z_1, z_0, z_\infty)\in\hat{\mathbb{R}}\ (=\mathbb{R}\cup\{\infty\})$$

（0 は z_0 に
∞ は z_∞ に対応している）

以下「円」とは円または直線$\cup\{\infty\}$を意味するものとする。以上により

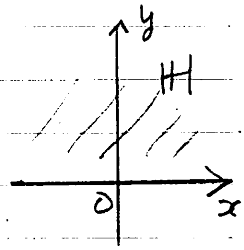
補題1.3 C: 相異なる3点 $z_0, z_1, z_\infty\in\hat{\mathbb{C}}$ を通る円について

$$z\in C \iff (z, z_1, z_0, z_\infty)\in\hat{\mathbb{R}}$$
$$(\,{\parallel}\ \mathbb{R}\cup\{\infty\})$$

No. Date 20・05・06

Lem 1.2 と Lem 1.3 から次がえられる

定理 1.4（円々対応）
一次分数変換は円を円に写す。



上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $\partial \mathbb{H} = \hat{\mathbb{R}}$

補題 1.5 (1) $\mathbb{H}$ を保つ一次分数変換の全体は

$$PSL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; \begin{array}{l} a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ ad - bc = 1 \end{array} \right\} \Big/ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ などと書く）

にひとしく、$PSL_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{H}$ への作用は忠実である。

(1) の証明　$\mathbb{H}$ を保つ $\Rightarrow$ $\partial \mathbb{H} = \hat{\mathbb{R}}$ を保つ $\Rightarrow$ $0, 1, \infty$ を $\hat{\mathbb{R}}$ 内に写す

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. によって表わされる。

このとき $\dfrac{a\sqrt{-1}+b}{c\sqrt{-1}+d} = \dfrac{(a\sqrt{-1}+b)(-c\sqrt{-1}+d)}{c^2+d^2} = \dfrac{ac+bd+(ad-bc)\sqrt{-1}}{c^2+d^2}$ だから

$\dfrac{a\sqrt{-1}+b}{c\sqrt{-1}+d} \in \mathbb{H} \iff ad-bc \gneqq 0$

そこで a, b, c, d すべてを $(ad-bc)^{-1/2}$ 倍すれば $ad-bc=1$ にできる

さらにこのとき $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: scalar 行列 $\iff \left\{ \begin{array}{l} a = d \ (\text{このとき } \pm 1) \\ b = c = 0 \end{array} \right\}$ だから

$PSL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}$ は忠実である //

(2) $\sqrt{-1} \in \mathbb{H}$ の isotropy 群（$A\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$ をみたす $A \in PSL_2(\mathbb{R})$ の全体）は

$$\left\{ \pm \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

にひとしい。

(2) の証明　上の計算により $ad-bc=1$ かつ $\dfrac{a\sqrt{-1}+b}{c\sqrt{-1}+d} = \sqrt{-1}$ ということは

$$(\#) \left\{ \begin{array}{l} ac+bd = 0 \\ c^2+d^2 = 1 \\ ad-bc = 1 \end{array} \right\}$$

に同値である。そこで $\exists \theta \in \mathbb{R}$ $\left\{ \begin{array}{l} c = \sin\theta \\ d = \cos\theta \end{array} \right.$

$ac+bd=0$ より $\exists \lambda \in \mathbb{R}$. $a = \lambda\cos\theta$, $b = \lambda\sin\theta$

$1 = ad-bc = \lambda\cos^2\theta + \lambda\sin^2\theta = \lambda$ ゆえに $\pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

逆にこの形の行列は (#) をみたす //

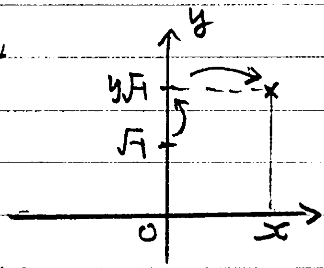
(3) $PSL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}$ は推移的である

(3)の証明 $\forall x+y\sqrt{-1} \in \mathbb{H}$, $x,y\in\mathbb{R}$, $y>0$ について

$$\begin{pmatrix}\sqrt{y}&0\\0&\sqrt{y}^{-1}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\sqrt{-1} \longmapsto y\sqrt{-1} \longmapsto x+y\sqrt{-1}$$

//

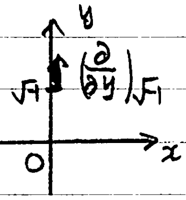


・$T\mathbb{H}$: $\mathbb{H}$の接束

$ST\mathbb{H} := \{v\in T\mathbb{H} ; v\neq 0\}/\mathbb{R}_{>0}$ unit tangent bundle

scalar倍

$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\sqrt{-1}} \bmod \mathbb{R}_{>0}$, $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\sqrt{-1}}$ は $\ell(t)=\sqrt{-1}(1+t)$, $0<|t|<1$ で表わされる



定理1.6 写像

$$PSL_2(\mathbb{R}) \to ST\mathbb{H}, \quad A \mapsto A_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\sqrt{-1}} \bmod \mathbb{R}_{>0}$$

は全単射である

証明 全射 $\forall z\in\mathbb{H}$, $\forall v\in T_z\mathbb{H}$ ($v\neq 0$) について $\exists A_1\in PSL_2(\mathbb{R})$, $A_1 z=\sqrt{-1}$

そこで $A_{1*}v \in T_{\sqrt{-1}}\mathbb{H}\setminus\{0\}$ である。いま

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\frac{(\cos\theta)\sqrt{-1}(1+t)-\sin\theta}{(\sin\theta)\sqrt{-1}(1+t)+\cos\theta}\right) = \frac{\sqrt{-1}\cos\theta(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)-\sqrt{-1}\sin\theta((\cos\theta)\sqrt{-1}-\sin\theta)}{(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^2}$$

$$=\sqrt{-1}(\cos(-2\theta)+\sqrt{-1}\sin(-2\theta))$$

であるから θをうまくとると $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}_* A_{1*}v = \lambda\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\sqrt{-1}}$ ($\exists\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$) とできる // 全射

単射 $A_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\sqrt{-1}} \bmod \mathbb{R}_{>0} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\sqrt{-1}} \bmod \mathbb{R}_{>0}$

とすると $A\sqrt{-1}=\sqrt{-1}$ だから Lem 1.5 (2) により

$$A=\pm\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

となるが 全射のところでの計算から

$$\sqrt{-1}(\cos(-2\theta)+\sqrt{-1}\sin(-2\theta))=\sqrt{-1}$$

つまり $\theta\in\mathbb{Z}\pi$. すなわち $A=\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ である //

双曲計量 (hyperbolic metric) $ds^2 = \dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$ on $\mathbb{H} = \left\{x+y\sqrt{-1} ;\ \begin{array}{l} x, y \in \mathbb{R} \\ y>0 \end{array}\right\}$

これは $dz = dx + \sqrt{-1}dy$, $d\bar{z} = dx - \sqrt{-1}dy$ をつかって

$$ds = \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z}$$

とも表わされる

補題 1.7 $PSL_2(\mathbb{R})$ の作用で双曲計量は保たれる

証明 $\forall A = \pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$ について (ちがうd)

$$dAz = d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2}dz \overset{ad-bc=1}{=} \frac{1}{(cz+d)^2}dz$$

$$\operatorname{Im} Az = \operatorname{Im}\frac{az+b}{cz+d} = \operatorname{Im}\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} \overset{ad-bc=1}{=} \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$$

ゆえに $\dfrac{|dAz|}{\operatorname{Im} Az} = \dfrac{|dz|}{|cz+d|^2}\dfrac{|cz+d|^2}{\operatorname{Im} z} = \dfrac{|dz|}{\operatorname{Im} z}$ //

とくに

$$ST\mathbb{H} = \{v \in T\mathbb{H} ;\ v \text{の双曲計量についての長さは} 1 \text{である}\}$$

とみることができる。ここには $PSL_2(\mathbb{R})$ が自由かつ推移的に作用している

補題 1.8 双曲計量の向きを保つ isometry 群は $PSL_2(\mathbb{R})$ に等しい

証明 $\varphi: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ を双曲計量の向きを保つ isometry とする

Thm 1.6 により、うまく $PSL_2(\mathbb{R})$ の元を合成することにより

$$\varphi(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1} \quad \text{かつ} \quad (d\varphi)_{\sqrt{-1}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\sqrt{-1}}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\sqrt{-1}}$$

(ともに長さ1)

としてよい。

φ は向きと長さと角度を保つから $-\frac{\pi}{2}$ 回転させて

$(d\varphi)_{\sqrt{-1}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\sqrt{-1}}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\sqrt{-1}}$ も成立つ。つまり $(d\varphi)_{\sqrt{-1}} = 1_{T_{\sqrt{-1}}\mathbb{H}}$

φ は測地線を保つから $\varphi = 1_{\mathbb{H}}$ である //

(次回)