(作成: 10/11/08)
(修正: 10/11/09)

§9. Goldman Lie代数のhomology的解釈

Goldman bracket [,] と作用 σ を (twisted) homology を用いて解釈する
$\Longrightarrow$ [,] と σ が well-defined であることの別証

この§でやること
- 局所系
- twisted homology
- [,] と σ の homology 的解釈

この§では位相空間 X はすべて
locally path-connected, semi-locally simply connected, Hausdorff space
とする.

局所系 (local coefficient system, locally constant sheaf)

$X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 連結成分への分解

仮定より X_λ はすべて普遍被覆 $\widetilde{X_\lambda}$ をもつ

$X_\lambda = \widetilde{X_\lambda}/\pi_1(X_\lambda)$, $\pi_1(X_\lambda) = \mathrm{Gal}(\widetilde{X_\lambda}/X_\lambda) \curvearrowright \widetilde{X}$ 左作用

M : $\mathbb{Q}$-vector space (discrete topology を入れる)

各 X_λ について左作用 $\pi_1(X_\lambda) \curvearrowright M$ が与えられている

(X : conn のとき M : $\mathbb{Q}\pi_1(X)$-module ということ)

$\mathcal{S}(M) \overset{\mathrm{def}}{=} \coprod_{\lambda\in\Lambda} (\widetilde{X_\lambda}\times M)/\pi_1(X_\lambda) \xrightarrow{\varpi} X$ 局所系

(ここで $\pi_1(X_\lambda) \curvearrowright \widetilde{X_\lambda}\times M$ diagonal action)

$\mathcal{S}(M)_p := \varpi^{-1}(p) \subset \mathcal{S}(M)$ stalk at $p \in X$

X : conn のとき

$$\left(\begin{array}{ccc} \{X \text{上の loc. const. sheaf}/\mathbb{Q}\} & \cong & \{\mathbb{Q}\pi_1(X)\text{-module}\} \\ \mathcal{S}(M) & \longleftarrow & M \end{array}\right)$$

${}^\forall\lambda$ について $\pi_1(X_\lambda)$ の M への作用が自明ならば

$\mathcal{S}(M) = X \times M$ 定数層

No.

Date

例 S : conn oriented surface.

$* \in S$ basepoint

$\pi = \pi_1(S, *)$

$\mathbb{Q}\pi^c, \mathbb{Q}\pi^r, \mathbb{Q}\pi^l$: 3つの $\mathbb{Q}\pi$-module. ⓒonjugate, ⓡight, ⓛeft

vector sp. としてはすべて $= \mathbb{Q}\pi$, 作用の仕方がことなる

$u \in \mathbb{Q}\pi,\ \gamma \in \pi$

ⓒ $\gamma(u) := \gamma u \gamma^{-1}$

ⓡ $\gamma(u) := u \gamma^{-1}$

ⓛ $\gamma(u) := \gamma u$

$\mathcal{S}(M)_p,\ p \in S$, を求める.

補題 9.1. $\mathcal{S}(\mathbb{Q}\pi^c)_p = \mathbb{Q}\pi_1(S, p)$

$\mathcal{S}(\mathbb{Q}\pi^r)_p = \mathbb{Q}\Pi S(*, p)$

$\mathcal{S}(\mathbb{Q}\pi^l)_p = \mathbb{Q}\Pi S(p, *)$

ただし $\Pi S(p,q) := [([0,1],0,1),(S,p,q)]$, $p, q \in S$, 基本亜群

証明 $\tilde{S} \underset{\text{set}}{=} \coprod_{p \in S} \Pi S(*, p)$ universal covering of S

$\underset{\alpha}{\pi \curvearrowright} \underset{\gamma}{\tilde{S}}$ $\quad \overrightarrow{\alpha\gamma} \in \tilde{S}$ 右作用

この順に読む

$$\begin{array}{ccc}
\Pi S(*, p) \times \mathbb{Q}\pi^c & \longrightarrow & \mathbb{Q}\pi_1(S, p) \\
(\gamma, u) & \longmapsto & {}^{\exists}\gamma^{-1} u \gamma \\
\downarrow & \nearrow \exists! & \\
\mathcal{S}(\mathbb{Q}\pi^c)_p & &
\end{array}$$

$(\because)\ {}^{\forall}\beta \in \pi$

$(\beta\gamma)^{-1}\beta u \beta^{-1}(\beta\gamma) = \gamma^{-1} u \gamma$

$\Pi S(*, p) \times \mathbb{Q}\pi^r \longrightarrow \mathbb{Q}\Pi S(*, p)$

$(\gamma, u) \longmapsto u\gamma$

$\Pi S(*, p) \times \mathbb{Q}\pi^l \longrightarrow \mathbb{Q}\Pi S(p, *)$

$(\gamma, u) \longmapsto \gamma^{-1} u$

同様に望む同型を与える //

twisted homology 一般の X, M にもどる

Δ^n : standard n-simplex, $n \geq 0$

$X^{\Delta^n} := \{\tau : \Delta^n \to X : \text{conti. map}\} \ni \tau$

$$\tau^*\mathcal{S}(M) := \Delta^n \underset{X}{\times} \mathcal{S}(M) \to \Delta^n$$
$$\cong \quad \Delta^n \times M \quad (\because\ \pi_1(\Delta^n) = 1)$$

$\Gamma(\tau^*\mathcal{S}(M)) := \{s : \Delta^n \to \tau^*\mathcal{S}(M);$ conti. map, $\varpi \circ s = 1_{\Delta^n}\} \cong M$
sections

$$S_n(X;\mathcal{S}(M)) := \bigoplus_{\tau \in X^{\Delta^n}} \Gamma(\tau^*\mathcal{S}(M))$$

($S_n(X;\mathcal{S}(M))$ の元としての $s \in \Gamma(\tau^*\mathcal{S}(M))$ を $\tau \otimes s$ と書くことにする)

$d_i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$, $0 \le i \le n$, the i-th face map

$\partial_i : \Gamma(\tau^*\mathcal{S}(M)) \to \Gamma((\tau\circ d_i)^*\mathcal{S}(M))$, $s \mapsto s|_{d_i\Delta^n}$, 制限写像

$$\partial := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i : S_n(X;\mathcal{S}(M)) \to S_{n-1}(X;\mathcal{S}(M)), \quad \partial\partial = 0$$

$S_*(X;\mathcal{S}(M)) := \{S_n(X;\mathcal{S}(M)), \partial\}_{n\ge 0}$

$H_*(X;\mathcal{S}(M)) := H_*(S_*(X;\mathcal{S}(M)))$

the (twisted) homology of X with coefficients in $\mathcal{S}(M)$

$A \subset X$ subset

$$H_*(X,A;\mathcal{S}(M)) := H_*\left(S_*(X;\mathcal{S}(M)) \big/ S_*(A;\mathcal{S}(M)|_A) \right)$$

the (twisted) homology of (X,A) with coefficients in $\mathcal{S}(M)$

写像 λ と ξ について

S : connected oriented surface, $\hat{\pi} = \pi/\mathrm{conj}$

$\alpha : S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S$ loop について

$t_0 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$s_\lambda(\alpha)(t_0) := [t \mapsto \alpha(t_0+t)] \in \pi_1(S,\alpha(t_0)) = \mathcal{S}(\mathbb{Q}\pi^c)_{\alpha(t_0)}$

$s_\lambda(\alpha) \in \Gamma(\alpha^*\mathcal{S}(\mathbb{Q}\pi^c))$

$\alpha : [0,1] \to S$ とみると $\partial(\alpha \otimes s_\lambda(\alpha)) = s_\lambda(\alpha)(1) - s_\lambda(\alpha)(0) = \underbrace{\alpha - \alpha}_{=0}$

$[\alpha \otimes s_\lambda(\alpha)] \in H_1(S;\mathcal{S}(\mathbb{Q}\pi^c))$ これは free homotopy で不変(各自)

次の写像がえられた

$$\lambda : \mathbb{Q}\hat{\pi} \to H_1(S;\mathcal{S}(\mathbb{Q}\pi^c)), \quad \alpha \mapsto [\alpha \otimes s_\lambda(\alpha)]$$

No.

Date

補題9.2 S に双曲計量が入るとき

$$0 \to \mathbb{Q}1 \to \mathbb{Q}\hat{\pi} \xrightarrow{\lambda} H_1(S;\mathcal{L}(\mathbb{Q}\pi^c)) \to H \to 0 \quad (\text{exact})$$

(注) $\mathbb{Z}$ 上では $\mathrm{Coker}\,\lambda$ は無限生成である。

ここから 定理A(2) $\mathrm{Ker}\,\lambda = \mathbb{Q}1$ がわかる

証明のあらすじ 仮定から $1 \neq {}^\forall x \in \pi$

$$Z(x) \ (:= \{y \in \pi ;\ yxy^{-1} = x\}\ \text{中心化群}) \cong \mathbb{Z}$$

$S = K(\pi, 1)$ だから

$$H_1(S;\mathcal{L}(\mathbb{Q}\pi^c)) = H_1(\pi;\mathbb{Q}\pi^c) \quad (\text{group homology})$$

$$\mathbb{Q}\pi^c \cong \bigoplus_{|x| \in \hat{\pi}} \mathbb{Q}(\pi/Z(x)) \quad \text{as } \mathbb{Q}\pi\text{-modules}$$

$$\begin{aligned} H_1(\pi;\mathbb{Q}\pi^c) &= \bigoplus_{|x| \in \hat{\pi}} H_1(\pi;\mathbb{Q}(\pi/Z(x))) \\ &= \bigoplus_{|x| \in \hat{\pi}} H_1(Z(x);\mathbb{Q}) \quad (\text{Shapiro Lemma}) \\ &= H \oplus \bigoplus_{|x| \in \hat{\pi}'} \mathbb{Q} = H \oplus \mathbb{Q}\hat{\pi}' \end{aligned}$$

この同型の下で λ を具体的に書き下せば補題がえられる//

$\beta : ([0,1], \{0,1\}) \to (S, *)$ based loop

$t_0 \in [0,1]$

$$\begin{aligned} S_\xi(\beta)(t_0) := \beta_{*\beta(t_0)} \otimes \beta_{\beta(t_0)*} &\in \mathbb{Q}\Pi S(*, \beta(t_0)) \otimes \mathbb{Q}\Pi S(\beta(t_0), *) \\ &= \mathcal{L}(\mathbb{Q}\pi^r \otimes \mathbb{Q}\pi^l)_{\beta(t_0)} \end{aligned}$$

$$S_\xi(\beta) \in \Gamma(\beta^* \mathcal{L}(\mathbb{Q}\pi^r \otimes \mathbb{Q}\pi^l))$$

$$[\beta \otimes S_\xi(\beta)] \in H_1(S, *;\mathcal{L}(\mathbb{Q}\pi^r \otimes \mathbb{Q}\pi^l)) \quad (\because \beta(0) = \beta(1) = *)$$

これで次の写像がえられた

$$\xi : \mathbb{Q}\pi \to H_1(S, *;\mathcal{L}(\mathbb{Q}\pi^r \otimes \mathbb{Q}\pi^l)), \quad \beta \mapsto [\beta \otimes S_\xi(\beta)]$$

交叉形式

S : compact connected oriented surface のときに限る
(本当は compact でなくてもよい)
$[S] \in H_2(S, \partial S ; \mathbb{Q})$ fundamental class.
Poincaré duality $\forall M$: $\pi_1(S)$-module
$[S]\cap : H^1(S ; \mathcal{L}(M)) \xrightarrow{\cong} H_1(S, \partial S ; \mathcal{L}(M))$

M_1, M_2, M_3 : $\pi_1(S)$-module, M_3 : trivial
$a : M_1 \otimes M_2 \to M_3$: $\pi_1(S)$-homomorphism
$(a(\gamma u \otimes \gamma v) = a(u \otimes v),\ \forall u \in M_1, \forall v \in M_2, \forall \gamma \in \pi)$
$\Longrightarrow a_p : \mathcal{L}(M_1)_p \otimes \mathcal{L}(M_2)_p \to M_3$ $(\forall p \in S)$ が誘導される
$a_*(\cdot\ \cdot) : H_1(S ; \mathcal{L}(M_1)) \otimes H_1(S, \partial S ; \mathcal{L}(M_2)) \to M_3$ 交叉形式
$u \otimes v \longmapsto a_*(u \cdot v) := a(\langle u, ([S]\cap)^{-1} v \rangle)$
(inclusion homom を使えば ∂S を subset $A \subset \partial S$ におきかえられる)

命題 9.3 $\alpha : [0,1] \to S$: conti. map $\alpha(0) = \alpha(1)$
$\beta : ([0,1], \{0,1\}) \to (S, A)$ conti. map $\left(\begin{array}{l} A = \phi \text{ のときは} \\ \beta(0) = \beta(1) \end{array}\right)$
$\alpha \amalg \beta : [0,1] \amalg [0,1] \to S$ generic immersion
$s' \in \Gamma(\alpha^* \mathcal{L}(M_1))$, $s'' \in \Gamma(\beta^* \mathcal{L}(M_2))$
$\alpha \otimes s'$, $\beta \otimes s''$: cycles
$\Longrightarrow a_*([\alpha \otimes s'] \cdot [\beta \otimes s'']) = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(p ; \alpha, \beta)\, a_p(s'(p) \otimes s''(p))$
(証明略 cf. Goldman, p. 276)

Goldman bracket の homology 的解釈

$\mathcal{B} : \mathbb{Q}\pi^c \otimes \mathbb{Q}\pi^c \to \mathbb{Q}\hat{\pi}$, $u \otimes v \longmapsto |uv|$

$\mathbb{Q}$-homom. $(\because |\gamma u \gamma^{-1} \gamma v \gamma^{-1}| = |\gamma u v \gamma^{-1}| = |uv|)$
Prop. 9.3 $(A = \phi)$ から次は明らか

No.

Date

定理 9.4 $\forall \alpha, \forall \beta \in \hat{\pi}$

$$\mathcal{B}_*(\lambda(\alpha)\cdot\lambda(\beta)) = [\alpha, \beta] \in \mathbb{Q}\hat{\pi}$$

(注) これにより Goldman bracket $[\ ,\ ]$ が well-defined であることの別証が得られた

作用 σ の homology 的解釈

$$\mathcal{C} : \mathbb{Q}\pi^c \otimes \mathbb{Q}\pi^r \otimes \mathbb{Q}\pi^l \to \mathbb{Q}\pi \text{ (自明作用)}, \quad u \otimes v \otimes w \mapsto vuw$$

$$\mathbb{Q}\pi\text{-homom. } (\because v\gamma^{-1}\gamma u \gamma^{-1}\gamma w = vuw)$$

$\mathcal{S}' := \mathcal{S}(\mathbb{Q}\pi^c)$, $\mathcal{S}'' := \mathcal{S}(\mathbb{Q}\pi^r \otimes \mathbb{Q}\pi^l)$ と略記する

$$\mathcal{C}_p : \mathcal{S}'_p \otimes \mathcal{S}''_p \to \mathbb{Q}\pi \quad (\forall p \in S)$$

が定義される

場合分け (I) $* \in \mathring{S}$, (II) $* \in \partial S$

(I) $* \in \mathring{S}$ のとき

$* \in \mathring{D} \subset D \subset \mathring{S}$ なる closed disk D をとる

$$\underset{\text{compact}}{S^{**}} := S \setminus \mathring{D} \simeq S^* = S \setminus \{*\}$$

$$H_*(S^*; \mathcal{S}') = H_*(S^{**}; \mathcal{S}')$$

$$\mathbb{Q}\hat{\pi}(S^*) \xrightarrow{\lambda} H_1(S^*; \mathcal{S}(\mathbb{Q}\pi_1(S^*)^c)) \to H_1(S^*; \mathcal{S}') = H_1(S^{**}; \mathcal{S}')$$

この合成写像も λ と書くことにする。

$$H_*(S, * ; \mathcal{S}'') = H_*(S, D; \mathcal{S}'') \underset{\text{excision}}{\cong} H_*(S^{**}, \partial D; \mathcal{S}'')$$

$A = \partial D \subset \partial S^{**} = \partial S \amalg \partial D$ に命題 9.3 を適用すると

定理 9.5. ($* \in \mathring{S}$ のとき) $\forall \alpha \in \hat{\pi}(S^*)$, $\forall \gamma \in \pi = \pi_1(S, *)$

$$\mathcal{C}_*(\lambda(\alpha)\cdot\xi(\gamma)) = \sigma(\alpha)(\gamma) \in \mathbb{Q}\pi$$

(II) $* \in \partial S$ のとき

$S^* = S^* \setminus \{*\} \simeq S$ である。$A = \phi$ に命題 9.3 を適用して

定理 9.6 ($* \in \partial S$ のとき) $\forall \alpha \in \hat{\pi}(S)$, $\forall \gamma \in \pi = \pi_1(S, *)$

$$\mathcal{C}_*(\lambda(\alpha)\cdot\xi(\gamma)) = \sigma(\alpha)(\gamma) \in \mathbb{Q}\pi$$

(注) 以上により いずれの場合も 作用 σ が well-defined であることの 別証が得られた