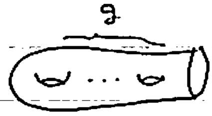
[作成: 10/11/05]

§6. 主定理

$g\geq 1$, $\Sigma=\Sigma_{g,1}=$  , $*\in\partial\Sigma$

$\pi=\pi_1(\Sigma,*)$, $\hat\pi=\hat\pi(\Sigma)=\pi/\mathrm{conj}$

$\theta:\pi\to\hat{T}$ symplectic expansion

$\lambda_\theta:\mathbb{Q}\pi\to\mathfrak{a}_g^-=\mathrm{Der}_\omega(\hat{T})=N(\hat{T}_1)$ ((注) $N1=0$)

$x\mapsto\lambda_\theta\overset{\mathrm{def}}{=}N\theta(x)$

ここで $N:\hat{T}\to\hat{T}_1$

$N|_{H^{\otimes 0}}=0$

$N(X_1\cdots X_p)\overset{\mathrm{def}}{=}\sum_{i=1}^{p}X_i\cdots X_pX_1\cdots X_{i-1}$ $(X_j\in H)$

(注) $N(uv)=N(vu)$ $(\forall u,\forall v\in\hat{T})$

λ_θ は $\mathbb{Q}\hat\pi$ におちる

(∵) $x,y\in\pi$

$\lambda_\theta(xyx^{-1})=N\theta(xyx^{-1})=N(\theta(x)\theta(y)\theta(x)^{-1})$

$=N(\theta(x)^{-1}\theta(x)\theta(y))=N(\theta(y))=\lambda_\theta(y)$ //

$\lambda_\theta:\mathbb{Q}\hat\pi\to\mathfrak{a}_g^-$ がえられた

定理A このとき

(1) $-\lambda_\theta:\mathbb{Q}\hat\pi\to\mathfrak{a}_g^-$ Lie algebra homomorphism

(2) $\mathrm{Ker}\,\lambda_\theta=\mathbb{Q}1$, $1=$ the constant loop $\in\hat\pi$

(3) Image $\lambda_\theta\overset{\mathrm{dense}}{\subset}\mathfrak{a}_g^-$

((3) は $\theta(\mathbb{Q}\pi)\overset{\mathrm{dense}}{\subset}\hat{T}$ (Cor 5.3) より明らか)

定理B さらに次の図式は可換である

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}\hat\pi\otimes\mathbb{Q}\pi \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "-\lambda_\theta\otimes\theta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{Q}\pi \arrow[d, "\theta"] \\
\mathfrak{a}_g^-\otimes\hat{T} \arrow[r, "\text{derivation}"'] & \hat{T}
\end{tikzcd}$$

証明の方針 (§§9-10)

- $\mathbb{Q}\hat{\pi}$ の Lie bracket
- $\mathfrak{a}_g^-$ の Lie bracket
- 作用 σ
- derivation $\mathfrak{a}_g^- \otimes \hat{T} \to \hat{T}$

これらはすべて twisted homology の交叉形式 として解釈できる

twisted homology をつなぐもの: (完備) Hopf 代数の可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}\langle\zeta\rangle \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "\theta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{Q}\pi \arrow[d, "\theta"] \\ \mathbb{Q}[[\omega]] \arrow[r, leftrightarrow] & \hat{T} \end{tikzcd}$$

では何故 Hopf 代数か?

交叉形式 $\Leftarrow$ cup 積, cap 積 $\Leftarrow$ diagonal map
つまり coproduct

系 6.1 $x, y \in \pi$, $|x| \cap y = \phi$ (x は free homotopy で y は based homotopy でうごかして disjoint にできる)
$\Longrightarrow \lambda_\theta(x)\theta(y) = 0$

証明 Thm B および $\sigma(|x|)(y) = 0$ より明らか //

系 6.2 写像 $\sigma: \mathbb{Q}\pi \otimes \mathbb{Q}\pi \to \mathbb{Q}\pi$, $u \otimes v \mapsto \sigma(|u|)(v)$, は 完備群環 $\widehat{\mathbb{Q}\pi}$ に連続に拡張する

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}\pi \otimes \mathbb{Q}\pi \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{Q}\pi \arrow[d] \\ \widehat{\mathbb{Q}\pi} \otimes \widehat{\mathbb{Q}\pi} \arrow[r, dashed, "\exists"] \arrow[d, "-\lambda_\theta \otimes \theta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \widehat{\mathbb{Q}\pi} \arrow[d, "\theta"] \\ \mathfrak{a}_g^- \otimes \hat{T} \arrow[r, "\text{derivation}"'] & \hat{T} \end{tikzcd}$$

証明 $(\theta|_{\mathbb{Q}\pi})^{-1}(\hat{T}_p) = I\pi^p \quad (\forall p \geq 1)$

(∵) $\begin{tikzcd} \widehat{\mathbb{Q}\pi} \arrow[r, "\theta", "\cong"'] \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \hat{T} \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$ により $\theta^{-1}(\hat{T}_p) = \widehat{I\pi}^p \subset \widehat{\mathbb{Q}\pi}$

$\varprojlim$ の構成により $\widehat{I\pi}^p \cap \mathbb{Q}\pi = I\pi^p$ //

$p, q \geq 0$, $u \in I\pi^p$, $v \in I\pi^q$ とする

$$\theta(\sigma(u \otimes v)) = -\underbrace{\lambda_\theta(u)}_{\substack{\uparrow \\ N(\widehat{T_p})}}\,\underbrace{\theta(v)}_{\substack{\uparrow \\ \widehat{T_q}}} \in \widehat{T_{p+q-2}}$$

ゆえに

$$\sigma(u \otimes v) \in (\theta|_{Q\pi})^{-1}(\widehat{T_{p+q-2}}) = I\pi^{p+q-2}$$

つまり $\sigma(I\pi^p \otimes I\pi^q) \subset I\pi^{p+q-2}$ となる

$p=0$ および $q=0$ の場合を考えて

$$\widehat{Q\pi} \otimes \widehat{Q\pi} \to \widehat{Q\pi}$$

が誘導される。可換図式は作り方から明らか //

系 6.3 $x, y \in \pi$, $|x| \cap y = \phi$

$f(x) \in \widehat{Q\pi}$: $x-1$ の形式的巾級数

$\Longrightarrow \lambda_\theta(f(x))\theta(y) = 0$

(証明 Cor 6.1, Cor 6.2, derivation の連続性による //)

このあとの流れ

$$\begin{aligned} &\text{Thm A} \Rightarrow \S 8.\ Z(Q\hat{\pi}(\Sigma_{\infty,1})) \\ &\qquad\quad\nearrow \\ &\text{Thm B} \Rightarrow \S 7.\ \log(\text{Dehn twist}) \end{aligned}$$

§9, §10 : Thm A, Thm B の証明

No.

Date