(作成: 10/11/05)

No. 5-1

Date 10・12・16

§5. Symplectic expansions

2つのLie代数をつなげたい

$\mathbb{Q}\hat{\mathcal{T}}(\Sigma_{g,1}) \longleftrightarrow \mathrm{Der}_\omega(\hat{T}) = \mathfrak{a}_g^-$

そのためにまず2つの結合代数をつなげることを考える

$\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma_{g,1}) \longleftrightarrow \hat{T}$

ポイント $\pi_1(\Sigma_{g,1})$: free group of rank $2g$

$\longrightarrow$ (一般化された) Magnus 展開

この§でやること

- Magnus 展開 と total Johnson map
- group-like expansions
- symplectic expansions

Magnus 展開　ここでは自由群で考える ($\mathbb{Q}$ではなくて 単位可換環でよい)

$n \geq 1$. $F_n = \langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle$ free group of rank n

universal mapping property

$\forall G$: group, $\forall g_1, \cdots, \forall g_n \in G$

$\exists! f : F_n \to G$ group homomorphism s.t. $f(x_i) = g_i$ $(1 \leq \forall i \leq n)$

$H := H_1(F_n ; \mathbb{Q}) = F_n^{abel} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$[x] := (x \bmod [F_n, F_n]) \otimes 1 \in H$ $(x \in F_n)$

$\hat{T} := \prod_{m=0}^{\infty} H^{\otimes m}$, $\hat{T}_p := \prod_{m \geq p} H^{\otimes m}$ など §4と同様

$1 + \hat{T}_1$ が乗法によって群になることに注意する

定義 $\theta : F_n \to \hat{T}$ (generalized) Magnus expansion

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$
1) $\theta : F_n \to 1 + \hat{T}_1$ group homomorphism
2) $\forall x \in F_n$, $\theta(x) \equiv 1 + [x] \bmod \hat{T}_2$

Magnus expansion はたくさんある (∵ univ. mapping property of F_n)

ex) $\mathrm{std} : F_n \to \hat{T}$　$\mathrm{std}(x_i) = 1 + [x_i]$ $(1 \leq i \leq n)$

standard expansion

No.

Date . .

θ は algebra homomorphism

$$\theta : \mathbb{Q}F_n \to \hat{T}$$

にのびる。($\mathbb{Q}F_n$: F_n の群環)

$\varepsilon : \mathbb{Q}F_n \to \mathbb{Q}$, $\sum_{x\in F_n} a_x x \mapsto \sum a_x$, augmentation map

$IF_n := \mathrm{Ker}(\varepsilon : \mathbb{Q}F_n \to \mathbb{Q})$ augmentation ideal

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}F_n \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \hat{T} \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

とくに $\theta(IF_n) \subset \hat{T}_1$

$\theta(IF_n{}^p) \subset \hat{T}_1{}^p = \hat{T}_p \quad (\forall p \geqq 1)$ ---- ①

$\widehat{\mathbb{Q}F_n} := \varprojlim_{p\to\infty} \mathbb{Q}F_n / IF_n{}^p$ completed group ring

$\widehat{IF_n} := \varprojlim_{p\to\infty} IF_n / IF_n{}^p \subset \widehat{\mathbb{Q}F_n}$ two-sided ideal

$\widehat{IF_n}{}^p$ による位相を $\widehat{\mathbb{Q}F_n}$ に入れる

$$\mathbb{Q}F_n \overset{\text{dense}}{\subset} \widehat{\mathbb{Q}F_n}$$

$(\Leftarrow ①)$

$\theta : \widehat{\mathbb{Q}F_n} \to \varprojlim_{p\to\infty} \hat{T}/\hat{T}_p = \hat{T}$ continuous algebra homom.

定理 5.1. $\theta : \widehat{\mathbb{Q}F_n} \xrightarrow{\cong} \hat{T}$

証明 場合分け ① $\theta = $ std のとき ② 一般の θ について

① $\theta = $ std のとき. 逆を具体的に構成する

$\kappa : T \to \mathbb{Q}F_n$, $[x_i] \mapsto -1 + x_i$ algebra homom

(短縮する) $\kappa(\hat{T}_1 \cap T) \subset IF_n$

$\kappa(\hat{T}_p \cap T) \subset IF_n{}^p \quad (\forall p \geqq 1)$ ---- ②

ゆえに continuous algebra homom

$$\hat{\kappa} : \hat{T} = \varprojlim_{p\to\infty} T / T\cap\hat{T}_p \to \varprojlim_{p\to\infty} \mathbb{Q}F_n / IF_n{}^p = \widehat{\mathbb{Q}F_n}$$

が定義できる。

これは θ の逆である

(∵) $\kappa\theta(x_i) = \kappa(1 + [x_i]) = 1 - 1 + x_i = x_i$

$\kappa\theta|_{\mathbb{Q}F_n} = 1$ (∵ $\{x_i\}$ は F_n を生成する)

$\kappa\theta = 1_{\widehat{\mathbb{Q}F_n}}$ $(\because \mathbb{Q}F_n \overset{dense}{\subset} \widehat{\mathbb{Q}F_n})$

他方

$\theta\kappa([x_i]) = \theta(-1+x_i) = -1+1+[x_i] = [x_i]$

つまり $\theta\kappa|_H = 1$, $\theta\kappa|_T = 1$ $(\because \theta\kappa : \text{alg. homom})$

$\theta\kappa = 1_{\hat{T}}$ $(\because T \overset{dense}{\subset} \hat{T})$ //

ゆえに θ は同型である

② 一般の θ について

① の $\kappa = (std)^{-1}$ をとると

$\theta\circ\kappa : \hat{T} \to \hat{T}$ algebra homom.

$\forall p \geq 1$ $(\theta\circ\kappa)(\hat{T}_p) \subset \hat{T}_p$

$(\because (\text{左辺}) \overset{②}{=} \theta(\hat{I\pi}^p) \overset{①}{\subset} \hat{T}_p$ //$)$

$(\theta\circ\kappa)([x_i]) = \theta(-1+x_i) \equiv [x_i] \mod \hat{T}_2$

このとき次の補題が成立つ

補題 5.2

$U : \hat{T} \to \hat{T}$ algebra homom

$\forall p \geq 1$ $U(\hat{T}_p) \subset \hat{T}_p$

$\forall X \in H$, $U(X) \equiv X \mod \hat{T}_2$

$\Rightarrow U : \hat{T} \to \hat{T}$ algebra isomorphism

$\forall p \geq 1$ $U(\hat{T}_p) = \hat{T}_p$ —

(証明略)

レポート問題 6) 補題 5.2 を示せ —

Lem 5.2 により

$\theta\circ\kappa = \theta\circ(std)^{-1} : \hat{T} \to \hat{T}$ algebra isom.

① により $std : \widehat{\mathbb{Q}F_n} \to \hat{T}$ は同型だから

$\theta : \widehat{\mathbb{Q}F_n} \to \hat{T}$ algebra isom // Thm 5.1.

系 5.3. $\theta : \mathbb{Q}F_n \to \hat{T}$ の像は dense である —

$\left(\because \ \mathbb{Q}F_n \overset{dense}{\subset} \widehat{\mathbb{Q}F_n} \underset{\theta}{\cong} \hat{T} \right)$

No.

Date

total Johnson map

$\theta : F_n \to \hat{T}$ Magnus expansion

$\varphi \in \mathrm{Aut}(F_n)$

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{Q}F_n} & \xrightarrow[\theta]{\cong} & \hat{T} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow\wr & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \exists! T^\theta(\varphi) \in \mathrm{Aut}(\hat{T})} \\ \widehat{\mathbb{Q}F_n} & \xrightarrow[\theta]{\cong} & \hat{T} \end{array}$$

$T^\theta : \mathrm{Aut}(F_n) \to \mathrm{Aut}(\hat{T})$ group homomorphism

$\varphi \longmapsto T^\theta(\varphi)$ total Johnson map (K.)

単射

(∵) $\theta : F_n \to 1+\hat{T}_1$: 単射
(ブルバキ「リー群とリー環」ch 2. §5 n°3 定理1))

$\tau^\theta(\varphi) := T^\theta(\varphi) \circ |\varphi|^{-1} \in \mathrm{Aut}(\hat{T})$

(ここで $|\varphi| = (\varphi$ の $H = H_1(F_n;\mathbb{Q})$ への作用$) \curvearrowright \hat{T}$)

$$\mathrm{Aut}(F_n) \xrightarrow{\tau^\theta} \mathrm{Aut}(\hat{T}) \xrightarrow{|_H} \mathrm{Hom}(H, \hat{T}) = \prod_{k=-1}^{\infty} H^* \otimes H^{\otimes(k+1)}$$

$$\varphi \longmapsto (\tau_k^\theta(\varphi))_{k=-1}^{\infty}$$

$\tau_k^\theta : \mathrm{Aut}(F_n) \to H^* \otimes H^{\otimes(k+1)}$ the k^{th} Johnson map

$(\tau_{-1}^\theta = 0,\ \tau_0^\theta(\varphi) = 1_H)$

第 k Johnson 準同型の拡張になっている.

nilpotent tower

$\Gamma_k = \Gamma_k(F_n)$, $k \geq 1$, lower central series

$\Gamma_1 = F_n$, $\Gamma_{k+1} = [\Gamma_1, \Gamma_k]$. $(k \geq 1)$

$\mathcal{L}_k^{\mathbb{Z}} := \Gamma_k / \Gamma_{k+1}$

定理 5.4. (Magnus)

(1) $(\theta|_{F_n})^{-1}(1+\hat{T}_k) = \Gamma_k$

(2) $\mathcal{L}_k^{\mathbb{Z}}$: $\mathbb{Z}$-free module

(3) $\mathcal{L}_k^{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathcal{L}_k \subset H^{\otimes k}$

((証明略) ブルバキ, ibid. ch. 2. §5 n°4 Thm 2, Thm 3)

$N_k = \Gamma_1/\Gamma_{k+1}$ the k^{th} nilpotent quotient

$N_1 = \Gamma_1/[\Gamma_1,\Gamma_1] = F_n^{abel}$

Thm 5.4 より

$\theta \bmod \hat{T}_{k+1} : N_k \hookrightarrow 1+\hat{T}_1/1+\hat{T}_{k+1}$ 群のうめこみ

Johnson homomorphism $k \geq 1$

$A(k) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Aut}(F_n) \to \mathrm{Aut}(N_k))$ Andreadakis-Johnson filtration

$A(1) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Aut}(F_n) \to \mathrm{Aut}(H)) = IA_n$. IA-autom.gp

$\varphi \in A(k)$, $x \in F_n$ $\varphi(x) \equiv x \bmod \Gamma_{k+1}$

$\tau_k(\varphi)(x) := (x^{-1}\varphi(x) \bmod \Gamma_{k+2}) \in \mathcal{L}^{\mathbb{Z}}_{k+1}$

これは準同型

$\tau_k : A(k) \to H^*_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{L}^{\mathbb{Z}}_{k+1}$ $(\subset H^* \otimes \mathcal{L}_{k+1} \subset H^* \otimes H^{\otimes(k+1)})$

を定める. the k^{th} Johnson homomorphism

命題 5.5 $\theta : F_n \to \hat{T}$ Magnus expansion

$\Longrightarrow \forall k \geq 1$ $\tau^\theta_k|_{A(k)} = \tau_k : A(k) \to H^* \otimes H^{\otimes(k+1)}$

レポート問題 7 τ_k が well-defined であることを示し, 命題 5.5 を示せ

((注) Johnson 準同型を写像類群全体にひろげる試みは 森田にはじまり, Hain, Day, Massuyeau などが行っている)

group-expansion

標数 0 の体で考えているときは "Magnus 群" $1+\hat{T}_1$ は大きすぎる より小さい "Hausdorff 群" $\exp(\hat{\mathcal{L}})$ で考えよう

定義 (Massuyeau) $\theta : F_n \to \hat{T}$ group-like expansion

def $\begin{cases} (0) & \theta : F_n \to \hat{T} \text{ Magnus expansion} \\ (1) & \theta(F_n) \subset \exp(\hat{\mathcal{L}}) \end{cases}$

このとき

$\ell = \ell^\theta := \log \theta : F_n \to \hat{\mathcal{L}}$

と表すことにする

No.

Date

群環のHopf代数としての構造

G：群, $\mathbb{Q}G$：群環

$\varepsilon : \mathbb{Q}G \to \mathbb{Q}$, $\sum_{x \in G} a_x x \mapsto \sum a_x$

augmentation. alg. homom.

$IG := \mathrm{Ker}(\varepsilon : \mathbb{Q}G \to \mathbb{Q})$ augmentation ideal

$\iota : \mathbb{Q}G \to \mathbb{Q}G$, $x \mapsto x^{-1}$

antipode anti-automorphism

$\Rightarrow$ これを使って右G moduleを左G moduleとみなす.

$\Delta : \mathbb{Q}G \to \mathbb{Q}G \otimes \mathbb{Q}G = \mathbb{Q}(G \times G)$, $x \mapsto (x, x)$

coproduct algebra homom.

これらによって$\mathbb{Q}G$はHopf代数となる.

$\widehat{\mathbb{Q}G} := \varprojlim_{p} \mathbb{Q}G/IG^p$ completed group ring

$\varepsilon, \iota, \Delta$ は $\widehat{\mathbb{Q}G}$ に連続に拡張する $\Rightarrow$ $\widehat{\mathbb{Q}G}$：完備Hopf代数

補題5.6. $\theta : F_n \to \hat{T}$ group-like expansion

$\Rightarrow$ $\theta : \mathbb{Q}F_n \to \hat{T}$ (完備)Hopf代数の準同型

証明 $\varepsilon, \iota, \Delta$ が保たれることをたしかめる.

ε：確認済

ι について

$\iota|_{\hat{\mathcal{L}}} = -1_{\hat{\mathcal{L}}}$

∵) $\mathcal{L}$ 上で示せばよい.

$\iota|_H = -1_H$

$\iota u = -u$, $\iota v = -v$ ならば

$\iota[u,v] = \iota(uv - vu) = (-v)(-u) - (-u)(-v) = -[u,v]$

$\mathcal{L}$ はLie代数としてHで生成される//

とくに $x \in F_n$, $\iota \ell(x) = -\ell(x)$

$$\theta\iota(x) = \theta(x^{-1}) = e^{-\ell(x)} = e^{\iota \ell(x)} = \iota e^{\ell(x)} = \iota\theta(x)$$

Δ について

$$(\theta \otimes \theta)\Delta x = \theta(x) \otimes \theta(x) \overset{仮定}{=} \Delta\theta(x) \quad //$$

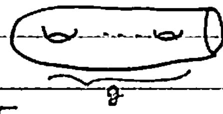
系 5.7 $\theta : F_n \to \hat{T}$ group-like expansion

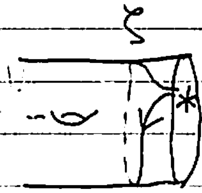
$\Rightarrow \theta : \widehat{\mathbb{Q}F_n} \xrightarrow{\cong} \hat{T}$ 完備 Hopf 代数の同型

(証明 同型 $\Leftarrow$ Thm 5.1
あとは Lem 5.6 による //)

Symplectic expansions

ここから F_n の代わりに $\pi_1(\Sigma_{g,1})$, $g \geq 1$, を考える

$\Sigma = \Sigma_{g,1} =$ , $* \in \partial\Sigma$



$\pi = \pi_1(\Sigma, *) \cong F_{2g}$

$\zeta \in \pi$, 境界を逆向きに一周する loop

$\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^{g} \subset \pi$ symplectic generators について

$\zeta = \prod_{i=1}^{g} [\alpha_i, \beta_i]$

$\theta(\zeta)$ を計算してみる ($\theta : \pi \to \hat{T}$: Magnus expansion)

$\forall x, \forall y \in \pi$, $X = [x]$, $Y = [y] \in H$ について

$$\theta(xyx^{-1}y^{-1}) \equiv 1 + XY - YX \mod \hat{T}_3$$

$\because$) mod $\hat{T}_3$ で計算する

$$\theta(xy) - \theta(yx) \equiv XY - YX$$
$$= \theta(xyx^{-1}y^{-1}yx) - \theta(yx)$$
$$\equiv \theta(xyx^{-1}y^{-1}) + [xyx^{-1}y^{-1}] \otimes [yx] - 1 = \theta(xyx^{-1}y^{-1}) - 1 \quad //$$

$A_i = [\alpha_i]$, $B_i = [\beta_i]$ とおくと

$$\theta(\zeta) \equiv 1 + \sum_{i=1}^{g} A_i B_i - B_i A_i = 1 + \omega \mod \hat{T}_3$$

higher terms はどうにかならないか?

定義 (Massuyeau)

$\theta : \pi \to \hat{T}$ symplectic expansion

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
1) $\theta : \pi \to \hat{T}$ group-like expansion
2) $\theta(\zeta) = e^{\omega}$

条件 1) は簡単だが、条件 2) をみたすように作るのは難しい

No.

Date

symplectic expansion の例

(1) (K.) harmonic Magnus expansion

C : compact Riemann surface of genus g

$P \in C$, $0 \neq v \in T_P C$

$\pi_1(C \setminus \{P\}, v) \cong \pi$

harmonic form と Green 作用素を使って

symplectic expansion / $\mathbb{R}$ が構成できる

(Teichmüller 空間で parametrize されている)

(2) (Massuyeau) the LMO expansion

Lê-村上-大槻函手を使って構成する

(3) (久野) combinatorial symplectic expansion

π の (symplectic とは限らない) 自由生成系から構成する

$[\ ,\ ] : H \otimes \mathcal{L}_k \to \mathcal{L}_{k+1}$, $X \otimes u \mapsto [X, u]$

の "よい" section を使う

$\langle \xi \rangle < \pi$, ξ の生成する無限巡回群

$\theta : \pi \to \widehat{T}$ symplectic expansion

$\theta(\langle \xi \rangle) \subset \mathbb{Q}[[\omega]] \subset \widehat{T}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}\langle \xi \rangle & \hookrightarrow & \mathbb{Q}\pi \\ \theta \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \theta \\ \mathbb{Q}[[\omega]] & \hookrightarrow & \widehat{T} \end{array}$$

(完備) Hopf 代数の可換図式.