作成 10/11/02

No. 3-1

Date 10・12・15

§3. Goldman Lie algebra

交叉形式の幾何的精密化

この§でやること

- Goldman Lie 代数 $\mathbb{Q}\hat{\pi}$ の導入
- $\mathbb{Q}\hat{\pi}' \triangleleft \mathbb{Q}\hat{\pi}$ ideal
- $\sigma: \mathbb{Q}\hat{\pi} \to \mathrm{Der}(\mathbb{Q}\pi)$ Lie algebra homomorphism.

注意 ほとんどすべて $\mathbb{Z}$ 上で成り立つが、あとの都合を考えて $\mathbb{Q}$ 上で行う。

S : oriented surface

$\hat{\pi} = \hat{\pi}(S) := [S^1, S] \left(\overset{S:\text{conn なとき}}{=} \pi_1(S)/\text{conj}\right)$

$p \in S$, $|\ |: \pi_1(S,p) \to \hat{\pi}(S)$, $x \mapsto |x|$, 基点を忘れる写像。

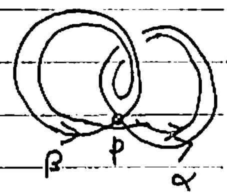
$\alpha, \beta \in \hat{\pi}$, $\alpha \sqcup \beta: S^1 \sqcup S^1 \to S$ generic immersion となるように代表元をとる

Goldman bracket

$$[\alpha,\beta] \overset{\text{def}}{=} \sum_{p\in\alpha\cap\beta} \varepsilon(p;\alpha,\beta)\,|\alpha_p\beta_p| \in \mathbb{Z}\hat{\pi} \subset \mathbb{Q}\hat{\pi}$$

$\begin{matrix}\alpha_p \\ \beta_p\end{matrix} \in \pi_1(S,p)$ p を基点として $\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}$ に沿って一周する based loop

定理3.1 (Goldman)



(1) $[\ ,\ ]$ は well-defined である。つまり代表元のとり方によらない

(2) $\mathbb{Q}\hat{\pi}$ は $[\ ,\ ]$ に関して Lie 代数となる

$\mathbb{Q}\hat{\pi} = \mathbb{Q}\hat{\pi}(S)$: 曲面 S の Goldman Lie 代数。

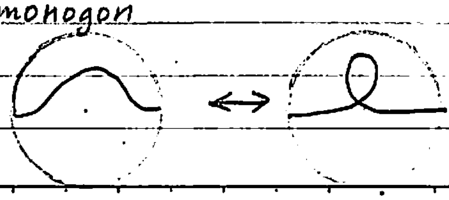
(注) (1) は群のホモロジーを使って代数的にも証明できる (§9)

証明 (1) 定理1.4を使う。

$\alpha \sqcup \beta$ と $\alpha' \sqcup \beta'$ が moves $(\omega 1)(\omega 2)(\omega 3)$ で関係しているときに

$[\alpha,\beta] = [\alpha',\beta']$ であることを示す

$(\omega 1)$ monogon



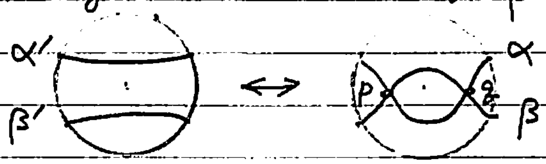
$\alpha\cap\beta = \alpha'\cap\beta'$

影響なし

No.

Date

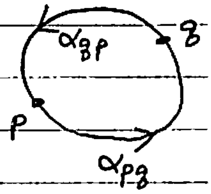
(w2) bigon ともにα またはともにβならば影響なし



$\varepsilon(p:\alpha,\beta) = -\varepsilon(q:\alpha,\beta)$ だから $|\alpha_p\beta_p| = |\alpha_q\beta_q| \in \hat{\pi}$ を示せばよい

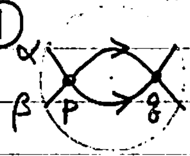
(記号 α_{pq} : α に沿って p から q までの path とする

$\alpha_p = \alpha_{pq}\alpha_{qp}$, $\alpha_q = \alpha_{qp}\alpha_{pq}$



4つに場合分け

①

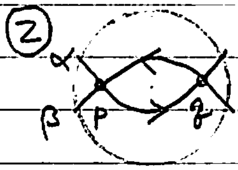


このとき $\alpha_{pq} \simeq \beta_{pq}$ rel ∂

$$|\alpha_p\beta_p| = |\alpha_{pq}\alpha_{qp}\beta_{pq}\beta_{qp}| = |\beta_{pq}\alpha_{qp}\alpha_{pq}\beta_{qp}|$$

$$= |\alpha_{qp}\alpha_{pq}\beta_{qp}\beta_{pq}| = |\alpha_q\beta_q|$$

②

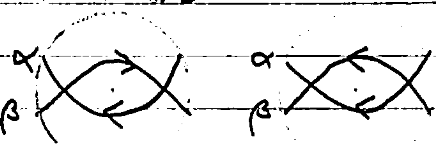


このとき $\alpha_{pq} \simeq \beta_{pq}^{-1}$ rel ∂

$$|\alpha_p\beta_p| = |\alpha_{pq}\alpha_{qp}\beta_{pq}\beta_{qp}| = |\alpha_{qp}\beta_{pq}|$$

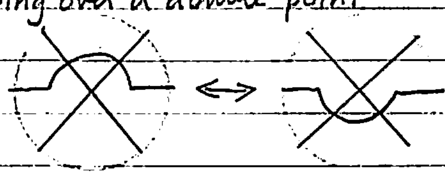
$$= |\alpha_{qp}\alpha_{pq}\beta_{qp}\beta_{pq}| = |\alpha_q\beta_q|$$

他の2つの場合



も同様に考える

(w3) jumping over a double point



3本のそれぞれがαか?βか? $\Longrightarrow$ $2^3 = 8$ 通り

すべてα またはすべてβ の場合 $\Longrightarrow$ 影響なし.

のこり6通り

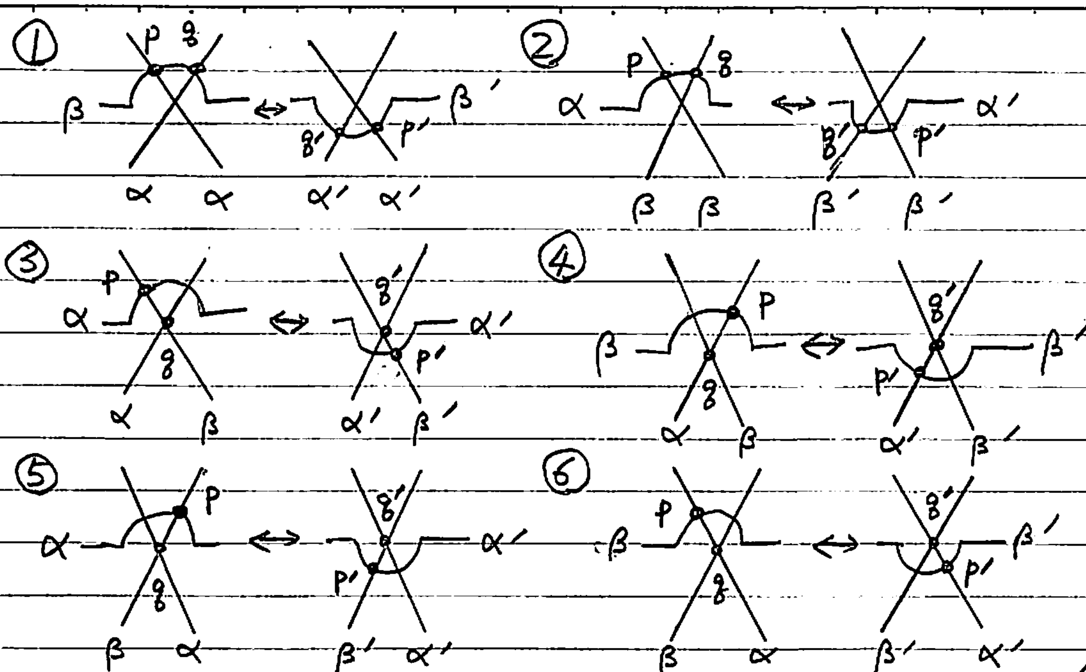
いずれにしても次がわかるので値は変わらない

$\varepsilon(p:\alpha,\beta) = \varepsilon(p':\alpha',\beta')$

$\varepsilon(q:\alpha,\beta) = \varepsilon(q':\alpha',\beta')$

$|\alpha_p\beta_p| = |\alpha'_{p'}\beta'_{p'}|$

$|\alpha_q\beta_q| = |\alpha'_{q'}\beta'_{q'}|$



//(1)

(2) (anti-symmetry)

$|\alpha_p \beta_p| = |\beta_p \alpha_p|$, $\varepsilon(p;\alpha,\beta) = -\varepsilon(p;\beta,\alpha)$ より明らか.

(Jacobi identity)

$\alpha \sqcup \beta \sqcup \gamma : S^1 \sqcup S^1 \sqcup S^1 \to \Sigma$ generic immersion となるようにとる

$$[\alpha,[\beta,\gamma]] = [\alpha, \sum_{p\in\beta\cap\gamma} \varepsilon(p;\beta,\gamma)|\beta_p\gamma_p|]$$

$$= \sum_{p\in\beta\cap\gamma}\ \sum_{q\in\alpha\cap(\beta_p\gamma_p)} \varepsilon(p;\beta,\gamma)\varepsilon(q;\alpha,\beta_p\gamma_p)|\alpha_q(\beta_p\gamma_p)_q|$$

$$= \sum_{p\in\beta\cap\gamma}\ \sum_{q\in\alpha\cap\beta} \varepsilon(p;\beta,\gamma)\varepsilon(q;\alpha,\beta)|\alpha_q\beta_{qp}\gamma_p\beta_{pq}|$$

$$+ \sum_{p\in\beta\cap\gamma}\ \sum_{q\in\alpha\cap\gamma} \varepsilon(p;\beta,\gamma)\varepsilon(q;\alpha,\gamma)|\alpha_q\gamma_{qp}\beta_p\gamma_{pq}|$$

$$= -\sum_{p\in\gamma\cap\alpha}\ \sum_{q\in\beta\cap\gamma} \varepsilon(p;\gamma,\alpha)\varepsilon(q;\beta,\gamma)|\beta_q\gamma_{qp}\alpha_p\gamma_{pq}|$$

$$[\alpha,[\beta,\gamma]] + [\beta,[\gamma,\alpha]] + [\gamma,[\alpha,\beta]]$$

$$= \sum_{p\in\beta\cap\gamma}\ \sum_{q\in\alpha\cap\beta} \varepsilon(p;\beta,\gamma)\varepsilon(q;\alpha,\beta)|\alpha_q\beta_{qp}\gamma_p\beta_{pq}|$$

$$+ \sum_{p\in\beta\cap\gamma}\ \sum_{q\in\alpha\cap\gamma} \varepsilon(p;\beta,\gamma)\varepsilon(q;\alpha,\gamma)|\alpha_q\gamma_{qp}\beta_p\gamma_{pq}|$$

$$+ \sum_{p\in\gamma\cap\alpha}\ \sum_{q\in\beta\cap\gamma} \varepsilon(p;\gamma,\alpha)\varepsilon(q;\beta,\gamma)|\beta_q\gamma_{qp}\alpha_p\gamma_{pq}|$$

$$+\sum_{p\in\gamma\cap\alpha}\ \sum_{q\in\beta\cap\alpha}\varepsilon(p;\gamma,\alpha)\,\varepsilon(q;\beta,\alpha)\,|\beta_q\alpha_{qp}\gamma_p\alpha_{pq}|$$

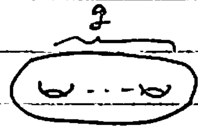
$$+\sum_{p\in\alpha\cap\beta}\ \sum_{q\in\gamma\cap\alpha}\varepsilon(p;\alpha,\beta)\,\varepsilon(q;\gamma,\alpha)\,|\gamma_q\alpha_{qp}\beta_p\alpha_{pq}|$$

$$+\sum_{p\in\alpha\cap\beta}\ \sum_{q\in\gamma\cap\beta}\varepsilon(p;\alpha,\beta)\,\varepsilon(q;\gamma,\beta)\,|\gamma_q\beta_{qp}\alpha_p\beta_{pq}|$$

$= 0$ //(2) // Thm 3.1.

◎ homological Goldman Lie algebra との関係

$S=\Sigma_{g,1}$ または Σ_g の場合　　$\Sigma_g =$



$[\alpha_p\beta_p]=[\alpha]+[\beta]\in H_{\mathbb{Z}}$ だから

$\mathbb{Q}\hat{\pi}\to\mathbb{Q}H_{\mathbb{Z}},\ \alpha\mapsto[[\alpha]]$ surjective Lie algebra homom.

$H_1(\mathbb{Z}\hat{\pi})$: 無限生成 ($\because$ $H_1(\mathbb{Z}\hat{\pi})\twoheadrightarrow H_1(\mathbb{Z}H_{\mathbb{Z}})$: 無限生成)

◎ Goldman bracket の由来

$S=\Sigma_g,\ \pi=\pi_1(\Sigma_g)$

$G=GL_n(\mathbb{R}),\ GL_n(\mathbb{C})$ または $GL_n(\mathbb{H})$

$\mathrm{Hom}(\pi,G)/G$: symplectic manifold

[$\because$ $\overset{\in}{[\phi]}$, $T_{[\phi]}(\mathrm{Hom}(\pi,G)/G)=H^1(\pi;\mathrm{Lie}\,G_{\mathrm{Ad}\phi})$
cup 積によって sympl. str. が決まる (Goldman) //]

$\rightsquigarrow$ Poisson bracket が定まる

$\alpha\in\hat{\pi}$

$f_\alpha:\mathrm{Hom}(\pi,G)/G\to\mathbb{R},\ [\phi]\mapsto\mathrm{trace}(\phi(\alpha))$ trace function

[Wolpert-Goldman formula $\forall\alpha,\forall\beta\in\hat{\pi}$

$$\{f_\alpha,f_\beta\}=\sum_{p\in\alpha\cap\beta}\varepsilon(p;\alpha,\beta)\,f_{|\alpha_p\beta_p|}.$$
]

(Wolpert : 最初に $G=PSL_2(\mathbb{R})$ で類似の公式を見つけた)

$\rho:\mathbb{Q}\hat{\pi}\to C^\infty(\mathrm{Hom}(\pi,G)/G)$ Lie algebra homomorphism

◎ 以下，S : connected とする

$1 \in \hat{\pi}$ trivial (constant) loop

$\hat{\pi}' := \hat{\pi} \setminus \{1\}$

補題 3.2 (Goldman)

$$[\mathbb{Q}\hat{\pi}, \mathbb{Q}\hat{\pi}] \subset \mathbb{Q}\hat{\pi}'$$

(注) Goldman の証明は誤り．一般に $[\alpha, \alpha^{-1}] \neq 0$ である

証明 $\forall \alpha, \forall \beta \in \hat{\pi}$, $[\alpha, \beta] \in \mathbb{Q}\hat{\pi}'$ を示す

$$[\alpha, \beta] = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(p; \alpha, \beta) |\alpha_p \beta_p|$$

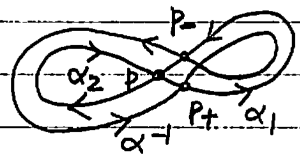
場合分け
(1) $\beta \neq \alpha^{-1}$
(2) $\beta = \alpha^{-1}$

(1) このとき $\forall p \in \alpha \cap \beta$ $|\alpha_p \beta_p| \in \hat{\pi}'$ である

(∵) もしそうでないなら $\exists p \in \alpha \cap \beta$ $|\alpha_p \beta_p| = 1$

$\beta_p = \alpha_p^{-1} \in \pi_1(S, p)$ 仮定に矛盾 //

(2) このとき α を generic にとって $\alpha^{-1} = \beta$ を左側に押し出す



p : α の自己交叉の1つ

$\Rightarrow$ α と α^{-1} の交点が2つできる

$\varepsilon(p_\pm; \alpha, \alpha^{-1}) = \pm 1$ となるように p_+, p_- を決める

$\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_1(S, p)$ を左図のように定める

p_+ における寄与 : $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1}$

p_- ; $\alpha_2 \alpha_1 \alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1}$

ここで $|\alpha_1 \alpha_2 \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1}| = 1 \Leftrightarrow |\alpha_2 \alpha_1 \alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1}| = 1$ だから

$$|\alpha_1 \alpha_2 \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1}| - |\alpha_2 \alpha_1 \alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1}| \in \mathbb{Q}\hat{\pi}'$$

がわかる．したがって $[\alpha, \alpha^{-1}] \in \mathbb{Q}\hat{\pi}'$ である //

系 3.3 $\mathbb{Q}\hat{\pi} = \mathbb{Q}\hat{\pi}' \oplus \mathbb{Q} \cdot 1$ (Lie 代数としての直和分解)

(注) $S = \Sigma_{g,1}$ または Σ_g のとき $\mathbb{Q}\hat{\pi}/\mathbb{Q}\hat{\pi}' \cong \mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}\hat{\pi} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}H_{\mathbb{Z}} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}$

によって $\dim H_1(\mathbb{Q}\hat{\pi}) \geq 2$ がわかる

未解決問題 $H_1(\mathbb{Q}\hat{\pi})$ は有限次元か？

No.

Date

◎ Goldman Lie 代数の基本群の群環への作用

$* \in S$ basepoint

$\pi := \pi_1(S,*)$, $\mathbb{Q}\pi$: group ring

$S^* := S \setminus \{*\}$

Lie 代数準同型

$\sigma : \mathbb{Q}\hat{\pi}(S^*) \to \mathrm{Der}(\mathbb{Q}\pi)$

を構成する.

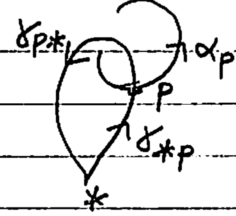
$\alpha \in \hat{\pi}(S^*)$, $\gamma \in \pi$

$\alpha \sqcup \gamma : S^1 \sqcup S^1 \to S$ generic immersion とする

ただし, 基点 $* \in S^1$ のまわりで γ は immersion でなくてよい

(∵ 基点 $* \in S^1$ は動かせない)

$$\sigma(\alpha)(\gamma) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{p \in \alpha \cap \gamma} \varepsilon(p;\alpha,\gamma)\, \gamma_{*p}\alpha_p\gamma_{p*} \in \mathbb{Q}\pi$$



定理3.4.

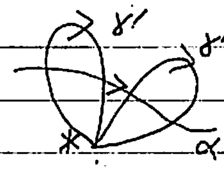
$\sigma : \mathbb{Q}\hat{\pi}(S^*) \to \mathrm{Der}(\mathbb{Q}\pi)$

は well-defined な Lie 代数準同型である

証明 (well-defined) … これだけ示す (これも群のホモロジーで証明できる)

(derivation) … 右図より明らか

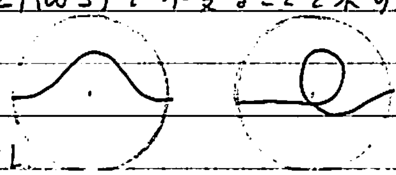
(Lie algebra homom) … Thm 3.1 (2) と同様



(well-defined)

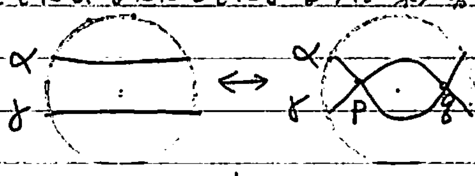
定理1.4 の 3つの moves (ω1)(ω2)(ω3) で不変なことを示す

(ω1) monogon … 影響なし



(ω2) bigon

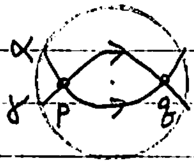
ともに α またはともに γ ならば影響なし



このとき, α は S^* を動いているので 基点 $*$ は disk の外にあることに注意する

$\varepsilon(p;\alpha,\gamma) = -\varepsilon(q;\alpha,\gamma)$ だから

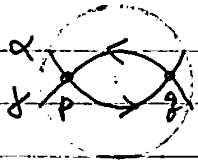
$\gamma_{*p}\alpha_p\gamma_{p*} = \gamma_{*q}\alpha_q\gamma_{q*} \in \pi$ を示せばよい

① 

$\alpha_{pq} \simeq \gamma_{pq}$ rel ∂ だから

$\gamma_{*p}\alpha_p\gamma_{p*} = \gamma_{*p}\alpha_{pq}\alpha_{qp}\gamma_{pq}\gamma_{q*}$

$= \gamma_{*p}\gamma_{pq}\alpha_{qp}\alpha_{pq}\gamma_{q*} = \gamma_{*q}\alpha_q\gamma_{q*}$

② 

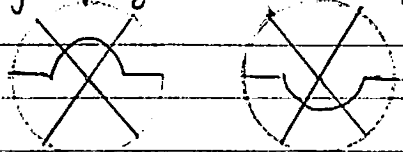
$\alpha_{pq} \simeq \gamma_{qp}^{-1}$ rel ∂ だから

$\gamma_{*p}\alpha_p\gamma_{p*} = \gamma_{*q}\gamma_{qp}\alpha_{pq}\alpha_{qp}\gamma_{p*} = \gamma_{*q}\alpha_{qp}\gamma_{p*}$

$= \gamma_{*q}\alpha_{qp}\alpha_{pq}\gamma_{qp}\gamma_{p*} = \gamma_{*q}\alpha_q\gamma_{q*}$

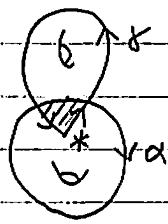
他の2つの場合も同様に考える

(ω3) jumping over a double point



Thm 3.1 と同様 (略) // Thm 3.4

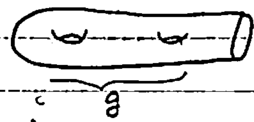
注意 (1) $\hat{\pi}(S)$ ではなく $\hat{\pi}(S^*)$ とした理由



$\sigma(\alpha)(\gamma) = \alpha\gamma - \gamma\alpha \neq 0 \in \mathbb{Q}\pi$

((ω2) bigon のところで矛盾が出る)

(2) 定義から明らかに $\alpha \cap \gamma = \phi$ ならば $\sigma(|\alpha|)(\gamma) = 0$ である

(3) $S = \Sigma = \Sigma_{g,1} =$ 

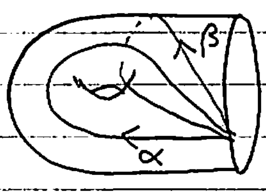
$* \in \partial\Sigma$ の場合

$\Sigma \setminus \{*\} \simeq \Sigma$ だから

$\mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma)$ は $\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma, *)$ に作用する

例を2つ計算する (あとで使う)

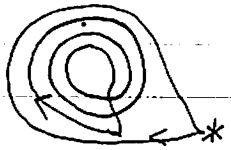
補題 3.5. $\forall n \geq 0$



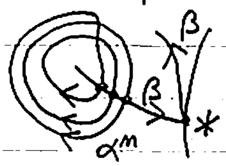
$\sigma(|\alpha^n|)(\alpha) = 0$

$\sigma(|\alpha^n|)(\beta) = n\beta\alpha^n$

証明(前半) $|\alpha^n|$ と α は disjoint にできるから明らか

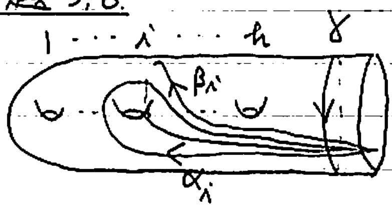


(後半) $|\alpha^n|$ と β は n 回 正の向きに交わって、それぞれの寄与は $\beta\alpha^n$



//

補題3.6.

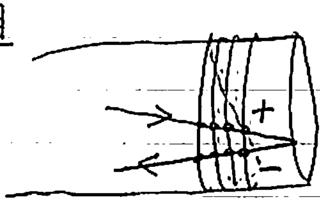


$\forall n \geq 0$

$$\sigma(|\gamma^n|)(\alpha_i) = -n\gamma^n\alpha_i + n\alpha_i\gamma^n$$

$$\sigma(|\gamma^n|)(\beta_i) = -n\gamma^n\beta_i + n\beta_i\gamma^n$$

証明



γ^n と α_i は

n 回 負の向き
n 回 正の向き　に交わる

負の交叉の寄与　$\gamma^n\alpha_i$
正　$\alpha_i\gamma^n$

β_i についても同様 //